ПМТФ, № 5, 1974

УДК 538.574 : 530.18

О ЗАТУХАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА—ГОРДОНА

Е. Н. Пелиновский, С. Х. Шаврацкий

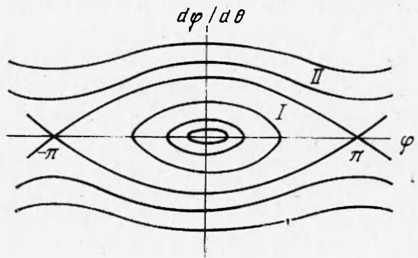
(*Горький*)

Методом усреднения исследуется затухание несинусоидальной волны в системах, описываемых уравнением Клейна — Гордона. Для задачи с начальными условиями решение дано в явном виде. Показано, что в некоторых случаях длительное существование стационарной волны невозможно. Диссипация может приводить также к остановке волны. Рассмотрены особенности граничной задачи. Получены формулы, описывающие затухание одиночных импульсов (солитонов).

1. Нелинейное волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{c^2}{\Lambda^2}\sin\varphi = 0 \tag{1.1}$$

известное как уравнение Клейна — Гордона «с синусом», широко применяется в различных задачах физики. Оно описывает движение границ доменов в ферромагнетиках [1] и распределение дислокаций в кристаллической решетке [2], распространение ультракороткого светового импульса в нелинейной активной среде [3] и электромагнитное поле в переходах Джозефсона [4]. Уравнение (1.1) используется в некоторых моделях теории поля [5] и механики твердого тела [6]. Решения уравнения (1.1) исследовались в дифференциальной геометрии [7], для (1.1) впервые в нелинейной теории получены точные решения, описывающие взаимодействие двух волн. Найдены также многоволновые (N-солитонные) решения [8, 9].



Фиг. 1

Влияние диссипативных эффектов на нелинейные волны изучено для слабонелинейного случая [4, 10, 11]. Поскольку решение задачи о распространении волны с учетом поглощения в общем виде получить не удается, можно рассмотреть при произвольной величине нелинейности класс квазистационарных волн, характеризуемых только двумя параметрами (амплитудой и частотой), анализ которых возможен с помощью методов усреднения. Такие волны в отсутствие поглощения рассматривались в литературе, исследовалась их устойчивость относительно возмущений огибающих [6, 12–14]. В данной работе решается задача о затухании волны, форма которой в начальный момент времени стационарна.

Стационарные волны различают по фазовой скорости $v = \omega / k$ (быстрые, если $v > c$, и медленные, если $v < c$) и по величине среднего за период волны значения производных от φ (в области I $\langle \partial\varphi / \partial t\rangle = \langle \partial\varphi / \partial x\rangle = 0$, в области II хотя бы одна из этих величин отлична от нуля; эти области обозначены на фазовой плоскости быстрых стационарных волн, изображенной на фиг. 1). Аналитически стационарные волны выражаются в эллиптических функциях. В области I имеем

$$(1.2)\qquad \varphi = 2\arcsin\left\{s\,\mathrm{Sn}\left[\frac{2K(s)}{\pi}\theta;\ s\right]\right\} + \pi I(v^2 - c^2)$$
$$\omega^2 = c^2k^2 + \frac{c^2}{\Lambda^2}\left[\frac{\pi}{2K(s)}\right]^2 \mathrm{sign}\,(v^2 - c^2)$$

в области II

$$(1.3)\qquad \varphi = 2\,\mathrm{am}\left[\frac{K(s)}{\pi}\theta,\ s\right] + \pi I(v^2 - c^2)$$
$$\omega^2 = c^2k^2 + \frac{c^2}{\Lambda^2}\left(\frac{\pi}{sK(s)}\right)^2 \mathrm{sign}\,(v^2 - c^2)$$

где $\theta = \omega t - kx$, $I(z)$ — ступенчатая функция Хэвисайда, $\mathrm{am}\,(z)$ и $\mathrm{Sn}\,(z)$ — амплитуда и синус Якоби соответственно, $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем s.

При фиксированном k форма медленных волн не может быть произвольной, возможны только те s (а этот параметр фактически определяет форму волны), при которых $\omega^2 > 0$; для быстрых волн таких ограничений не существует.

2. Учет диссипативных факторов во многих случаях приводит к добавлению в уравнение Клейна — Гордона слагаемого типа $\partial\varphi/\partial t$, и исходное уравнение принимает вид

$$(2.1)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{c^2}{\Lambda^2}\sin\varphi + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

При достаточно больших τ можно считать, что решение уравнения (2.1) описывается формулой (1.2) или (1.3), где амплитуда (или модуль s) и частота переменны. Поскольку огибающие изменяются медленно, уравнение для них удобно получить с помощью метода усреднения, например обобщенного вариационного принципа [15, 16]. Можно найти функции Лагранжа и Рэлея для уравнения (2.1). После их усреднения по фазе θ получим искомые уравнения

$$(2.2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega\langle\varphi_\theta{}^2\rangle\right] + c^2\frac{\partial}{\partial x}\left[k\langle\varphi_\theta{}^2\rangle\right] = -\frac{\omega}{\tau}\langle\varphi_\theta{}^2\rangle$$
$$\partial k/\partial t + \partial\omega/\partial x = 0$$

Поставим для (2.2) начальную задачу, т. е. будем считать, что при $t = 0$ решение имеет вид (1.2) или (1.3) с заданными значениями s_0 и k_0. Тогда при $t > 0$ волновое число не изменится, а s будет меняться со временем. При этих условиях (2.2) интегрируется

$$(2.3)\qquad I(s, k_0\,\mathrm{A})\exp(t/\tau) = \mathrm{const}$$

где функция I в области I равна

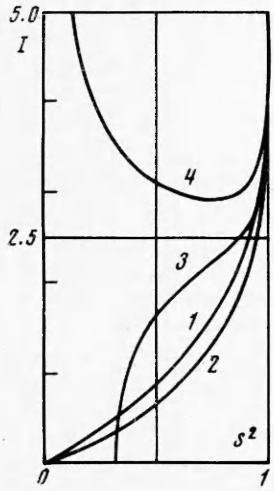
$$(2.4)\qquad I = \left[K^2(s) + \frac{\pi^2}{4k_0{}^2\Lambda^2}\mathrm{sign}\,(v^2 - c^2)\right]^{1/2}[E(s) - (1 - s^2)K(s)]$$

и в области II

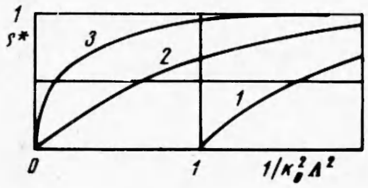
$$(2.5)\qquad I = \left[K^2(s) + \frac{\pi^2}{k_0{}^2\Lambda^2}s^{-2}\,\mathrm{sign}\,(v^2 - c^2)\right]^{1/2}E(s)$$

Здесь $E(s)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем s. График функции $I(s)$ приведен на фиг. 2 (1 — область I, $v > c$; 2 — область I, $v < c$; *3* — область II, $v < c$; *4* — область II, $v > c$). Уравнение (2.3) в неявном виде определяет зависимость s (а с помощью (1.2) или (1.3) — зависимость остальных элементов волны) от t. Основные особенности в поведении решения определяются зависимостью $I(s)$. В области I $I(s)$ — монотонная функция своего аргумента; в результате $s(t)$ уменьшается и волна становится все более синусоидальной. Если $v > c$, то амплитуда волны убывает до нуля, и этот процесс качественно похож на описанный в [15]. С ростом амплитуды декремент затухания увеличивается и при $s = 1$ превышает в два раза значение, полученное в линейной теории. Таким образом, быстрая волна конечной амплитуды в области I затухает быстрее, чем это следует из линейного приближения.

В случае медленной волны в области I при $k_0\Lambda < 1$ возможен новый



Фиг. 2



Фиг. 3

эффект, связанный с остановкой волны на конечном расстоянии (но за бесконечное время). При этом частота волны обращается в нуль и процесс выходит на стационарный режим $\varphi = \varphi(x)$. Зависимость параметра s_1^*, характеризующего предельную форму медленной волны в области I при $t \to \infty$ от $k_0\Lambda$ приведена на фиг. 3 (кривая *1*).

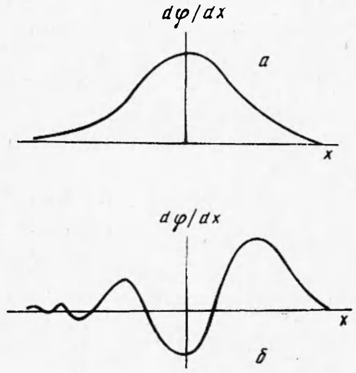
Для медленной волны в области II $I(s)$ — также монотонная функция и при $t \to \infty$ s стремится к асимптотическому значению $s_2^*(k_0\Lambda)$ (фиг. 3, кривая *2*), при котором $\omega = 0$. Волна останавливается также на конечном расстоянии.

В случае быстрой волны в области II $I(s)$ имеет минимум (фиг. 2) при некотором $s = s_3^*(k_0\Lambda)$ (фиг. 3, кривая *3*). Тогда, вне зависимости от начальных условий параметр формы $s(t)$ за конечное время стремится к s_3^*, после чего формула (2.3) теряет смысл. Параметры волны уже не могут плавно «перестраиваться», и ее квазистационарная структура разрушается. Возникающий в этом случае режим не поддается анализу. Если пренебречь нелинейностью (формально $\Lambda \to \infty$), то падающий участок на графике $I(s)$ исчезает и функция $I(s)$ становится монотонной. Таким образом, разрушение стационарной структуры волны целиком обусловлено нелинейностью.

3. Рассмотрим граничную задачу, когда при $x = 0$ волна имеет стационарную форму. В этом случае для нахождения $s(x)$ имеем уравнение

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{\omega}{\tau c_0^2}\langle\varphi_\theta^2\rangle, \qquad R = k\langle\varphi_\theta^2\rangle \tag{3.1}$$

где $\omega = \mathrm{const}$, k определяется дисперсионными соотношениями. Хотя решение уравнения (3.1) сводится к квадратуре, его особенности удобнее проанализировать, исходя из зависимостей R и $\langle \varphi_\theta^2 \rangle$ от s. Так как функция $\langle \varphi_\theta^2 \rangle$ положительная, R уменьшается с расстоянием до своего минимального значения. Поскольку R (s) имеет минимум для медленных волн в области II, то уравнение (3.1), начиная с некоторого расстояния, становится противоречивым, что означает невозможность распространения стационарной волны этого типа на большие расстояния. Для быстрых волн в областях II и I (в последнем случае при $\Lambda\omega < c$) R (s) определена лишь при $s > s_0$ $(s_0 > 0)$, причем зависимость от s монотонная. Поскольку $\langle \varphi_\theta^2 \rangle$ в точке s_0 олична от нуля, то в этом случае стационарная структура волны также не может существовать на больших расстояниях от границы. В этом случае говорить о разрушении волны необходимо с осторожностью, так как вблизи критической точки $k \to 0$ и метод усреднения, вообще говоря, неприменим.



Фиг. 4

Для медленных и быстрых (при условии $\Lambda\omega > c$) волн в области I уравнение (3.1) применимо на любых расстояниях и с его помощью затухание стационарной волны может быть полностью описано.

4. Наряду с периодическими волнами существенно несинусоидальной формы ($s=1$) возможно распространение солитонов, которым соответствуют перепады «фазы» φ, равные 2π (поэтому они получили в нелинейной оптике название $2\,\pi$-импульсов) [17]. Их распространение может быть описано с помощью (2.2) предельным переходом $k \to 0$ и $s \to 1$, но так, чтобы $kK(s)$ было конечным. Эта величина определяет скорость солитона по формуле

$$kK(s) = \pi c / \Lambda \sqrt{|v^2 - c^2|} \tag{4.1}$$

С учетом (4.1) получаем для I выражение

$$I = [v^2 / \, | v^2 - c^2 | \,]^{1/2} \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (2.3), находим $v\,(t)$

$$v\,(t) = c\,[1 - (1 - c^2/v_0^2) \exp 2t/\tau]^{-1/2} \tag{4.3}$$

где $v_0 = v\,(t = 0)$. Отсюда следует, что скорость быстрой волны неограниченно возрастает за конечное время $\Delta = -{}^1/_2 \ln (1 - c^2/v_0^2)$, причем солитон за это время проходит конечное расстояние $L = {}^1/_2\, c\tau \ln [(c + v_0)/(v_0 - c)]$. При $t \to T$, $\partial\varphi/\partial x \to 0$, а $\partial\varphi/\partial t$ стремится к конечному значению. При $t > T$ импульс не может оставаться стационарным.

Для медленной волны при $t \to \infty$ $\partial\varphi/\partial t \to 0$, а $\partial\varphi/\partial x$ — к постоянному значению. Хотя затухание в этом случае происходит бесконечно долго, солитон проходит конечное расстояние $L = {}^1/_2\, c\tau \ln [(c + v_0)/(c - v_0)]$. Следовательно, из-за затухания невозможно распространение уединенной волны на большие расстояния.

5. Кроме рассмотренных $2\,\pi$-импульсов возможны также π-импульсы, существование которых обусловлено диссипацией. Эти волны стационарные и осуществляют релаксацию среды из инвертированного состояния с фазой $\pm\,\pi$ (из (1.1) можно видеть, что решение $\varphi = \pm\,\pi$ неустойчиво относительно возмущений с масштабом, превышающим Λ) к нормальному с $\varphi = 0$

(ср. [17]). В отличие от 2 π-импульсов решение в диссипативной среде в виде π-импульса можно найти при любом τ (для малых τ — фиг. 4, *а*, для больших τ — фиг. 4, *б*). При $\tau \to 0$ приближенно имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{c^2\tau}{v\Lambda} \operatorname{sech} \frac{c^2\tau\,(x - vt)}{\Lambda^2 v} \tag{5.1}$$

По виду это решение совпадает с решением для 2 π-импульса. При $v = c$ и любом τ решение (5.1) точное.

Авторы благодарны А. Н. Малахову и Л. А. Островскому за обсуждение результатов работы.

Поступила 29 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Широбоков М.* К теории механизма намагничения ферромагнетиков. ЖЭТФ, 1945, т. 15, вып. 1, 2.
2. *Френкель Я. И.* К теории пластической деформации и двойникования. Собр. избр. тр., т. 2. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1958.
3. *Lamb G. L.* Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. Rev. Mod. Phys., 1971, vol. 43, No. 2, pt 1, pp. 99.
4. *Кулик И. О., Янсон И. К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., «Наука», 1970.
5. *Perring J. K., Skyrme T. H. R.* A model unified field equation. Nucl. Phys., 1962, vol. 31, No. 4, p. 550.
6. *Scott A. C.* A nonlinear Klein—Gordon equation. Amer. J. Phys., 1969, vol. 37, No. 1, p. 52.
7. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale, vol. 1, pt 2. Bologna, N. Zanicheltura, 1927.
8. *Gibbon J. D., Eilbeck J. C.* A possible N-soliton solution for a nonliniar optics equation. J. Phys. A. Gen. Phys., 1972, vol. 5, No. 11.
9. *Hirota R.* Exact solution of the sine-Gordon equation for multiple collisions of solitons. J. Phys. Soc. Japan, 1972, vol. 33, No. 5, pp. 1459.
10. *Callegari A. J., Reiss E. L.* Nonlinear stability problems for thé sine-Gordon equation. J. Math. Phys., 1973, vol. 14, No. 2, pp. 267.
11. *Авербух А. З., Веницианов Е. В.* Стационарные решения дисперсионной системы для нелинейных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
12. *Кулик И. О.* Распространение волн в туннельном переходе Джозефсона при наличии вихрей, и электродинамика слабой сверхпроводимости. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 6.
13. *Lebwohl P., Stephen M. J.* Properties of vortex lines in supperconducting barries. Phys. Rev., 1967, vol. 163, No. 2, pp. 376.
14. *Scott A. C.* Waveform stability on a nonlinear Klein—Gordon equation. Proc. IEEE, 1969, vol. 57, No. 7, pp. 1338.
15. *Пелиновский Е. Н.* О поглощении нелинейных волн в диспергирующих средах. ПМТФ, 1971, № 2.
16. *Островский Л. А., Пелиновский Е. П.* Метод усреднения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
17. *Крюков П. Г., Летохов В. С.* Распространение импульса света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде. Усп. физ. н., 1969, т. 99, вып. 2.