

торое нарастание амплитуды коротковолновой моды, проявляющееся при больших τ на фиг. 3, б.

В заключение остановимся на вопросе о том, нельзя ли заменить реальный закон движения цилиндра (5) ступенчатым:

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Этот вопрос анализировался сравнением результатов расчетов по формулам (2), (4). Было найдено, что такая замена приводит при указанных выше значениях параметров t_1 и t_2 лишь к смещению цуга волн как единого целого по оси τ на постоянную величину, близкую к $t_1 U_0 / R$.

Поступила 9 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
2. Salvesen N. On higher-order wave theory for submerged two-dimensional bodies.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 2.
3. Букреев В. И. Волны на границе раздела двух жидкостей разной плотности, генерируемые движением кругового цилиндра и симметричного крыла.— ПМТФ, 1980, № 1.
4. Бородин Н. И., Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Вязкое затухание внутренних волн, возникающих в двухслойной жидкости при движении цилиндра и крыла.— В кн.: Математические проблемы механики сплошных сред. Вып. 54. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982.

УДК 66.071.7 : 532.59

ДИФФУЗИЯ СЛАБОРАСТВОРИМОГО ГАЗА В СТЕКАЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПЛЕНКАХ ЖИДКОСТИ

П. И. Гешев, А. М. Лапин

(Новосибирск)

Пленка жидкости, стекающая по наклонной поверхности, почти всегда покрыта волнами, которые существенно влияют на процессы межфазного переноса. Наиболее явно эффект волн проявляется при абсорбции в пленках слабо растворимых газов. Увеличение коэффициента массоотдачи за счет волн достигает 100% и более [1, 2].

Интенсификация массообмена волнами объясняется в литературе несколькими факторами: увеличением суммарной поверхности раздела фаз из-за волнообразования (не более 1% [1]); разрушением волнами инертного газового слоя, препятствующего абсорбции (но не десорбции [1]); вихревым движением в газовой и жидкой фазах [2]; наличием интенсивных конвективных потоков массы [3, 4] и, наконец, полным перемешиванием во впадинах волн [5].

Так как для слабо растворимых газов основное диффузионное сопротивление сосредоточено в жидкой фазе, процессом диффузии в газе можно пренебречь. Вплоть до чисел Рейнольдса $Re = 200-400$ в различных экспериментах по визуализации течения в пленках не обнаружено вихревого движения [6, 7], так что интенсификация обусловлена чисто волновым механизмом [1].

В данной работе в приближении тонкого пограничного слоя вблизи свободной поверхности получено точное решение задачи о диффузии к волновой пленке. Показано, что основные факторы, повышающие массообмен в случае двумерных волн, — это, во-первых, приближение поверхностной скорости жидкости на гребнях волн к фазовой скорости, приводящее к интересному явлению диффузионной независимости ячеек жидкости, разделенных гребнями, во-вторых, интенсивные поперечные пульсации скорости.

Гидродинамика волновой пленки. При наложении пульсаций расхода на пленке наблюдаются двумерные возбужденные волны [1, 8]. Из экспериментов [1, 8] следует, что в большом диапазоне расходов длина волны намного превосходит среднюю толщину пленки. При этом профиль продольной скорости хорошо аппроксимируется полиномом второй степени [6].

$$(1) \quad u(x, y, t) = \frac{3}{2} V(x, t) \left[2 \frac{y}{h(x, t)} - \left(\frac{y}{h(x, t)} \right)^2 \right],$$

где V — средняя по сечению скорость пленки; y — нормальная координата, отсчитываемая от стенки к свободной поверхности; x — продольная координата; t — время; h — мгновенная толщина пленки.

Полагая волны стационарными (т. е. $h = h(x - ct)$, c — фазовая скорость), получаем из условия постоянства расхода в системе волны соотношение $hV = hc + \text{const}$ [9]. Усредняя его по длине волны, определяем константу как $q = \langle h \rangle c$, где q — средний расход жидкости в лабораторной системе координат, $\langle h \rangle$ — средняя толщина пленки. Для средней по сечению скорости получаем

$$(2) \quad V = c - (c \langle h \rangle - q)/h.$$

При заданном расходе q толщина пленки определится из среднего по длине волны баланса силы тяжести и трения (рассчитываемого по уравнению (1)):

$$(3) \quad \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda gh d\xi = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda 3\nu \frac{V}{h} d\xi.$$

Если ввести безразмерные переменные: скорость $V' = V \langle h \rangle / q$, локальную толщину пленки $h' = h / \langle h \rangle$, число Рейнольдса $\text{Re} = q/\nu$ и фазу волны $\xi' = (x - ct)/\lambda$, то уравнение (3) примет вид

$$\frac{\langle h \rangle^3 g}{q^2} = \frac{3}{\text{Re}} \int_0^1 \frac{V'}{h'} d\xi'.$$

Из него с учетом (2) получается формула для отношения средних толщин волновой $\langle h \rangle$ и безволновой h_0 пленок при совпадающих расходах ($\text{Re} = \text{idem}$)

$$(4) \quad \frac{\langle h \rangle}{h_0} = \left(\int_0^1 \frac{c'(h' - 1) + 1}{h'^2} d\xi' \right)^{1/3},$$

где $c' = c \langle h \rangle / q$ — безразмерная фазовая скорость волны.

Безразмерная скорость жидкости на поверхности пленки дается выражением

$$w' = \frac{3}{2} V' = \frac{3}{2} \left(c' - \frac{c' - 1}{h'} \right).$$

Интегрируя уравнение неразрывности, получаем для нормальной компоненты скорости вблизи свободной поверхности

$$v = v_h - \int_h^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \cong v_h - (y - h) \frac{\partial w}{\partial x},$$

где v_h — нормальная скорость поверхности пленки: она связана с поверхностной скоростью w кинематическим условием

$$(5) \quad v_h = \partial h / \partial t + w \partial h / \partial x.$$

В дальнейшем будем использовать следующие безразмерные переменные: $w' = w \langle h \rangle / q$, $v' = v \lambda / q$, $x' = x / \lambda$, $y' = y / \langle h \rangle$, $t' = tq / \lambda \langle h \rangle$, $\varepsilon = \langle h \rangle / \lambda \ll 1$.

Диффузия в волновой пленке. Коэффициенты диффузии газов в жидкости обычно очень малы ($D \sim 10^{-10}$ м²/с). Это позволяет даже весьма длинные участки пленки рассчитывать в приближении тонкого пограничного слоя, прилегающего к свободной поверхности. В таком приближении безразмерное уравнение диффузии имеет вид

$$(6) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(v_h + (y' - y) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe} \varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

где $Pe = q/D$ — критерий Пекле; $\theta = (C - C_h)/(C_0 - C_h)$ — безразмерная концентрация; C_0 и C_h — начальная ($x = 0$) и поверхностная ($y = h$) концентрации. Здесь и в дальнейшем штрих над безразмерными величинами опускаем. Граничные и начальные условия к уравнению (6) следующие:

$$(7) \quad \theta(y = h) = 0, \quad \theta(x = 0) = \theta(y = \infty) = 1.$$

Для стационарной волны $h(x - ct)$ и $w(x - ct)$, поэтому удобно перейти к новым переменным

$$(8) \quad x, \quad \xi = x - ct, \quad z = h - y.$$

Используя условие (7) и переменные (10), уравнение (6) приведем к виду

$$w \frac{\partial \theta}{\partial x} + (w - c) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - z \frac{dw}{d\xi} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Pe \varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}.$$

Предположим, что концентрация θ зависит только от одной автономной переменной $\eta = z/\delta(x, \xi)$, где δ — некая условная толщина диффузионного слоя. Уравнения для $\theta(\eta)$ и $\delta(x, \xi)$ разделяются:

$$(9) \quad \begin{aligned} -2\eta d\theta/d\eta &= d^2\theta/d\eta^2; \\ w \frac{\partial \delta^2}{\partial x} + (w - c) \frac{\partial \delta^2}{\partial \xi} + 2 \frac{dw}{d\xi} \delta^2 &= \frac{4}{Pe \varepsilon}. \end{aligned}$$

Решение для θ , удовлетворяющее граничным условиям (7), записывается в виде

$$(10) \quad \theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Величину δ^2 определим методом характеристик. В плоскости x, ξ из характеристического уравнения

$$dx/d\xi = w/(w - c)$$

находим семейство кривых

$$(11) \quad x = \gamma + \int_0^\xi \frac{w}{w - c} d\xi,$$

зависящих от параметра γ . Вдоль кривой (11) первый член в уравнении (9) принимает вид $(w - c) \frac{dx}{d\xi} \frac{\partial \delta^2}{\partial x}$. После умножения всех членов в уравнении (9) на $(w - c)$ левая часть преобразуется к полной производной по ξ . Интегрируя по ξ , получаем

$$(12) \quad (w - c)^2 \delta^2 = \frac{4}{Pe \varepsilon} \int_0^\xi (w - c) d\xi + A(\gamma).$$

Константа интегрирования A зависит от параметра γ , определяющего характеристическую кривую (11). Эта зависимость получается в параметрическом виде из (11), (12) при учете начального условия $\delta(x = 0) = 0$:

$$(13) \quad A(\gamma) = \frac{4}{Pe \varepsilon} \int_0^\xi (c - w) d\xi;$$

$$(14) \quad \gamma = f(\xi) = \int_0^\xi \frac{w}{c - w} d\xi.$$

Функция $f(\xi)$ определяется интегралом (14) и является монотонной при условии $c > w > 0$; введем обратную к ней функцию $\xi = p(\gamma) = f^{-1}(\gamma)$. Подставим $p(\gamma)$ в верхний предел интеграла (13) и введем (13) в уравнение (12); определяя γ из уравнения (11), после очевидных преобразований можем записать

$$(15) \quad \delta^2 = \frac{4}{\text{Re } \varepsilon (c-w)^2} \int_{\xi}^{p(x+f(\xi))} (c-w) d\xi.$$

Выражение для безразмерного локального потока массы следует из полученных решений (10), (15):

$$(16) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta} = (c-w) \left[\frac{\pi}{\text{Re } \varepsilon} \int_{\xi}^{p(x+f(\xi))} (c-w) d\xi \right]^{-1/2}.$$

Интегрируя (16) по x и осредняя по ξ от 0 до 1, можно получить интегральный поток массы, который обычно контролируется в экспериментах по разности расходных концентраций на входе и выходе пленки [1]. Однако интегрирование по x можно избежать, если учесть, что уравнение (9) может быть записано в виде

$$(17) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi} \varepsilon \delta} - \frac{\text{Pe}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (w\delta) + \frac{\partial}{\partial \xi} [(w-c)\delta] \right\}.$$

После интегрирования уравнения (17) по x и осреднения по ξ получаем безразмерный полный поток массы, известный в литературе как критерий Шервуда [1]:

$$\text{Sh} = \int_0^x dx \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{\pi} \varepsilon \delta} d\xi = \frac{\text{Pe}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 w \delta d\xi.$$

Влияние волн на массоотдачу естественно оценивать отношением полных потоков массы на волновой и безволновой пленках:

$$(18) \quad \frac{\text{Sh}}{\text{Sh}_0} = \left(\frac{3 \langle h \rangle}{2h_0} x \right)^{-1/2} \int_0^1 \left[\int_{\xi}^{p(x+f(\xi))} (c-w) d\xi \right]^{1/2} \frac{w d\xi}{c-w}.$$

Из уравнения (18) можно получить некоторые общие результаты, не связанные с конкретным видом функции $w(\xi)$. Оказывается, в равностоящих друг от друга точках $x_n = nf(1)$ ($n = 1, 2, \dots$), отношение (18) принимает одинаковые значения. Действительно, в этих точках верхний предел интеграла в (18) равен: $p(nf(1) + f(\xi)) = p(f(n + \xi)) = n + \xi$. Внутренний интеграл в (18) вычисляется как $n \int_0^1 (c-w) d\xi$, а внешний выражается через $f(1)$; в результате имеем

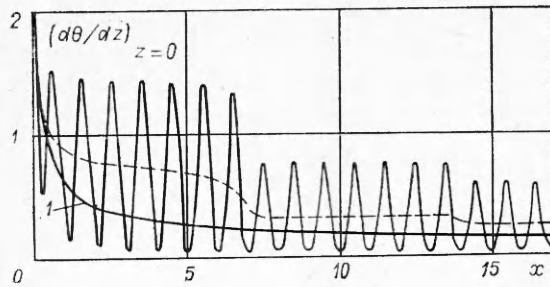
$$(19) \quad \left(\frac{\text{Sh}}{\text{Sh}_0} \right)_{\max} = \left[\frac{2h_0}{3 \langle h \rangle} f(1) \int_0^1 (c-w) d\xi \right]^{1/2}.$$

Можно доказать, что формулой (19) определяются максимумы отношения Sh/Sh_0 .

Обратим внимание, что отношение (19) становится сколь угодно большим при достижении функцией $w(\xi)$ в некоторой точке величины фазовой скорости c . При этом функция $f(1)$, входящая в (19), обращается в бесконечность согласно формуле (14).

При малых x верхний предел во внутреннем интеграле (18) разлагаем в ряд Тейлора и, ограничиваясь двумя членами, имеем при $x \rightarrow 0$ $p(x + f(\xi)) \cong \xi + x/f'(\xi) = \xi + (c-w)x/w$, что дает

$$(20) \quad \left(\frac{\text{Sh}}{\text{Sh}_0} \right)_{x=0} = \left(\frac{2h_0}{3 \langle h \rangle} \right)^{1/2} \int_0^1 w^{1/2} d\xi.$$



Ф и г. 1

Из последнего выражения могут получаться значения несколько меньше единицы.

Расчет для гармонической волны. Качественная интерпретация результатов. Далее всюду полагаем $h = 1 + a \cos 2\pi\xi$, где a — относительная амплитуда волны. Интеграл в формуле (4) вычисляется методом дифференцирования по параметру, в результате получаем

$$\langle h \rangle / h_0 = (1 - ca^2)^{1/3} / (1 - a^2)^{1/2}.$$

Аналогично вычисляются и другие интегралы

$$f(1) = \frac{6(c-1)}{\sqrt{(2c-3)^2 - c^2a^2}} - 3, \quad \int_0^1 (c-w) d\xi = \frac{3(c-1)}{2\sqrt{1-a^2}} - \frac{c}{2},$$

входящие в уравнение (19). Формула (20) выражается сложным образом через эллиптические интегралы и здесь не приводится.

Функция f и обратная к ней p являются монотонно возрастающими и проходящими через начало координат. Интеграл, определяющий $f(\xi)$ согласно (14), и все остальные интегралы в (16), (18) вычислялись по методу Симпсона.

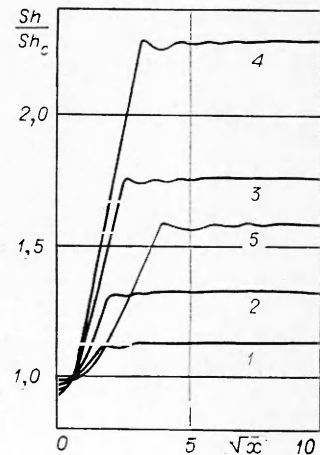
На фиг. 1 в произвольном по вертикали масштабе построен мгновенный во времени локальный поток массы на поверхность пленки, рассчитанный при $c = 2$ и $a = 0,4$ по уравнению (16). Там же нанесена кривая 1, относящаяся к безволновому случаю ($a = 0$). Выбран такой момент времени, когда гребни волн расположены в точках с целыми значениями координаты x . Видно, что минимумы локального потока массы достигаются именно вблизи этих точек, а максимумы расположены во впадинах волн. Наблюдается некоторое смещение экстремальных точек в положительном направлении вблизи начала координат.

На фиг. 2 показана зависимость от \sqrt{x} отношения Sh/Sh_0 , рассчитанного по формуле (18): кривые 1—4 вычислены при $c = 2$ и $a = 0,2; 0,3; 0,4; 0,45$ соответственно, кривая 5 — при $c = 1,7$ и $a = 0,2$. Высота максимумов в точности соответствует формуле (19), и расположены они в точках $x_n = nf(1)$. Именно в этих точках происходит резкое уменьшение уровня пульсаций локального потока массы на фиг. 1.

Качественное объяснение такого поведения рассчитанных кривых следующее. Перейдем в систему волны, где поверхностная скорость равна $c - w$ и направлена в сторону отрицательных x . Линии тока сильно сжимаются во впадинах и расширяются на гребнях волн. В местах подтекания жидкости к свободной поверхности толщина диффузионного слоя δ уменьшается и локальный поток здесь максимален. Это и объясняет указанное положительное смещение экстремумов на фиг. 1 при малых x , когда диффузия в системе волны еще не установилась и сказывается начальное условие.

Время переноса какого-либо участка жидкости вдоль поверхности на одну длину волны определяется, очевидно, интегралом

$$\int_0^1 d\xi / (c - w).$$



Ф и г. 2

новой ячейкой, то именно в этот момент во впадину приходит из соседней впадины жидкость с повышенной концентрацией, что должно привести к резкому падению локального потока массы (см. фиг. 1). Впервые это происходит на расстоянии, определяемом формулой

$$(21) \quad c \int_0^1 \frac{d\xi}{c-w} - 1 = \int_0^1 \frac{w d\xi}{c-w} = x_1.$$

Единица в последнем выражении вычитается вследствие того, что за время дрейфа из ячейки в ячейку происходит смещение на одну длину волны в отрицательную сторону. Чем больше время дрейфа, тем длиннее по x участок с установившимся в ячейках процессом диффузии (линейные участки роста на фиг. 2). Если где-то на поверхности достигается максимальное значение $w = c$, то интеграл в (21) расходится ($x_1 \rightarrow \infty$) и вся пленка будет состоять из ячеек, разделенных гребнями волн и не зависящих друг от друга в диффузионном отношении. Интегральный поток массы при этом будет, очевидно, пропорционален x в отличие от корневого закона для безволновой пленки ($Sh_0 \sim \sqrt{x}$). Высокие значения отношения Sh/Sh_0 получаются и для волн малой амплитуды, но близкой к критическому значению $a_* = 2 - 3/c$, получаемому из условия $w = c$ (например, кривая 5 на фиг. 2). Однако интенсивность массоотдачи для малых амплитуд меньше, чем для больших (малый наклон линейного участка кривой 5 на фиг. 2).

Осредненный по времени локальный поток будет иметь почти ступенчатый вид (штриховая линия на фиг. 1), а интегральный поток, следовательно, будет почти кусочно-линейным с изломами в точках $x_n = nf(1)$: в системе волны этим точкам соответствуют последовательные моменты времени, когда во впадину приходят участки жидкости, находившиеся при $t = 0$ во впадинах все более и более удаленных ячеек. Кусочно-линейный характер функции $Sh(x)$ объясняет особенности поведения кривых на фиг. 2 (линейный от \sqrt{x} рост отношения Sh/Sh_0 на начальном участке, осцилляции и асимптотику).

Таким образом, интенсификация массоотдачи на волновой пленке определяется двумя основными факторами: величиной амплитуды и близостью скорости жидкости на гребнях к фазовой скорости волн. С ростом амплитуды увеличиваются поперечные пульсации скорости, приводящие к уменьшению толщины диффузионного слоя во впадинах и резкому увеличению локального потока массы на этих участках. При заданной амплитуде уменьшение фазовой скорости приводит к понижению критического значения a_* и при некотором $c = c_*$ будет достигнуто $a = a_*$, на гребнях жидкость догонит волну и ячейки станут диффузионно-независимыми. На больших расстояниях отношение Sh/Sh_0 может в этом случае стать сколь угодно большим.

Сделанные выводы, очевидно, справедливы для любых двумерных волн, в частности для так называемых катящихся волн большой амплитуды, у которых на гребнях как раз наблюдаются скорости $w \approx c$ [6]. Разрушение катящихся волн и переход их в трехмерные нестационарные образования должны существенно понизить массоотдачу, так как устраняется изолированность волновых ячеек. Это и наблюдалось в экспериментах по искусственному разрушению двумерных волн [1].

Авторы признательны О. Ю. Цвелодубу за плодотворные дискуссии и указание способа вычисления средней толщины волновой пленки.

Поступила 29 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Десорбция слабо растворимого газа из стекающих волновых пленок жидкости. — В кн.: Расчет тепло-массообмена в энергохимических процессах/Под ред. А. П. Бурдукова. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.

2. Seban R. A. Transport to falling films.— In: Proc. of 6th Int. Heat Transfer Conf. Vol. 6. Ottawa, 1979.
3. Багаева С. Д., Семенов П. А., Галиуллин М. Ф. Диффузия при волновом движении тонкого слоя жидкости.— ТОХТ, 1973, т. 7, № 4.
4. Семенова И. П. Интенсификация массообмена волнами на поверхности раздела фаз при раздельном течении газожидкостной смеси. М.: изд. НИИ мех. МГУ, 1978.
5. Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. и др. О массообмене в пленке жидкости при волнообразовании.— ТОХТ, 1967, т. 1, № 1.
6. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. и др. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— ИФЖ, 1977, т. 33, № 3.
7. Ho F., Hummel R. Average velocity distributions within falling liquid films.— CES, 1970, vol. 25, p. 1225.
8. Алексеев С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт 36—79. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
9. Каница П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 3.

УДК 532.516

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНКИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

В. И. Елисеев

(Днепропетровск)

Одним из основных допущений при изучении устойчивости вязких слоев жидкости является параллельность основного движения. Это относится как к пограничным слоям [1, 2], так и к тонким слоям жидкости [2—4]. Такое предположение дает возможность в уравнениях возмущенного движения параметры основного течения принимать зависящими только от поперечной координаты. В настоящее время при исследовании устойчивости уделяется внимание учету пространственности течения. Это в первую очередь относится к пограничным слоям [5], где основное течение слабо зависит от продольной координаты (для плоской пластины параметры зависят от $Re^{-1/2}x^{1/2}$). Для пленки на вращающемся диске скорость зависит от $x^{1/3}$. Хотя степень при x меньше, чем в случае пограничного слоя, но здесь нет малого параметра $Re^{-1/2}$, поэтому эта зависимость должна проявляться сильнее. В данной работе проводится анализ пространственной устойчивости в рамках линейной теории. В основу решения положен асимптотический метод, разработанный в [6].

Выпишем основные уравнения в цилиндрической системе координат [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial p}{\rho \partial r} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + v\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \nu(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Здесь r лежит в радиальной плоскости; z перпендикулярна ей; u — радиальная, v — осевая, w — тангенциальная составляющие скорости; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости; ρ — плотность. В этих уравнениях отброшены члены, зависящие от угла θ , так как в дальнейшем будем считать, что ни основное, ни возмущенное течения не зависят от него.

Граничными условиями для выписанных уравнений являются условия на диске и на свободной поверхности

$$w = \Omega r, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (z = 0),$$

$$v = \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial r} \quad (z = a),$$

$$p_{n\tau} = 0, \quad p_{nn} = -p_a + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right),$$