УДК 533.72 + 517.958

А. В. Латышев, А. А. Юшканов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УМЕРЕННО СИЛЬНОМ ИСПАРЕНИИ (И КОНДЕНСАЦИИ) В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Впервые получено точное решение задачи об испарении (и конденсации) жидкости, занимающей полупространство, в вакуум. Используется одномерная модель уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук), линеаризованная относительно равновесной функции распределения вдали от поверхности раздела фаз.

История этой задачи, до сих пор не имеющей аналитического решения даже в линейной постановке и с применением одномерного БГК-уравнения, изложена в [1, 2], где были предприняты попытки точного решения задачи о так называемом «сильном» испарении жидкости в вакуум. При этом линеаризация проводилась относительно равновесной функции распределения вдали от поверхности испарения, что позволяло учесть влияние поступательного движения газа от стенки на поведение газа в слое Кнудсена в рамках линейного приближения. Скорость же истечения газа (и другие параметры) входили в функцию распределения нелинейным образом. Подобный подход можно назвать «квазилинейным». Несмотря на свою модельность, он позволяет правильно описать ряд принципиальных качественных характеристик испарения. К ним относится прежде всего выделенность числа Маха, равного единице.

В [1] для решения задачи использован метод резольвенты, в [2] — метод краевых задач, в [3] с привлечением методов функционального анализа показана разрешимость задачи в одном случае ($U < \sqrt{3/2}$) и неразрешимость в другом ($U \geqslant \sqrt{3/2}$), U — безразмерная скорость испарения. В [4] использован приближенный F_N-метод. Наконец, в [5, гл. III, § 4] эта задача изучалась в абстрактной постановке.

Рассмотрим испарение (конденсацию) жидкости с плоской поверхности $x = 0$ в вакуум, занимающий полупространство $x > 0$. Возьмем одномерное БГК-уравнение

$$\zeta \frac{\partial}{\partial x} f(x, \zeta) = \nu \left[\Phi(x, \zeta) - f(x, \zeta)\right], \tag{1}$$

где $f(x, \zeta)$ — функция распределения; ζ — молекулярная скорость в направлении x; ν — частота столкновений; $\Phi(x, \zeta)$ — локальный максвеллиан:

$$\Phi(x, \zeta) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2\pi RT(x)}} \exp\left\{-\frac{[\zeta - v(x)]^2}{2RT(x)}\right\}.$$

Здесь плотность, массовая скорость и температура определяются соответственно равенствами

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \zeta)\, d\zeta, \quad \rho(x)\, v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta f(x, \zeta)\, d\zeta,$$

$$\rho(x)\, RT(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\zeta - v(x)]^2 f(x, \zeta)\, d\zeta.$$

Предположим, что вдали от поверхности состояние пара описывается равновесным распределением, характеризуемым постоянной скоростью испарения (конденсации) v_∞, плотностью ρ_∞ и температурой T_∞, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x, \zeta) = f_\infty(\zeta) = \frac{\rho_\infty}{\sqrt{2\pi RT_\infty}} \exp\left\{-\frac{(\zeta - v_\infty)^2}{2RT_\infty}\right\}.$$

Следуя [1], линеаризуем $f(x, \zeta)$ и $\Phi(x, \zeta)$ относительно $f_\infty(\zeta)$. Вводя сдвиговую переменную $c = \zeta - v_\infty$, запишем

(2а) $$f(x, c) = f_\infty(c)\ [1 + h(x, c)],$$

где

(2б) $$f_\infty(c) = \frac{\rho_\infty}{\sqrt{2\pi RT_\infty}} \exp\left\{-\frac{c^2}{2RT_\infty}\right\}.$$

После подстановки равенства (2а) в уравнение (1) и линеаризации $\Phi(x, \zeta)$ относительно $f_\infty(\zeta)$ получим уравнение

(3) $$(\mu + U)\frac{\partial}{\partial \bar{x}} h(\bar{x}, \mu) + h(\bar{x}, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu'^2} q(\mu, \mu')\, h(\bar{x}, \mu')\, d\mu'$$

с граничными условиями

(4) $$h(0, \mu) = -2U\mu + \varepsilon_n + \varepsilon_T(\mu^2 - 1/2), \quad \mu > -U, \quad h(\infty, \mu) = 0.$$

Здесь $q(\mu, \mu') = 1 + 2\mu\mu' + 2(\mu^2 - 1/2)(\mu'^2 - 1/2)$ — ядро уравнения; $\bar{x} = \nu x(2RT_\infty)^{-1/2}$; $\mu = c(2RT_\infty)^{-1/2}$; $U = v_\infty(2RT_\infty)^{-1/2}$; ε_T и ε_n — скачок температуры и плотности; U — скорость испарения (если $U > 0$) и конденсации (если $U < 0$). Переменную $\bar{x}$ снова обозначим через x.

Анзац Кейза [6] $h(x, \mu) = \varphi(\eta, \mu) \exp(-x/(\eta + U))$ сразу сводит (3) к характеристическому уравнению

(5) $$(\eta - \mu)\, \varphi(\eta, \mu) = (\eta + U)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big\{n^{(0)}(\eta) + 2\mu n^{(1)}(\eta) + $$
$$+ 2\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)\left[n^{(2)}(\eta) - \frac{1}{2} n^{(0)}(\eta)\right]\Big\},$$

где

$$n^{(k)}(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \varphi(\eta, \mu)\, \mu^k d\mu \quad (k = 0, 1, 2).$$

Умножая уравнение (5) на $\mu^k \exp(-\mu^2)$ $(k = 0,1)$ и интегрируя по μ на $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, получим

$$n^{(1)}(\eta) = -Un^{(0)}(\eta) \text{ и } n^{(2)}(\eta) = -Un^{(1)}(\eta).$$

С помощью этих равенств уравнение (5) запишем в виде

(6) $$(\eta - \mu)\varphi(\eta, \mu) = \pi^{-1/2}(\eta + U) q(-U, \mu) n(\eta).$$

Здесь $q(-U, \mu) = 1 - 2U\mu + 2(U^2 - 1/2)(\mu^2 - 1/2)$; $n(\eta) = n^{(0)}(\eta)$. Характеристическое уравнение (6) имеет собственные функции непрерывного спектра

(7) $$\varphi(\eta, \mu) = \pi^{-1/2}(\eta + U)\, q(-U, \mu)\, P\frac{1}{\eta - \mu}\, n(\eta) + g(\eta)\, \delta(\eta - \mu),$$

где функция $g(\eta)$ определяется из условия нормировки

$$n(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} \varphi(\eta, \mu)\, d\mu;$$

символ $P\frac{1}{x}$ означает распределение — главное значение интеграла от функции $1/x$; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; η и $\mu \in \mathbf{R}$.

Подставляя (7) в последнее равенство, имеем

(8) $$g(\eta) = e^{\eta^2} \lambda(\eta)\, n(\eta).$$

Здесь

$$\lambda(z) = 1 + \pi^{-1/2}(z + U)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\frac{q(-U, \mu)}{\mu - z}\,d\mu$$

— дисперсионная функция.

С помощью принципа аргумента [7] можно показать, что дисперсионная функция $\lambda(z)$ не имеет конечных комплексных нулей. Разложим ее в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$\lambda(z) = -U\left(U^2 - \frac{3}{2}\right)z^{-3} - \frac{3}{2}\left(U^2 - \frac{1}{2}\right)z^{-4} - 3U\left(U^2 - \frac{3}{2}\right)z^{-5} + \ldots \tag{9}$$

Из разложения (9) видно, что точка $z = \infty$ является нулем 3-го порядка дисперсионной функции, если $U \neq 0$ и $U^2 \neq 3/2$, и нулем 4-го порядка, если $U = 0$ или $U^2 = 3/2$. Этой точке (как кратной точке дискретного спектра) соответствуют следующие дискретные моды:

$$h_\alpha(x, \mu) = \mu^\alpha,\ \alpha = 0,\ 1,\ 2\ (\text{если } U \neq 0 \text{ и } U^2 \neq 3/2), \tag{10}$$

$$h_3(x, \mu) = (x - U - \mu)q(-U, \mu)\ (\text{если } U = 0 \text{ или } U^2 = 3/2).$$

Имея собственные функции непрерывного спектра (7) и дискретные собственные решения (10), напишем общее решение уравнения (3) в виде интеграла по непрерывному спектру и линейной комбинации дискретных собственных решений:

$$h(x, \mu) = \sum_{\alpha=0}^{\varkappa} A_\alpha h_\alpha(x, \mu) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta, \mu)\exp[-x/(\eta + U)]\,d\eta. \tag{11}$$

Здесь $\varkappa = 2$ для $U^2 \neq 0,\ 3/2$ и $\varkappa = 3$ для $U^2 = 0, 3/2$. Константы A_α ($\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa$) и функция $n(\eta)$ являются коэффициентами разложения решения, определяемыми из граничных условий, налагаемых на $h(x,\ \mu)$.

Учитывая граничные условия (4), сведем разложение (11) к интегральному уравнению

$$h(0, \mu) = \int\limits_{-U}^{\infty} \varphi(\eta, \mu)\,d\eta, \quad \mu > -U. \tag{12}$$

Подставляя (7) в (12), придем к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$h(0, \mu) = e^{\mu^2}\lambda(\mu)\,n(\mu) + \pi^{-1/2}q(-U, \mu)\int\limits_{-U}^{\infty}\frac{(\eta + U)\,n(\eta)}{\eta - \mu}\,d\eta. \tag{13}$$

Заметим, что

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\pi^{1/2}(\mu + U)\,e^{-\mu^2}q(-U, \mu),$$

и введем функцию

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-U}^{\infty}\frac{(\eta + U)\,n(\eta)\,d\eta}{\eta - z}, \tag{14}$$

для которой на разрезе $\mathbf{R}_U = (-U,\ +\infty)$ имеем

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = (\mu + U)n(\mu),$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-U}^{\infty}\frac{(\eta + U)\,n(\eta)}{\eta - \mu}\,d\eta.$$

Умножим обе части (13) на $(\mu + U)\,e^{-\mu^2}$ и сведем это уравнение к краевой задаче Римана [7]

$$\lambda^+(\mu)N^+(\mu) - \lambda^-(\mu)N^-(\mu) = (\mu + U)\exp(-\mu^2)h(0,\ \mu),\ \mu > -U. \tag{15}$$

Умножая обе части (15) на $2\pi^{1/2}iq(-U,\ \mu)$ и пользуясь граничными значениями $\lambda(z)$ на действительной оси сверху и снизу, перейдем от задачи (15) к задаче

(16) $$\lambda^{+}(\mu)\,[2\pi^{1/2}iq(-U,\ \mu)N^{+}(\mu)-h(0,\ \mu)]=$$
$$=\lambda^{-}(\mu)\,[2\pi^{1/2}iq(-U,\ \mu)N^{-}(\mu)-h(0,\ \mu)],\quad \mu>-U.$$

Рассмотрим задачу факторизации коэффициента краевого условия (16) [7]:

(17) $$\frac{X^{+}(\mu)}{X^{-}(\mu)}=\frac{\lambda^{+}(\mu)}{\lambda^{-}(\mu)},\quad \mu>-U.$$

С помощью (17) преобразуем краевое условие (16) к задаче по нулевому скачку:

(18) $$X^{+}(\mu)\,[2\pi^{1/2}iq(-U,\ \mu)N^{+}(\mu)-h(0,\ \mu)]=$$
$$=X^{-}(\mu)\,[2\pi^{1/2}iq(-U,\ \mu)N^{-}(\mu)-h(0,\ \mu)],\quad \mu>-U.$$

Решение задачи (18) существенно зависит от решения задачи (17). Исследуем решение задачи (17) в зависимости от параметра U. Заметим, что

$$q(-U,\ -U)=2\left(U^2-\frac{1}{2}\right)^2+2U^2+1>0,\quad q(-U,0)=-\left(U^2-\frac{3}{2}\right).$$

Функция $q(-U,\ \mu)$ имеет два действительных корня:

$$\mu_{1,2}=\frac{U\pm\sqrt{D(U)}}{2\left(U^2-\frac{1}{2}\right)}.$$

Здесь $D(U)=2[(U^2-3/4)^2+3/16]>0$. Заметим также, что

$$\lambda^{+}(\mu)=\lambda(\mu)+\pi^{1/2}i(\mu+U)q(-U,\ \mu)\exp(-\mu^2).$$

1. Пусть $U\geqslant\sqrt{3/2}$. Тогда $\lambda(\mu)<0$ при $\mu\to\infty$. Нетрудно видеть, что $[\theta(\mu)]_{\mathbf{R}_U}=3\pi$, где $\theta(\mu)=\arg\lambda^{+}(\mu)$, а выражение $[\theta(\mu)]_{\mathbf{R}_U}$ означает приращение функции $\theta(\mu)$ при изменении μ от $-U$ до $+\infty$. Ограниченное в точке $z=-U$ решение задачи (17) дается формулой [7]

$$X(z)=(z+U)^{-3}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-U}^{\infty}[\theta(\tau)-3\pi]\frac{d\tau}{\tau-z}\right\}.$$

Теперь видно, что задача (18) имеет лишь тривиальное решение

$$2\pi^{1/2}iN(z)=h(0,\ z)/q(-U,\ z),$$

которое, однако, нельзя принять в качестве функции $N(z)$, определенной равенством (14), ибо эта функция ограничена на бесконечности, в то время как функция, определенная равенством (14), на бесконечности исчезает.

2. Пусть $0\leqslant U\leqslant\sqrt{3/2}$. Здесь $\lambda(\mu)>0$ при $\mu\to\infty$. Можно показать, что $[\theta(\mu)]_{\mathbf{R}_U}=2\pi$. Решение задачи (17), ограниченное в точке $z=-U$, дается формулой [7]

$$X(z)=(z+U)^{-2}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-U}^{\infty}[\theta(\tau)-2\pi]\frac{d\tau}{\tau-z}\right\}.$$

Теперь общее решение задачи (18) имеет вид

(19) $$2\pi^{1/2}iN(z)=(h(0,\ z)+c_0/X(z))/q(-U,\ z)$$

(c_0 — произвольная постоянная). Решение (19) представляет мероморфную функцию, ибо у функции $q(-U,\ z)$ есть два действительных нуля μ_1

и μ_2. Полюсы в этих точках у функции $N(z)$ уничтожим условиями

$$h(0,\mu_\alpha) + c_0/X(\mu_\alpha) = 0, \ \alpha = 1{,}2. \tag{20}$$

Условие исчезновения функции $N(z)$ в бесконечности достигается условием

$$c_0 = -\varepsilon_T, \tag{21}$$

которое вытекает из разложения в ряд Лорана по отрицательным степеням z правой части равенства (13).

Заметим, что так как функция $N(z)$ определена в комплексной плоскости, то у ее предельных значений $N^{\pm}(\mu)$ сверху и снизу в точках μ_1 и μ_2 также существуют простые полюсы. Чтобы их уничтожить, нужно потребовать выполнение еще четырех равенств:

$$h(0, \ \mu_\alpha) + c_0/X^{\pm}(\mu_\alpha) = 0, \ \alpha = 1, \ 2. \tag{22}$$

Покажем, что они совпадают с равенствами (20), т. е. выполняются автоматически. Приведем без вывода интегральное представление для функции $X(z)$:

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-U}^{\infty} e^{-\mu^2} \gamma(\mu) \frac{q(-U, \mu)}{\mu - z} d\mu, \tag{23}$$

где $\gamma(\mu) = (\mu + U)X^+(\mu)/\lambda^+(\mu)$. Из (23) видно, что так как плотность этого интеграла в точках μ_1 и μ_2 обращается в нуль, то граничные значения этого интеграла сверху и снизу в точках μ_1 и μ_2 совпадают со значениями особого интеграла в этих точках. Таким образом, $X^{\pm}(\mu_\alpha) = X(\mu_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Итак, равенства (22) выполняются автоматически.

Из уравнений (20) и (21) находим искомые величины скачка температуры и скачка плотности как функции скорости испарения U:

$$\varepsilon_T = 2U \frac{(\mu_1 - \mu_2) X(\mu_1) X(\mu_2)}{(\mu_1^2 - \mu_2^2) X(\mu_1) X(\mu_2) + X(\mu_1) - X(\mu_2)},$$

$$\varepsilon_\rho = 2U\mu_1 - \left(\mu_1^2 - 1/2 - 1/X(\mu_1)\right) \varepsilon_T.$$

Рассмотрим различные случаи конденсации.

1. Пусть $-\sqrt{3/2} < U < 0$. Тогда $\lambda(\mu) < 0$ при $\mu \to \infty$. Анализ показывает, что $[\theta(\mu)]_{\mathbf{R}_U} = \pi$. Поэтому в качестве решения задачи (17), также ограниченного в точке $z = -U$, возьмем функцию

$$X(z) = (z + U)^{-1} \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int\limits_{-U}^{\infty} [\theta(\tau) - \pi] \frac{d\tau}{\tau - z}\right\}.$$

Теперь общее решение задачи (18) имеет вид

$$2\pi^{1/2} i N(z) = (h(0, \ z) + (c_0 + c_1 z)/X(z))/q(-U, \ z).$$

Из условия исчезновения этого решения в бесконечности найдем $c_1 = -\varepsilon_T$, а из условия устранения полюсов в точках μ_1 и μ_2 получим $X(\mu_\alpha)h(0, \ \mu_\alpha) + c_0 + c_1\mu_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ 2$, откуда

$$c_0 = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_T \left[\mu_1 + \mu_2 - X(\mu_1)\left(\mu_1^2 - \frac{1}{2}\right) - X(\mu_2)\left(\mu_2^2 - \frac{1}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + 2U\left[\mu_1 X(\mu_1) + \mu_2 X(\mu_2)\right] - \varepsilon_n \left(X(\mu_1) + X(\mu_2)\right)\right\},$$

$$\varepsilon_T = 2Uf(\mu_1, \ \mu_2, \ U) - \varepsilon_n g(\mu_1, \ \mu_2, \ U).$$

Здесь

$$f = [\mu_1 X(\mu_1) - \mu_2 X(\mu_2)]/\varphi(\mu_1, \ \mu_2, \ U);$$
$$g = (X(\mu_1) - X(\mu_2))/\varphi(\mu_1, \ \mu_2, \ U);$$
$$\varphi = \mu_2 - \mu_1 + X(\mu_1)\left(\mu_1^2 - 1/2\right) - X(\mu_2)\left(\mu_2^2 - 1/2\right).$$

2. Пусть $U < -\sqrt{3/2}$. Тогда $q(-U,\ \mu) > 0$ при всех $\mu \geqslant -U$, а $\lambda(\mu) > 0$ при $\mu \to \infty$. Нетрудно показать, что $[\theta(\tau)]_{\mathbf{R}_U} = 0$. Поэтому ограниченным в точке $z = -U$ решением задачи (17) является функция

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-U}^{\infty}\theta(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z}\right\}.$$

Следовательно, общее решение задачи (18) имеет вид

$$2\pi^{1/2} iN(z) = [h(0,\ z) + (c_0 + c_1 z + c_2 z^2)/X(z)]/q(-U,\ z)$$

(c_0, c_1, c_2 — произвольные постоянные).

Из условия исчезновения решения в бесконечности находим $c_2 = -\varepsilon_T$, а из условия устранения полюсов — два равенства:

$$X(\mu_\alpha)\, h(0,\ \mu_\alpha) + c_0 + c_1\mu_\alpha + c_2\mu_\alpha^2 = 0, \quad \alpha = 1,\ 2,$$

откуда

$$c_1 = \varepsilon_T(\mu_1 + \mu_2) - [X(\mu_1)h(0,\ \mu_1) - X(\mu_2)h(0,\ \mu_2)]/(\mu_1 - \mu_2),$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\{-c_1(\mu_1 + \mu_2) + \varepsilon_T(\mu_1^2 + \mu_2^2) - X(\mu_1)\, h(0,\ \mu_1) - X(\mu_2)\, h(0,\ \mu_2)\}.$$

Из двух последних равенств вытекает, что для однозначного решения задачи о конденсации необходимо задавать три параметра: U, ε_T и ε_ρ.

З а м е ч а н и е. Проведенный анализ показывает, что как с физической, так и с математической точки зрения задачи испарения и конденсации несимметричны. В рассматриваемой задаче значение числа Маха, равное единице, соответствует скорости испарения (конденсации) $U = \sqrt{3/2}$. Из результатов работы следует, что эта величина оказывает решающее влияние на режимы испарения и конденсации. Установленные режимы конденсации при различных U соответствуют результатам численных расчетов, проделанных в [8].

В [9], где рассматривается частный случай данной задачи, а именно задача о конденсации, авторы, решив задачу (17) факторизации коэффициента, не смогли довести до конца ее решение.

В заключение опишем кратко математические аспекты разработанного метода для решения поставленной физической задачи, которая состоит в решении граничной задачи для модельного уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК. Искомые физические величины содержатся в граничных условиях. Разделение переменных по методу Кейза приводит к характеристическому уравнению, для которого в классе обобщенных функций находятся собственные функции. Далее доказываются существование и единственность разложения решения граничной задачи по собственным функциям непрерывного и дискретного спектров. Доказательство сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши, которое сводится к решению краевой задачи Римана на полуоси. После факторизации коэффициента краевой задачи находится ее общее решение, существенно зависящее от скорости испарения (конденсации). Искомые физические величины определяются из условий разрешимости краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Arthur M. D., Cercignani C.** Non-existence of a steady rarefied supersonic flow in a half-space // J. Appl. Math. Phys.— 1980.— V. 31, N 5.
2. **Siewert C. E., Thomas J. R.** Strong evaporation into a half-space // J. Appl. Math. Phys.— 1981.— V. 32, N 4.
3. **Loyalka S. K., Siewert C. E., Thomas J. R.** An approximate solution concerning strong evaporation into a half-space // J. Appl. Math. Phys.— 1981.— V. 32, N 6.
4. **Greenberg W., van der Mee C. V. M.** An abstract approach to evaporation models in rarefied gas dynamics // J. Appl. Math. Phys.— 1984.— V. 35, N 2.

5. **Greenberg W., van der Mee C. V. M., Protopopescu V.** Boundary value problems in abstract kinetic theory.— Basel u. a.: Birkhauser Verl., 1987.
6. **Кейз К., Цвайфель П.** Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.
7. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.
8. **Абрамов А. А., Коган М. Н.** О режиме сверхзвуковой конденсации газа // ДАН СССР.— 1984.— Т. 278, № 6.
9. **Cercignani C., Frezzotti A.** Linearized analysis of a one-speed B. G. K. model in the case of strong condensation // Bulgarian Academy of Sciences theoretical and applied mechanics.— Sofia, 1988.— V. XIX, N 3.

г. Москва *Поступила 27/VI 1991 г., в окончательном варианте — 15/I 1992 г.*

УДК 534.1./2.; 533.6.013.42

В. П. Реутов

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных изучению флаттера пластин в сверхзвуковых потоках (см., например, [1—3]). Анализ неустойчивости упругих колебаний пластин в пограничном слое существенно дозвукового течения производился для возмущений в виде гармонических бегущих волн [4, 5]. Неустойчивость периодического прогиба бесконечной цепочки пластин в турбулентном пограничном слое несжимаемого течения рассматривалась в [6].

В данной работе изучается неустойчивость изгибных колебаний ограниченных тонких пластин (панелей), находящихся под турбулентным пограничным слоем на одном уровне с жесткой плоской поверхностью. Число Маха течения предполагается малым. Рассматриваются одномодовые колебания одной прямоугольной пластинки и пары смежных пластинок с шарнирно закрепленными краями.

Задача о неустойчивости изгибных колебаний пластин в пограничных слоях представляет интерес, в частности, в связи с проблемой подавления панельного флаттера. Возникновение неустойчивости — самопроизвольного нарастания изгибных колебаний за счет энергии потока — может приводить к установлению более интенсивных вибраций поверхности, чем это имеет место при пассивном ее возбуждении турбулентными пульсациями давления [2, 7, 8]. Изучение неустойчивости «в малом» позволяет перейти в дальнейшем к рассмотрению установившихся колебаний. Анализ взаимодействия смежных пластинок может служить основой для описания колебаний в длинных цепочках пластин, моделирующих большую панельную поверхность.

1. Отклик течения на гармонические одномодовые колебания прямоугольной пластинки. Рассмотрим колебания пластинки, находящейся на одном уровне с жесткой плоской поверхностью $y = 0$, обтекаемой со стороны полупространства $y > 0$ плоскопараллельным потоком жидкости с плотностью ρ. Плотность среды в области $y < 0$ предполагается пренебрежимо малой. Профиль скорости течения $\bar{u}(y)$ совпадает с профилем продольной скорости среднего течения в турбулентном пограничном слое и выходит на постоянный уровень $\bar{u} = u_\infty$ при $y > \delta$ (δ — толщина пограничного слоя). Размеры пластинки вдоль и поперек течения (по осям x и z) соответственно L_1 и L_2. Предполагается, что изгиб пластинки поперек течения отсутствует и вытянутые вдоль течения края свободны.