УДК 539.3

В. В. Алёхин

ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОИСТОГО СФЕРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЕ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Задачи синтеза слоистых тел — одно из перспективных направлений в области структурной оптимизации. Им посвящен ряд работ [1—4], касающихся вопросов проектирования слоистых теплозащитных панелей, многослойных волновых фильтров, упругих слоистых тел. В задачах синтеза слоистых конструкций в качестве управляющих параметров выбираются структура конструкции и ее геометрические размеры. Управлением, характеризующим структуру слоистых тел, является кусочно-постоянная функция с дискретной областью значений. Поэтому при выводе управляющих уравнений, построении численных алгоритмов необходимо использовать методы теории оптимального управления. Структура и размеры слоистой конструкции полностью определяются в процессе оптимизации, хотя заранее количество, размеры и материалы слоев не известны.

В настоящей работе рассматривается задача синтеза из конечного набора упругих однородных изотропных материалов многослойного сферического включения минимального веса, находящегося в матрице, растягиваемой на бесконечности равномерным одноосным усилием, при заданных ограничениях на прочность включения и его размеры. Получены необходимые условия оптимальности, построен вычислительный алгоритм и приведен пример расчета оптимального включения.

1. Постановка задачи. Пусть имеется набор W, состоящий из k однородных изотропных материалов. Из него требуется синтезировать слоистое сферическое включение минимального веса.

Пусть R_1, R_2 — радиусы внутренней и внешней поверхностей рассматриваемого включения (см. рисунок), которое находится в матрице, растягиваемой на бесконечности равномерным одноосным усилием q. На границе R_1 включения считаем известным давление p. Напряженно-деформированное состояние многослойного включения и матрицы в случае осевой симметрии описываются краевой задачей, включающей в себя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\,\mathrm{ctg}\,\theta) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}[3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\,\mathrm{ctg}\,\theta] = 0;$$

соотношения закона Гука

$$\sigma_{ij} = 2G\left[\frac{\nu}{1-\nu}(e_{kl}\delta_{kl})\,\delta_{ij} + e_{ij}\right], \tag{1.2}$$

где ненулевые компоненты тензора деформации в сферической системе координат (r, θ, φ) имеют вид

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \tag{1.3}$$

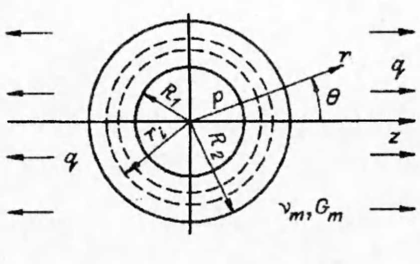
$$e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\,\mathrm{ctg}\,\theta, \quad 2e_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r},$$

и краевые условия

$$\sigma_{rr}(R_1, \theta) = -p, \quad \sigma_{r\theta}(R_1, \theta) = 0, \tag{1.4}$$

$$\sigma_{rr}(\infty, \theta) = q\cos^2\theta, \quad \sigma_{r\theta}(\infty, \theta) = -q\cos\theta\cdot\sin\theta.$$

Здесь $u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, \theta)$ — радиальное и меридиональное смещения точек тела; $G(r)$, $\nu(r)$ — распределенные характеристики среды: модули сдвига и коэффициенты Пуассона материалов слоев включения и матрицы.



На внутренних границах $r_i \in (R_1, R_2]$ слоев включения и самой границе включение — матрица, где терпят разрыв свойства среды, необходимо задавать условия сопряжения: непрерывность смещений u_r, u_θ и напряжений σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, т. е.

$$(1.5) \qquad [u_r(r_i, \theta)] = [u_\theta(r_i, \theta)] = [\sigma_{rr}(r_i, \theta)] = [\sigma_{r\theta}(r_i, \theta)] = 0.$$

Пусть σ, L, ρ_* — характерные величины, имеющие размерность напряжения, длины и плотности. Введем новые безразмерные переменные (в дальнейшем звездочка у безразмерных величин опущена)

$$(1.6) \qquad u_i^* = u_i/L, \quad R_i^* = R_i/L, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/\sigma, \quad \sigma_{\text{т}}^* = \sigma_{\text{т}}/\sigma,$$
$$G^* = G/\sigma, \quad p^* = p/\sigma, \quad q^* = q/\sigma, \quad \rho^* = \rho/\rho_*$$

($\sigma_{\text{т}}$, ρ — пределы прочности и плотности материалов из множества W). Сделаем замену координат

$$(1.7) \qquad r = R_1 + x(R_2 - R_1), \quad x \in [0, 1],$$

переводящую переменную область задания $[R_1, R_2]$ в постоянную $[0, 1]$. Введем кусочно-постоянную функцию

$$(1.8) \qquad \alpha(x) = \{\alpha_j;\ x \in [x_j, x_{j+1}),\ j = 1, ..., n\}, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1,$$

характеризующую структуру многослойного включения: количество, размеры и материалы составляющих его слоев. Значения α_j принадлежат дискретному конечному множеству

$$(1.9) \qquad U = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\},$$

соответствующему заданному набору материалов W. Теперь все характеристики материалов из множества W будут функциями распределения $\alpha(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Удобно в качестве множества U задавать набор целых чисел $U = \{1, ..., k\}$. Тогда запись $\alpha(x) = i$, $x \in [x_j, x_{j+1})$ означает, что j-й сферический слой включения состоит из i-го материала множества W.

Так как структура слоистого включения определяется функцией $\alpha(x)$, а геометрия — его размерами R_1 и R_2, в качестве управления рассмотрим пару $\{\alpha(x), R_1\}$ (для определенности внешний радиус R_2 считаем фиксированным), где $\alpha(x) \in U$ (1.9) и

$$(1.10) \qquad R_1 \in [a, b]$$

(a, b — заданные пределы, в которых может варьироваться толщина рассматриваемого включения).

Задача оптимального проектирования заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций $\alpha(x)$ (1.8), область значений которых принадлежит множеству U (1.9), и параметров R_1 из отрезка $[a, b]$ (1.10) требуется найти управление $\{\alpha(x), R_1\}$, доставляющее минимум функционалу веса

$$(1.11) \qquad F[\alpha, R_1] = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho(\alpha) r^2 dr = \int_0^1 \Phi(x, \alpha, R_1)\, dx,$$

при заданном ограничении на прочность

$$(1.12) \qquad \eta(x, \theta, u_r, u_\theta, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \alpha, R_1) \leqslant 0.$$

В качестве ограничения (1.12) рассмотрим условие текучести Мизеса

$$(1.13) \qquad \eta = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + 6\sigma_{r\theta}^2 - 2\sigma_{\text{т}}^2 \leqslant 0.$$

Заметим, что неравенство (1.13) можно записать в терминах u_r, u_θ, σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, используя соотношения закона Гука (1.2).

2. Необходимые условия оптимальности. Для их вывода в задаче (1.1)—(1.13) требуется построить выражения для вариаций целевого функционала

(1.11) и ограничения (1.13) через вариации управления $\{\alpha(x), R_1\}$. С этой целью преобразуем краевую задачу (1.1)—(1.5). В [5] приведено решение задачи (1.1)—(1.4) для произвольного однородного сферического слоя и для матрицы, подвергаемой одноосному растяжению на бесконечности усилием q.

В слое и матрице решение имеет вид

$$u_r(r, \theta) = u_{r1}(r) + u_{r2}(r)\cos 2\theta, \quad u_\theta(r, \theta) = u_{\theta 1}(r)\sin 2\theta,$$
$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \sigma_{r1}(r) + \sigma_{r2}(r)\cos 2\theta, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \tau(r)\sin 2\theta. \tag{2.1}$$

Напряженно-деформированное состояние матрицы без включения, удовлетворяющее условиям (1.4) на бесконечности, описывается формулами

$$u_{r1} = -\frac{A_1}{r^2} - \frac{3A_2}{r^4} + \frac{5 - 4\nu_m}{3(1 - 2\nu_m)}\frac{A_3}{r^2} + \frac{q(1 - \nu_m)}{4G_m(1 + \nu_m)}r, \tag{2.2}$$
$$u_{r2} = -\frac{9A_2}{r^4} + \frac{5 - 4\nu_m}{1 - 2\nu_m}\frac{A_3}{r^2} + \frac{q}{4G_m}r,$$
$$u_{\theta 1} = -\frac{6A_2}{r^4} - \frac{2A_3}{r^2} - \frac{q}{4G_m}r,$$
$$\sigma_{r1} = 4G_m\left[\frac{A_1}{r^3} + \frac{6A_2}{r^5} - \frac{5 - \nu_m}{3(1 - 2\nu_m)}\frac{A_3}{r^3}\right] + \frac{q}{2},$$
$$\sigma_{r2} = 4G_m\left[\frac{18A_2}{r^5} - \frac{5 - \nu_m}{1 - 2\nu_m}\frac{A_3}{r^3}\right] + \frac{q}{2},$$
$$\tau = 4G_m\left[\frac{12A_2}{r^5} - \frac{1 + \nu_m}{1 - 2\nu_m}\frac{A_3}{r^3}\right] - \frac{q}{2}$$

(G_m, ν_m — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала матрицы).

Условия сопряжения (1.5) и соотношения (1.7), (2.1) позволяют ввести непрерывные на отрезке [0, 1] фазовые переменные

$$\mathbf{z}(x) = (u_{r1}, u_{r2}, u_{\theta 1}, \sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \tau)^{\mathrm{T}}. \tag{2.3}$$

Теперь исходную краевую задачу (1.1)—(1.4), используя решение (2.2) для матрицы, можно представить в виде краевой задачи относительно неизвестных $\mathbf{z}(x)$ (2.3) только для сферического включения:

$$\mathbf{z}'(x) = A(x, \alpha, R_1)\,\mathbf{z}(x), \quad z_4(0) = -p, \quad z_5(0) = z_6(0) = 0,$$
$$\mathbf{z}_f(1) = B(\nu_m, G_m, R_2)\,\mathbf{z}_l(1) + \mathbf{c}(\nu_m, G_m, R_2, q), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{z}_f(x) = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{z}_l(x) = (z_4, z_5, z_6)^{\mathrm{T}}$, а ненулевые элементы a_{ij}, b_{ij}, c_i матриц $A(x, \alpha, R_1)$, $B(\nu_m, G_m, R_2)$ и вектора $\mathbf{c}(\nu_m, G_m, R_2, q)$ имеют вид

$$a_{11} = 2a_{13} = a_{22} = \frac{2}{3}a_{23} = -a_{65} = \frac{2\nu(R_2 - R_1)}{r(\nu - 1)},$$
$$a_{14} = a_{25} = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)}(R_2 - R_1), \quad \frac{1}{2}a_{32} = a_{33} = -a_{46} = -\frac{1}{3}a_{56} = -\frac{1}{3}a_{66} = \frac{R_2 - R_1}{r},$$
$$a_{36} = \frac{R_2 - R_1}{G}, \quad a_{41} = 2a_{43} = a_{52} = \frac{2}{3}a_{53} = a_{62} = 4G\frac{1 + \nu}{1 - \nu}\frac{R_2 - R_1}{r^2},$$
$$a_{44} = a_{55} = \frac{(2 - 4\nu)(R_2 - R_1)}{r(\nu - 1)}, \quad a_{63} = 2G\frac{(5 + \nu)(R_2 - R_1)}{r^2(1 - \nu)},$$
$$d = \frac{R_2}{8G_m(7 - 5\nu_m)}, \quad b_{11} = -\frac{R_2}{4G_m}, \quad b_{12} = d(3\nu_m - 1), \quad b_{13} = d(5 - 7\nu_m),$$
$$b_{22} = d(19\nu_m - 17), \quad b_{23} = d(15 - 21\nu_m), \quad b_{32} = d(10 - 14\nu_m),$$
$$b_{33} = d(26\nu_m - 22), \quad c_1 = \frac{24qd(1 - \nu_m)}{1 + \nu_m}, \quad c_2 = -c_3 = 30qd(1 - \nu_m).$$

Локальное ограничение (1.13) заменим на эквивалентное интегральное ограничение

$$(2.5)\quad F_1\,[z,\alpha,R_1]=\frac{1}{2}\int_V \{\eta(\ldots)+|\eta(\ldots)|\}\,dV=\int_0^1 \Phi_1(x,z,\alpha,R_1)\,dx=0.$$

Здесь V — объем сферического включения, а функция $\Phi_1(\ldots)$ в силу четности функции $\eta(\ldots)$ по углу θ на отрезке $[0,\pi]$ имеет вид

$$\Phi_1(\ldots)=2\pi(R_2-R_1)\,[R_1+x(R_2-R_1)]^2\int_0^{\pi/2}\{\eta(\ldots)+|\eta(\ldots)|\}\sin\theta\,d\theta.$$

Заметим, что у функционала (2.5) есть производная Фреше [6], так как подынтегральная функция $|\eta(\ldots)|$, представляющая собой модуль от условия текучести Мизеса, в слоистой сфере может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой меры, состоящем из конечного числа точек.

Пусть теперь пара $\{\alpha(x),R_1\}$ — оптимальное управление из допустимого множества (1.9), (1.10), минимизирующее функционал (1.11) и удовлетворяющее ограничению (2.5). Рассмотрим возмущенное управление $\{\alpha^*(x),R_1+\delta R_1\}$ [6]

$$(2.6)\quad \alpha^*(x)=\begin{cases} g(x), & x\in D,\ g(x)\in U,\\ \alpha(x), & x\notin D,\end{cases}$$

$$R_1+\delta R_1\in[a,b],\quad |\delta R_1|<\varepsilon$$

($D\subset[0,1]$ — множество малой меры, $\operatorname{mes}(D)<\varepsilon$, $\varepsilon>0$ — малая величина). Используя стандартную технику [6], можно получить главные части приращений функционалов (1.11), (2.5) (для краткости аргументы функций, относящиеся к невозмущенному управлению $\{\alpha(x),R_1\}$, опущены):

$$(2.7)\quad \delta F[\ldots]=\int_D\{\Phi(\alpha^*,\ldots)-\Phi(\alpha,\ldots)\}\,dx+S\delta R_1,$$

$$\delta F_1[\ldots]=\int_D\{M(\alpha^*,\ldots)-M(\alpha,\ldots)\}\,dx+S_1\delta R_1.$$

Здесь

$$M(x,z,\psi,\alpha,R_1)=\Phi_1(x,z,\alpha,R_1)+\psi^{\mathrm{T}}(x)\,A(x,\alpha,R_1)\,z(x);$$

$$S=\int_0^1\frac{\partial}{\partial R_1}\Phi(x,\alpha,R_1)\,dx;\quad S_1=\int_0^1\frac{\partial}{\partial R_1}M(x,z,\psi,\alpha,R_1)\,dx;$$

вектор сопряженных переменных $\psi(x)$ удовлетворяет краевой задаче

$$(2.8)\quad \psi'(x)=-A^{\mathrm{T}}(x,\alpha,R_1)\,\psi(x)-\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi_1(x,z,\alpha,R_1)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=\psi_3(0)=0,\quad \psi_l(1)+B^{\mathrm{T}}(\nu_m,G_m,R_2)\,\psi_f(1)=0.$$

Составим теперь расширенный функционал

(2.9)

$$J[\alpha,R_1]=F[\alpha,R_1]+\lambda_1F_1[z,\alpha,R_1]+\lambda_2\{a-R_1+\xi_1^2\}+\lambda_3\{R_1-b+\xi_2^2\}$$

(λ_i, ξ_i^2 — множители Лагранжа и штрафные переменные [7]). Вариацию функционала $J[\alpha,R_1]$ (2.9) с использованием выражений (2.7) можно представить в виде

$$(2.10)\quad \delta J[\ldots]=\int_D\{H(\alpha,\ldots)-H(\alpha^*,\ldots)\}\,dx+\{S+\lambda_1S_1-\lambda_2+\lambda_3\}\,\delta R_1+$$
$$+\,2(\lambda_1\xi_1\delta\xi_1+\lambda_2\xi_2\delta\xi_2),$$

где

$$(2.11)\quad H(x,z,\psi,\alpha,R_1)=-\Phi(x,\alpha,R_1)-\lambda_1M(x,z,\psi,\alpha,R_1).$$

Так как управление $\{\alpha(x), R_1\}$ является оптимальным (минимизирующим) управлением, для любых допустимых управлений $\{\alpha^*(x), R_1 + \delta R_1\}$ должно выполняться условие $\delta J [\dots] \geqslant 0$. Тогда из выражения (2.10) в силу произвольности вариаций δR_1, $\delta\xi_i$ получаем соотношения [7]

$$S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \tag{2.12}$$

$$\lambda_2 (a - R_1) = 0, \quad \lambda_3 (R_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0 \tag{2.13}$$

и в силу того, что множество малой меры D может быть почти всюду плотно расположено на отрезке $[0, 1]$, для почти всех $x \in [0, 1]$ должно выполняться условие максимума для функции Гамильтона $H(\dots)$ (2.11) по аргументу α [6]:

$$H(x, z, \psi, \alpha, R_1) = \max_{\alpha^* \in U} H(x, z, \psi, \alpha^*, R_1). \tag{2.14}$$

Таким образом, получаем, что оптимальное управление $\{\alpha(x), \bar{R}_1\}$ и соответствующие ему оптимальная траектория $z(x)$ и вектор сопряженных переменных $\psi(x)$ должны удовлетворять краевым задачам (2.4), (2.8), соотношениям и ограничениям (1.8)—(1.10), (2.5), (2.13) и условиям оптимальности (2.12), (2.14).

3. Вычислительный алгоритм. Основная идея прямого метода решения задач оптимального проектирования заключается в построении последовательности управлений $\{\alpha(x), R_1\}_j$, $j = 1, 2, \dots$, минимизирующей целевой функционал (1.11). Для этого введением равномерной сетки $\{x_i\}$ разобьем отрезок $[0, 1]$ на n отрезков D_i, моделирующих множества малой меры. Зададим начальное управление $\{\alpha(x), R_1\}$ из допустимой области (1.8)—(1.10), (2.5). Очевидно, что функция $\alpha(x)$ является кусочно-постоянной с участками постоянства $D_i = [x_i, x_{i+1})$, на которых она принимает значения из множества U (1.9). Следующее приближение $\{\alpha^*(x), R_1 + \delta R_1\}$ на некотором множестве D_i ищется в виде (2.6)

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \alpha_j, & x \in D_i, \quad \alpha_j \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D_i; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$R_1 + \delta R_1 \in [a, b], \quad |\delta R_1| < \varepsilon \tag{3.2}$$

и определяется из линеаризованной оптимизационной задачи: найти на множестве D_i такое допустимое возмущение $\{\alpha_j, \delta R_1\}$, которое обеспечивает максимальное убывание функционала $F[\dots]$, или, другими словами, минимум вариации $\delta F[\dots]$ (2.7) при условиях (3.1), (3.2) и линеаризованном ограничении (2.5)

$$F_1[z + \delta z, \alpha^*, R_1 + \delta R_1] \approx F_1[z, \alpha, R_1] + \delta F_1[z, \alpha, R_1] = 0, \tag{3.3}$$

где выражение для $\delta F_1[\dots]$ дается формулой (2.7). Данная линеаризованная задача представляет собой вариант задачи, рассмотренной в пп. 1, 2. Отсюда непосредственно получаем, что оптимальное возмущение $\{\alpha_j, \delta R_1\}$ должно удовлетворять соотношениям

$$\delta R_1 = -\tau \{S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \tau \geqslant 0; \tag{3.4}$$

$$\lambda_2 (a - R_1 - \delta R_1) = 0, \quad \lambda_3 (R_1 + \delta R_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0 \tag{3.5}$$

и ограничениям (3.2), (3.3).

Множители τ, λ_2, λ_3 в процессе численного счета находятся из (3.2), (3.5). Наилучшая поправка α_j (3.1) определяется следующим образом. Из соотношений (3.3), (3.4) получаем

$$\delta R_1 = -\{\int_{D_i} [M(\alpha_j, \dots) - M(\alpha, \dots)]\, dx + F_1[z, \alpha, R_1]\}/S_1. \tag{3.6}$$

Тогда поправка α_j, минимизирующая вариацию $\delta F[\dots]$ (2.7), находится из условия

$$\int_{D_i} H(x, z, \psi, \alpha_j, R_1)\, dx = \max_{\alpha_* \in U} \int_{D_i} H(x, z, \psi, \alpha_*, R_1)\, dx,$$

где

$$H(x, z, \psi, \alpha_*, R_1) = -\Phi(x, \alpha_*, R_1) + SM(x, z, \psi, \alpha_*, R_1)/S_1.$$

При $S_1 = 0$ наилучшая поправка $\{\alpha_j, \delta R_1\}$ определяется из соотношений

$$\delta R_1 = -\tau\{S - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \int\limits_{D_i} \Phi(x, \alpha_j, R_1) = \min_{\alpha_* \in U} \int\limits_{D_i} \Phi(x, \alpha_*, R_1)\, dx$$

с учетом ограничений (3.2), (3.3), (3.5).

Построив таким образом новое управление $\{\alpha^*(x), R_1 + \delta R_1\}$, принимаем его за начальное и строим следующее приближение. Процесс считается оконченным на данной сетке разбиения $\{x_i\}$, если управление $\{\alpha(x), R_1\}$ не изменяется ни на одном из множеств D_i. Получаемое решение представляет собой локальный минимум в рассматриваемой задаче.

Пример. Множество W состоит из пяти материалов, имеющих следующие механические и физические безразмерные характеристики (1.6):

$$E = 270;\ 7100;\ 12000;\ 21000;\ 11200, \quad \nu = 0{,}27;\ 0{,}33;\ 0{,}32;\ 0{,}3;\ 0{,}33,$$

$$\rho = 0{,}65;\ 2{,}85;\ 4{,}6;\ 7{,}8;\ 8{,}93, \quad \sigma_т = 4{,}5;\ 44;\ 80;\ 120;\ 20$$

($E = 2G(1 + \nu)$ — модуль Юнга материала).

На внутренней поверхности включения, радиус которой R_1 может меняться в пределах отрезка [0,7; 0,9], задается давление $p = 0$. Внешний радиус R_2 считается фиксированным и равным единице. Матрица, содержащая сферическое включение, состоит из первого материала множества W и растягивается на бесконечности одноосным усилием $q = 4$. Область включения разбивается по толщине на 50 равных частей, моделирующих множества D_i.

В качестве начального приближения бралось однородное включение из второго материала с $R_1 = 0{,}7$. В результате оптимизации получено двухслойное включение с $R_1 = 0{,}8992$, весом $F_* = 3{,}7$ и со слоями [0,8992; 0,9234] из третьего материала, [0,9234; 1] из второго материала. Самым легким однородным включением, удовлетворяющим ограничениям на прочность (1.13) и толщину тела (1.10) при заданных p и q, является включение из второго материала с $R_1 = 0{,}85295$ и $F^* = 4{,}5299$.

Относительный выигрыш по весу для оптимального включения по сравнению с данным однородным составил $(1 - F_*/F^*)\cdot 100\ \% = 18{,}3\ \%$.

Работа выполнена в рамках гранта 2-41-7-26 МНВШ и ТП.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабе Г. Д., Гусев Е. Л.** Математические методы оптимизации интерференционных фильтров.— Новосибирск: Наука, 1987.
2. **Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций.— Новосибирск: Наука, 1989.
3. **Алёхин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых материалов и конструкций.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
4. **Алёхин В. В., Аннин Б. Д.** Оптимизация термоупругих слоистых тел // ПМТФ.— 1989.— № 2.
5. **Matonis V. A., Small N. C.** A macroscopic analysis of composites containing layered spherical inclusions // Polymer Engineering and Science.— 1969.— V. 9, N 2.
6. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.
7. **Хог Э., Арора Я.** Прикладное оптимальное проектирование: механические системы и конструкции.— М.: Мир, 1983.

г. Новосибирск *Поступила 2/IV 1993 г.*