

## О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С РАЗНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

*Б. В. Горев, В. В. Рубанов, О. В. Соснин*  
(Новосибирск)

Конструкционные материалы из легких сплавов, типа алюминиево-магниевых и титановых, как правило, обладают различием в прочностных свойствах на растяжение и сжатие. При этом, если «мгновенные» упруго-пластические свойства могут отличаться незначительно, различие в свойствах при длительном воздействии (например, длительность до разрушения) может достигать нескольких порядков [1]. На фиг. 1 представлены диаграммы ползучести титанового сплава ВТ-9 при температуре 400°C с различными комбинациями растяжения (сжатия) и кручения при постоянной интенсивности напряжений

$$\sigma_i = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} = 72,5 \text{ кг/мм}^2$$

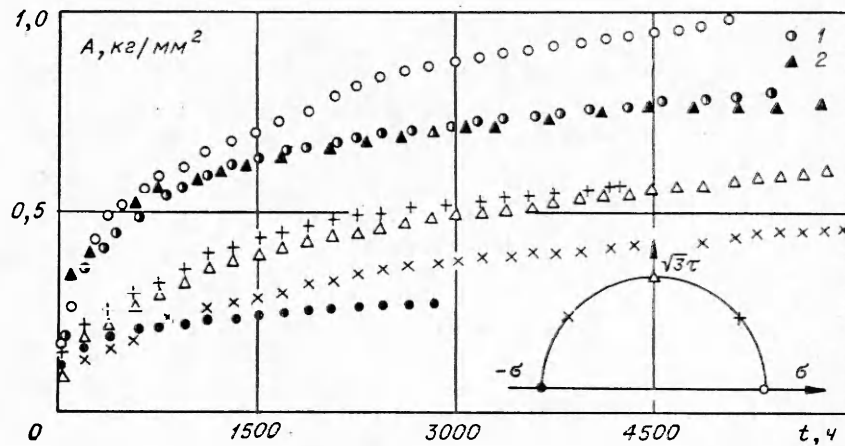
в виде зависимости  $A = \sigma\varepsilon + \tau\gamma$  от времени. Значки на диаграммах соответствуют значкам схемы напряженного состояния плоскости  $\sigma - \sqrt{3}\tau$ . Из диаграмм видно, что интенсивность процесса ползучести с  $\sigma_i = \text{const}$  уменьшается при изменении напряженного состояния от чистого растяжения к чистому сдвигу и сжатию. Здесь же для сравнения изображены две диаграммы: чистое растяжение с  $\sigma_i = 71 \text{ кг/мм}^2$  (точки 1) и кручение тонкостенного трубчатого образца с  $\sigma_i = 77,5 \text{ кг/мм}^2$  (точки 2), интенсивность процесса ползучести которых одинакова\*. Приведенный пример наглядно иллюстрирует необходимость построения теории, позволяющей описывать процессы ползучести в сложных средах.

Одной из первых попыток описать процессы ползучести в средах, сопротивляющихся растяжению и сжатию, была работа [2], в которой реальные напряжения заменялись на «приведенные» и теория строилась в предположении подобия между девиаторами скоростей деформаций и «приведенных» напряжений. Дальнейшего развития это направление не получило, а в приложениях даже несложные задачи приводили к довольно громоздким решениям [3].

Другим подходом было построение уравнения ползучести в виде зависимости «эквивалентной скорости деформаций»  $\eta_a$  от «эквивалентного напряжения»  $\sigma_a$ , где обычно за  $\eta_a$  принималась интенсивность скоростей деформаций  $\eta_i = \left(\frac{2}{3}\eta_{kl}\eta_{kl}\right)^{1/2}$ , а  $\sigma_a$  рассматривалась как функция инвариантов тензора напряжений. Уравнение ползучести дополнялось законом течения (например, градиентным  $\eta_{kl} = k\partial\sigma_a/\partial\sigma_{kl}$ , где  $\sigma_a$  не всегда тождественна  $\sigma_a$ ) [4, 5].

Предпринимались попытки построения уравнений на основе предположения существования потенциальной функции ползучести, зависящей от инвариантов тензора напряжений и скалярных параметров упрочнения [6—13]. При этом потенциальная функция предполагалась как

\* В постановке этих экспериментов принимал участие Н. Г. Торшенов.



Фиг. 1

гладкой [6—8, 12], так и кусочно-гладкой [9, 11, 13], а также строились уравнения и в более общих предположениях [14].

При построении определяющих уравнений разносопротивляемость растяжению и сжатию учитывается путем введения дополнительно в  $\sigma_a$ , кроме второго инварианта девиатора напряжений, одного из нечетных инвариантов: в ряде работ предпочтение отдавалось первому инварианту тензора напряжений [6, 9, 11, 15, 16—18], в других — третьему инварианту девиатора напряжений [7, 8, 12, 14]. Не ставя целью делать более подробный обзор работ в этом направлении, проиллюстрируем на примере ползучести титанового сплава ОТ-4 при температуре 475°C и различных комбинациях растяжение — кручение, сжатие — кручение наиболее типичные подходы в построении определяющих уравнений, содержащих дополнительно либо первый, либо третий инварианты тензора напряжений.

Экспериментальная программа проведена на образцах единой геометрической формы и размеров, чтобы исключить возможное влияние масштабных факторов. Трубочатые образцы наружным и внутренним диаметрами 20 и 18 мм и длиной рабочей части 30 мм изготавливались из одного прутка диаметра 25 мм сплава ОТ-4 в состоянии поставки. После изготовления образцы термической обработке не подвергались. Свойства анизотропии материала не проверялись. При анализе экспериментальных данных основное внимание было обращено на различие в свойствах материала при растяжении и сжатии. Эксперименты проводились на трех машинах с предварительной проверкой и сопоставлением силовых и температурных режимов в каждой. В процессе эксперимента из условия несжимаемости материала  $F_0 l_0 = Fl$  через каждые 0,5% осевой деформации ползучести пересчитывалась площадь сечения образца  $F$  и средний радиус сечения  $r = r_0 + \Delta r$  (здесь  $F_0$  и  $F$ ,  $l_0$  и  $l$  — исходная и текущая площади сечения образца и длины его рабочей части,  $\Delta r = r_0 \varepsilon_\varphi = -r_0 \varepsilon_z / 2$ ) и по ним корректировалась осевая нагрузка и крутящий момент с целью поддержания постоянства напряженного состояния в образце. В экспериментах при чистом растяжении, а также при комбинациях растяжения с небольшой добавкой крутящего момента образцы доводились до разрушения. При других комбинациях напряженного состояния эксперимент прекращался при появлении признаков потери устойчивости образца.

Предположим, что процесс ползучести материала на установившейся стадии при одноосном нагружении можно описать зависимостью

$$(1) \quad \sigma \dot{\eta} = B|\sigma|^n,$$

которая при обобщении на случай пространственного напряженного состояния приводит к зависимости

$$(2) \quad W = B_0 \sigma_3^n, \quad W = \sigma_{ij} \eta_{ij}.$$

На фиг. 2 в логарифмических координатах представлены результаты экспериментов на чистое растяжение (светлые точки), чистое сжатие (темные точки), чистое кручение (крестики); видно, что показатель  $n$  для всех трех видов нагружений одинаков, но  $\sigma_3$  с интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  не совпадает. Обработывая результаты этих экспериментов по зависимости типа (1), получим для растяжения и сжатия соответственно величины

$$(3) \quad B_1 = 13,3 \cdot 10^{-10} (\text{кг/мм}^2)^{1-n} \text{ч}^{-1}, \quad B_2 = 7,5 \cdot 10^{-10} (\text{кг/мм}^2)^{1-n} \text{ч}^{-1}, \quad n = 5.$$

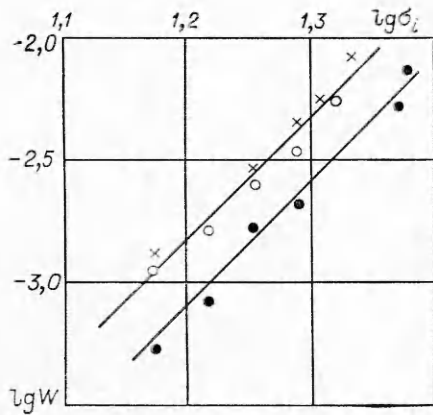
Уравнение ползучести (2), содержащее, помимо второго инварианта девиатора напряжений (интенсивность напряжений)  $\sigma_i = ((3/2)\sigma_{kl}^0 \sigma_{kl}^0)^{1/2}$ , где  $\sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{kl}$ , дополнительно и первый инвариант тензора напряжений  $I_1 = \sigma_{nn}$ , можно, например, представить в виде

$$(4) \quad W = \frac{1}{2} [B_1 (1 + I_1/\sigma_i) + B_2 (1 - I_1/\sigma_i)] \sigma_i^n,$$

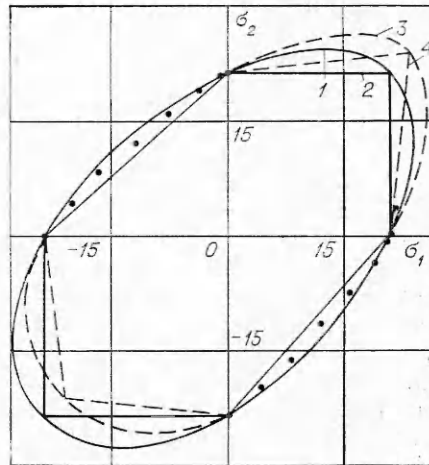
$$\eta_{kl} = k_1 \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{kl}}$$

с добавлением ограничения  $-1 \leq I_1/\sigma_i \leq 1$  и  $|I_1/\sigma_i| = 1$  вне этого интервала.

В пространстве главных напряжений поверхность  $W = \text{const}$  по (4) представляет собой два составных равнонаклоненных к координатным осям цилиндра с переходной областью. С уменьшением различия в свой-



Фиг. 2



Фиг. 3

Таблица 1

Номер экспе- римента	$\sigma, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	$\tau, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	$\eta \cdot 10^4$	$\zeta \cdot 10^4$	$\eta_1 \cdot 10^4$	$\zeta_1 \cdot 10^4$	$\eta_2 \cdot 10^4$	$\zeta_2 \cdot 10^4$	$\eta_3 \cdot 10^4$	$\zeta_3 \cdot 10^4$	$\eta_4 \cdot 10^4$	$\zeta_4 \cdot 10^4$
1	21	0	2,59	0	2,59	0	2,59	0	2,59	0	2,59	0
2	19,49	4,66	2,59	1,80	2,40	1,72	2,57	2,46	2,43	1,72	2,56	2,32
3	15,00	8,66	1,76	3,36	1,78	3,08	2,22	5,12	1,90	3,10	2,28	4,86
4	8,10	11,20	1,10	5,40	0,93	3,86	1,32	7,37	1,02	3,57	1,48	7,05
5	0	11,70	0	4,70	0	3,03	0,15	8,20	3,00	3,00	0,16	6,04
6	-8,40	11,70	-0,97	4,27	-0,82	3,44	-1,22	6,77	-0,63	3,28	-1,00	6,70
7	-15,90	9,18	-1,95	3,25	-1,51	2,62	-1,94	4,47	-1,36	2,52	-1,80	4,55
8	-24,00	0	-2,84	0	-2,48	0	-2,48	0	-2,49	0	-2,48	0
9	9,05	9,05	0,60	2,76	0,63	1,91	0,87	3,49	0,72	1,91	0,94	3,34
10	15,63	5,21	1,08	1,28	1,18	1,18	1,32	1,77	1,22	1,19	1,34	1,67
11	0	8,66	0	1,55	0	0,91	0	1,87	0,04	0,91	0,04	1,81
12	0	11,25	0	3,80	0	2,60	0	5,33	0,13	2,58	0,14	5,16
13	0	10,39	0	2,76	0	1,89	0	3,88	0,09	1,88	0,10	3,80
14	0	12,50	0	6,80	0	3,96	0	8,20	0,19	3,91	0,22	7,87

ствах на растяжение и сжатие зависимость (4) переходит в известную для изотропных сред зависимость по критерию Мизеса с ассоциированным законом течения. На фиг. 3 цифрой 1 отмечен контур  $W = \text{const}$  в плоскости  $\sigma_1 - \sigma_2$ , построенный по зависимости (4) с характеристиками (3). В табл. 1 приведены экспериментальные данные скоростей деформаций ползучести  $\eta = ds/dt$  и  $\zeta = dy/dt$ , соответствующие различным комбинациям  $\sigma$  и  $\tau$ . В колонках  $\eta_1$  и  $\zeta_1$  показаны расчетные значения скоростей деформаций, полученные по зависимостям (4). Точками на фиг. 3 отмечены экспериментальные величины  $W = \sigma\eta + \tau\zeta$  первых семи экспериментов табл. 1.

По аналогии с (4) можно дать обобщение критерию Треска — Сен-Венана в виде

$$(5) \quad W = \frac{1}{2} \left[ B_1 \left( 1 + \frac{I_1}{\tau_m} \right) + B_2 \left( 1 - \frac{I_1}{\tau_m} \right) \right] \tau_m^n,$$

$$\eta_i = k_2 \frac{\partial \tau_m}{\partial \sigma_j}, \quad \tau_m = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

с ограничениями  $-1 \leq I_1/\tau_m \leq 1$  и  $|I_1/\tau_m| \equiv 1$  вне этого интервала.

В пространстве главных напряжений поверхность  $W = \text{const}$  по (5) представляет собой две равнонаклоненные к координатным осям шестигранные призмы, соединенные пирамидальным поясом. При стремлении  $B_1$  к  $B_2$  зависимости (5) переходят в известный для изотропных сред критерий максимального касательного напряжения с ассоциированным законом течения. На фиг. 3 цифрой 2 отмечен контур  $W = \text{const}$ , построенный по зависимости (5) с теми же характеристиками (3). В колонках  $\eta_2$  и  $\zeta_2$  табл. 1 показаны расчетные значения скоростей деформаций ползучести, полученные по этим зависимостям.

Примером уравнения ползучести, аргументами в которое входят второй и третий инварианты девиатора напряжений, можно привести

$$(6) \quad W = B [(1 + a \sin 3\xi) \sigma_i]^n,$$

$$\eta_{ij} = k_3 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_3 = (1 + a \sin 3\xi) \sigma_i,$$

где

$$\sin 3\xi = -\frac{9}{2} \frac{\sigma_{hl}^0 \sigma_{ln}^0 \sigma_{nh}^0}{\sigma_3^3},$$

$$B = \frac{i}{2^n} (B_1^{1/n} + B_2^{1/n})^n; \quad a = \frac{B_2^{1/n} - B_1^{1/n}}{B_2^{1/n} + B_1^{1/n}}.$$

В пространстве главных напряжений поверхность  $W = \text{const}$  в соответствии с зависимостью (6) представляет собой некруговой цилиндр с осью, совпадающей с гидростатической; вектор скоростей деформаций ортогонален к поверхности  $W = \text{const}$ . С уменьшением разницы между  $B_1$  и  $B_2$  зависимость (6) переходит опять же в критерий Мизеса. На фиг. 3 цифрой 3 отмечен контур  $W = \text{const}$ , построенный по зависимости (6) с характеристиками (3), расчетные значения скоростей деформаций по этим зависимостям представлены в колонках  $\eta_3$  и  $\xi_3$  табл. 1.

Примером кусочно-линейной функции определяющего уравнения, являющейся естественным обобщением критерия максимального касательного напряжения, будет зависимость

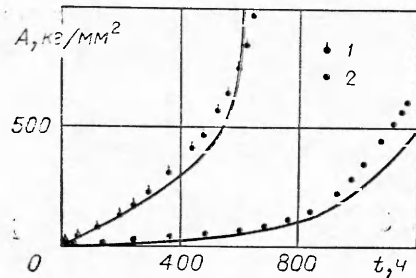
$$(7) \quad W = B_1 [\sigma_1 - (1 - \lambda)\sigma_2 - \lambda\sigma_3]^n, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

$$\eta_j = k_4 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_j}, \quad \sigma_3 = \sigma_1 - (1 - \lambda)\sigma_2 - \lambda\sigma_3, \quad \lambda = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{1/n}.$$

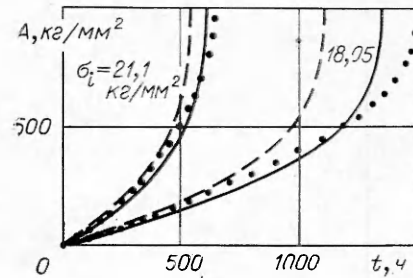
В пространстве главных напряжений поверхность  $W = \text{const}$  в этом случае представляет собой неправильную призму. При стремлении  $B_1$  к  $B_2$  критерий (7) переходит в уже упоминавшийся выше критерий максимального касательного напряжения. На фиг. 3 цифрой 4 отмечен контур  $W = \text{const}$ , соответствующий зависимости (7), расчетные значения скоростей деформаций представлены в колонках  $\eta_4$  и  $\xi_4$  табл. 1.

Из фиг. 3 табл. 1 видно, что все представленные здесь четыре типа зависимостей (4) — (7) в области напряженных состояний, соответствующих различным комбинациям растяжение (сжатие) — кручение, близки между собой и этими опытами установить преимущество какой-либо из них невозможно. Более того, зависимости (4), (6), представляющие собой обобщение критерия Мизеса за счет введения соответственно либо первого инварианта  $I_1$ , либо третьего инварианта  $S_3$ , практически дают для этой области напряженных состояний совпадающие между собой результаты. То же самое относится и к зависимостям (5), (7), обобщающим аналогичным образом критерий максимального сдвига. Существенного различия между ними следует ожидать в областях других напряженных состояний.

Представленные выше зависимости  $W = \varphi(\sigma_3)$ , описывающие установившиеся процессы ползучести, могут быть обобщены и на случай разупрочнения. Будем предполагать, как и в случае изотропной среды [19], что поврежденность материала, ведущая к его разупрочнению, находится в прямой зависимости от величины рассеянной работы необратимых де-



Ф и г. 4



Ф и г. 5

формаций  $A = \int_0^t \sigma_{ij} \eta_{ij} dt$ . Используя методы, развитые в [19], запишем любую из зависимостей (4) — (7) в виде

$$(8) \quad W = \frac{A_*^m \varphi(\sigma_3)}{(A_* - A)^m}$$

с добавлением соответствующего каждой из зависимостей (4) — (7) того же закона течения.

Так, например, применительно к зависимости (4) имеем

$$\varphi(\sigma_3) = \frac{1}{2} [B_1 (1 + I_1/\sigma_i) + B_2 (1 - I_1/\sigma_i)] \sigma_i^n.$$

В частности, для чистого растяжения и чистого сжатия получим

$$(9) \quad W = \frac{A_*^m B_1 \sigma^n}{(A_* - A)^m} \quad \text{и} \quad W = \frac{A_*^m B_2 |\sigma|^n}{(A_* - A)^m}.$$

На фиг. 4 точками 1 представлены результаты эксперимента на ползучесть до разрушения при чистом растяжении с  $\sigma = 21$  кг/мм<sup>2</sup>, из которого по методике [19] определены недостающие характеристики (в предположении, что они не зависят от вида напряженного состояния)

$$(10) \quad A_* = 10 \text{ кг/мм}^2, \quad m = 2.$$

Сплошной линией представлена расчетная диаграмма по первой из зависимостей (9), точками 2 — результаты эксперимента при чистом сжатии с перегрузками. Величины сжимающих напряжений  $\sigma$  кг/мм<sup>2</sup> и продолжительность действия  $\Delta t_{\text{ч}}$  каждого из них даны в табл. 2. Сплошной линией представлена расчетная диаграмма, полученная по второй из зависимостей (9) с теми же характеристиками (10), найденными по эксперименту на растяжение.

На фиг. 5 точками представлены результаты двух экспериментов на растяжение с кручением при  $\sigma_i = 21,1$  кг/мм<sup>2</sup> ( $\sigma = 19,49$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\tau = 4,66$  кг/мм<sup>2</sup>) и  $\sigma_i = 18,05$  кг/мм<sup>2</sup> ( $\sigma = 15,63$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\tau = 5,21$  кг/мм<sup>2</sup>). Отношения приращений деформаций ползучести сохранялись в процессе эксперимента неизменными практически до разрушения и имели значения  $\Delta \varepsilon / \Delta \gamma = 1,48$  для первого и  $\Delta \varepsilon / \Delta \gamma = 1,1$  для второго, что довольно близко к соответствующим величинам отношений  $\sigma / 3\tau$ . Сплошными и штриховыми линиями показаны расчетные диаграммы по зависимости (8) с  $\varphi(\sigma_3)$ , задаваемой соответственно зависимостями (6) и (7).

Т а б л и ц а 2

$\Delta t, \text{ч}$	184	262	226	134	63	300
$\sigma, \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	15	16,5	18	19,5	21	23,5

Из фиг. 4, 5 следует, что, как и в случае ползучести изотропных сред с учетом разупрочнения и разрушения, в средах с разными свойствами на растяжение и сжатие определяющее уравнение (8) можно записать в виде  $W = \varphi(\sigma_0)\psi(A)$ , где все различие в поведении материала отражается функцией  $\varphi(\sigma_0)$ .

Величина же  $A = \int_0^t \sigma_{ij}\eta_{ij}dt$  представляет собой изотропный параметр разупрочнения, который с достаточной для практических целей точностью можно считать не зависящим от вида напряженного состояния и определять, как и в случае изотропного материала, по экспериментам на растяжение.

Все приведенные выше зависимости (4) — (7) и соответствующие им обобщения на случай разупрочнения строились с учетом характеристик материала, найденных только из экспериментов на чистое растяжение и чистое сжатие. Видно, что эти зависимости предполагают монотонное увеличение значений  $\sigma_i$  или  $\tau_m$  при изменении напряженного состояния от чистого растяжения к кручению и далее к сжатию вдоль контура  $W = \text{const}$ . Или при  $\sigma_i = \text{const}$  интенсивность процесса на растяжение  $W^+$  будет больше, чем на кручение  $W^0$ , и больше, чем на сжатие, т. е. предполагается, что реализуется ситуация, представленная на фиг. 1 для материала ВТ-9. В действительности неравенство  $W^+ > W^0 > W^-$  имеет место далеко не всегда. Так, из фиг. 2 видно, что для материала ОТ-4 процессы ползучести при одних и тех же значениях  $\sigma_i$  на растяжение, кручение, сжатие оцениваются в виде неравенства  $W^+ = W^0 > W^-$ . Можно привести пример, когда величины процессов на сдвиг  $W^0$  выходят даже за интервал  $W^-$  и  $W^+$ , т. е. имеет место  $W^- < W^+ < W^0$  [14]. По-видимому, этот факт является специфической особенностью материалов, обладающих разными свойствами на растяжение и сжатие: сдвиговые характеристики материала следует рассматривать как независимые «паспортные данные» и строить определяющие уравнения, опираясь на три характеристики: растяжение, сжатие, сдвиг. В этом смысле приведенные выше зависимости (4) — (7) следует рассматривать как первое приближение.

Поступила 24 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никитенко А. Ф. и др. О прочностных особенностях титановых сплавов. — ПМТФ. 1976, № 6.
2. Marin J. A., Pao J. H. A theory for combined creep strainstress relations for materials with different properties in tension and compression. — In: Proceedings of the 1st U. S. Nat. Congress of Applied Mechanics, 1952.
3. Цвелодуб И. Ю. О ползучести материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19, 20. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
4. Berman I., Pai D. N. A theory of anisotropic steady-state creep. — «Intern. J. Mech. Sci», 1966, vol. 8, N 5.



5. Лебедев А. А. О критериях эквивалентности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии. — «Проблемы прочности», 1970, № 4.
6. Patel S. A., Cozzarelli F. A., Venkatraman B. Creep of compressible circular plates. — «Intern. J. Mech. Sci.», 1953, vol. 5, N 1.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
8. Никитенко А. Ф. О влиянии третьего инварианта девиатора напряжений на ползучесть неупрочняющихся материалов. — ПМТФ, 1969, № 5.
9. Соснин О. В. О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. — ПМТФ, 1970, № 5.
10. Амбарцумян С. А. Об одной модели наследственно упругого тела, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. — ПММ, 1971, т. 35, № 1.
11. Никитенко А. Ф. и др. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. — ПМТФ, 1971, № 2.
12. Murakami S., Jamada J. Effects of third invariant of deviatoric stress tensor on transient creep of thickwalled tubes. — «Trans. ASME», 1974, N 96, N 3.
13. Леллеп Я. Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала. — «Учен. зап. Тартуского ун-та», 1974, вып. 342.
14. Цвелодуб И. Ю. О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 25. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
15. Малинин Н. Н., Хажинский Г. М. Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов. — В кн.: Механ. деформ. тел и конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
16. Murakami S., Jamada J. Effects of hydrostatic pressure and material anisotropy on the transient creep of thickwalled tubes. — «Intern. J. Mech. Sci.», 1974, vol. 16, N 3.
17. Вялов С. С. Прочность и ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся сжатию и растяжению. — В кн.: Реологические вопросы мех. горн. пород. Алма-Ата, 1964.
18. Бойков В. Н., Лазаренко Э. С. Кратковременная ползучесть материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению — сжатию. — Изв. высш. учеб. заведений. Машиностроение, 1976, № 11.
19. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 1. — «Проблемы прочности», 1973, № 5.

УДК 539.214; 539.374

## О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ МОЩНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

А. Е. Алексеев

(Новосибирск)

Из экстремальных теорем идеальной жестко-пластической среды [1] следует нижняя оценка мощности поверхностных сил, основанная на использовании статически допустимого поля напряжений. Известно также, что в жестко-пластической среде с выпуклым условием пластичности поле напряжений в тех зонах, где скорости деформаций отличны от нуля, единственно [2]. В работе показано, что для класса задач, в котором функционал, соответствующий нижней оценке мощности внешних поверхностных сил, нетождественно равен постоянной на множестве статически допустимых полей напряжений, существует поле напряжений, доставляющее максимум этого функционала.

1. Пусть  $\Omega$  — область с кусочно-гладкой границей  $S$  на плоскости  $(x, y)$ ,  $\text{mes}(\Omega) < \infty$ . Поле напряжений  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$ , непрерывное и непрерывно дифференцируемое, удовлетворяющее уравнениям равновесия в  $\Omega$

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0,$$