

## ЛИТЕРАТУРА

1. Антановский Л. К., Копбосынов Б. К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.
2. Subramanian R. S. The Stokes force on a droplet in an unbounded fluid medium due to capillary effects // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 153.
3. Редников А. Е., Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении капли под действием излучения // ПМТФ.— 1989.— № 2.
4. Повицкий А. С., Любин Л. Я. Основы динамики и тепломассообмена жидкостей и газов при невесомости.— М.: Машиностроение, 1972.
5. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
6. Гупало Ю. П., Редников А. Е., Рязанцев Ю. С. Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // ПММ.— 1989.— Т. 53, № 3.

г. Москва

Поступила 13/III 1990 г.

УДК 532.529.6

П. К. Волков

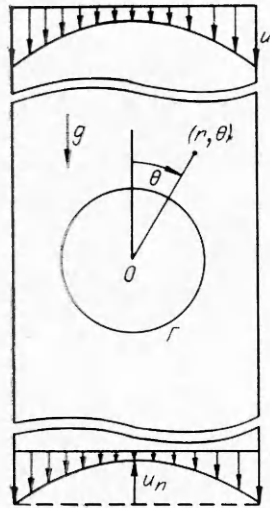
### ВСПЛЫВАНИЕ ПУЗЫРЯ В ВОСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ

В современных теплообменных аппаратах, трубопроводах и капиллярах происходит движение жидкости, содержащей разного размера пузыри растворенных газов или пара. Вынужденное движение жидкости (прокачивание) осуществляется либо путем создания разности давлений на концах трубы, либо с помощью насосов. В первом случае говорят, что течение происходит при заданном перепаде давления (расход неизвестен и является определяемым параметром), во втором — при заданном расходе (перепад давления должен быть найден при решении задачи). С математической точки зрения, как правило, эти две постановки эквивалентны в том смысле, что если решена задача с заданным расходом, то можно вычислить перепад давления. И если теперь решить задачу с найденным перепадом давления, то получим исходный расход [1].

Теоретическое исследование локальных характеристик движущейся в трубе жидкости при всплытии газового пузыря представляет значительные трудности, обусловленные тем, что имеется течение со свободной поверхностью, которая заранее неизвестна и должна быть определена одновременно с функциями течения. Экспериментальные данные [2—4] весьма малочисленны и дают лишь некоторое качественное представление о процессе. Учитывая, что в задаче содержится более трех независимых входных параметров, обобщить результаты экспериментов в настоящее время невозможно. Пожалуй, только численное решение уравнений Навье — Стокса позволит дать полную картину течения около деформируемого пузыря. В [5] изложен алгоритм численного решения полных уравнений Навье — Стокса, описывающих всплытие газового пузыря в вертикальной трубе, заполненной покоящейся жидкостью. Анализ полученных решений и карты режимов течений для широкого набора входных параметров даны в [6]. В настоящей работе приводятся результаты расчетов стационарного всплытия пузыря в жидкости, имеющей вдали от него параболический профиль скорости по сечению трубы.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеем вертикальную трубу, заполненную вязкой жидкостью, движущейся снизу вверх. Ускорение силы тяжести  $g$  направлено сверху вниз. Если запустить пузырь газа в трубу, то он будет всплывать под действием силы Архимеда и сноситься потоком движущейся жидкости. И если на некотором участке своего движения он не изменяет существенно объем, форму, скорость, то считаем, что осуществляется стационарное всплытие. В системе координат, связанной со стенками трубы, скорость всплытия  $u$ , очевидно, больше скорости всплытия пузыря в покоящейся жидкости  $u_0$  и зависит от величины прокачиваемого расхода, течения около пузыря и его формы. Считаем, что вдали от пузыря вверх и вниз по трубе устанавливается течение Пуазейля, характеризуемое одним параметром, например максимальным значением скорости  $u_n$  на оси.

Математическое описание удобно проводить в системе координат, связанной с пузырем. В этом случае пузырь покоится, а стенки трубы и жидкость движутся сверху вниз (рис. 1). В сферической системе коор-



Р и с. 1

динат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом  $O$  в «центре пузыря» движение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса и с учетом осевой симметрии в терминах функция тока  $\psi$  — вихрь  $\omega$  примет вид [6]

$$(1.1) \quad D^2\psi = -2r \sin \theta \omega;$$

$$(1.2) \quad D^2\omega = \frac{1}{vr^2 \sin \theta} \left[ \psi_{\theta} \omega_r - \psi_r \omega_{\theta} - \frac{\omega}{r} \psi_{\theta} + \omega \operatorname{ctg} \theta \psi_r \right] - \frac{2}{r} \omega_r + \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \omega_{\theta} \left( D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right).$$

Зададим краевые условия: а) на поверхности пузыря  $\Gamma$  ( $r = R(\theta)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ) условие непротекания, равенство нулю касательных напряжений, равенство разности нормальных напряжений капиллярным силам:

$$(1.3) \quad \psi(r, \theta) = 0;$$

$$(1.4) \quad \omega + \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{R^2 + R'^2} \frac{\psi_r}{r^2 \sin \theta} = 0;$$

$$(1.5) \quad -p(r, \theta) + 2\rho\nu \left[ \frac{\psi_{\theta r} - \psi_{\theta}/r + R'\psi_{rr}}{r^2 \sin \theta} + \frac{R'}{R} \omega \right] = -p_r + \sigma K$$

$\left( K = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}} + \frac{|R' \cos \theta - R \sin \theta|}{R \sin \theta (R^2 + R'^2)^{1/2}} \right)$  — кривизна  $\Gamma$ ,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $p = q - \rho gr \cos \theta + p_{\infty}$  ( $p_{\infty} = p(r = R_T, \theta = \pi/2)$ ) — давление в жидкости,  $q$  — обобщенное давление,  $p_r$  — давление газа в пузыре (считается постоянным),  $\rho$  — плотность жидкости);

б) на стенке трубы ( $r = G(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta^*, \pi - \theta^*]$ ,  $\theta^* = \operatorname{arctg}(R_T/l)$ ,  $R_T$  — радиус трубы,  $2l$  — длина рассматриваемого участка движущейся трубы) условия прилипания и непротекания

$$(1.6) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -u;$$

$$(1.7) \quad \psi(r, \theta) = -\frac{u}{2} R_T^2 \left( 1 - \frac{r_n}{2u} \right);$$

в) на оси трубы ( $\theta = 0, \pi$ ) условия симметрии

$$(1.8) \quad \psi(r, \theta) = \omega(r, \theta) = 0;$$

г) на входе ( $r = F_1(\theta)$ ,  $\theta \in [0, \theta^*]$ ) и на выходе трубы ( $r = F_2(\theta)$ ,  $\theta \in [\pi - \theta^*, \pi]$ )

$$(1.9) \quad \psi(r, \theta) = -\frac{u}{2} r^2 \sin^2 \theta + \frac{u_n}{2} r^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2R_T^2} \right);$$

$$(1.10) \quad \omega(r, \theta) = u_n r \sin \theta / R_T^2.$$

В (1.7), (1.9), (1.10) присутствуют слагаемые, обусловленные течением Пуазейля в трубе. Так, если прокачивания жидкости не происходит ( $u_n = 0$ ), имеем условия [6], соответствующие невозмущенному течению. При  $u_n > 0$  появляется дополнительный расход в сечениях трубы, что учтено в (1.7). На входе и выходе задается парабола Пуазейля:  $V(y) =$

$= u_n(1 - y^2/R_T^2)$  ( $y$  — координата поперек трубы). Тогда радиальная компонента скорости

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = u_n \left( 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{R_T^2} \right) \cos \theta$$

или  $\partial \psi / \partial \theta = u_n r^2 \sin \theta \cos \theta (1 - r^2 \sin^2 \theta / R_T^2)$ . Интегрируя по  $\theta$  при  $r = \text{const}$ , получим  $\psi(r, \theta) = u_n \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \left( 1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2R_T^2} \right)$ . Подставляя теперь  $\psi(r, \theta)$  в уравнение (1.1), вычисляем  $\omega(r, \theta)$  на входе и выходе трубы (1.10). Параметр  $u_n$  независимый и определяет расход жидкости, прокачиваемой через сечение трубы. При больших  $R_T$  и малых размерах пузыря скорость его всплытия равна сумме скорости всплытия в покоящейся жидкости  $u_0$  и  $u_n$ . По мере уменьшения диаметра трубы  $u$  будет уже определяться всей картиной течения.

**2. Анализ размерности и метод решения.** В задаче (1.1)—(1.10) содержатся следующие размерные входные параметры:  $\rho, \nu, \sigma, g, p_T - p_\infty, R_T, u_n$ . Размеры пузыря, его форма, скорость всплытия, функции течения находятся в результате решения (1.1)—(1.10). Согласно теории размерностей, задача (1.1)—(1.10) имеет четыре безразмерных независимых комплекса. Если выбрать в качестве характерных размера и скорости величины:  $a$  (радиус эквивалентной по объему сферы) и  $u$  и провести обезразмеривание [5], то в уравнения движения и краевые условия будут входить параметры:  $Re = u2a/\nu, We = \rho u^2 2a/\sigma, Fr = u^2/ga$  — числа Рейнольдса, Вебера и Фруда,  $p_d = (p_T - p_\infty)/\rho u^2$  — разность давлений,  $W = u_n/u$  — скорость прокачивания,  $\lambda = a/R_T$  характеризует геометрию области течения. Из указанных шести безразмерных комплексов независимыми должны быть четыре. Если считать входными  $Re$  и  $We$ , то  $Fr, p_d$  задавать заранее нельзя, они определяются вместе с функциями течения, например, как в [6].

Задача (1.1)—(1.10) отличается от решаемой в [6] условиями (1.7), (1.9), (1.10), задающими расход жидкости, а на входе и выходе трубы — течение Пуазейля вместо условий равномерного потока. Поэтому метод решения и алгоритм будут аналогичными. При каждом  $\lambda$  для фиксированного  $W$  решается задача для разных  $Re$  и  $We$ . Изменяя затем  $W$ , можно получить чрезвычайно большой объем информации о течениях. Наличие четырех независимых безразмерных параметров делает практически невозможным полное исследование поставленной задачи. Поэтому в данной работе ограничимся наиболее интересным и важным случаем, когда размеры пузыря и трубы сравнимы. В самом деле, если имеем растущий паровой пузырь, всплывающий в трубе, то, пока он мал, в течении существенных особенностей не происходит. Но вот когда пузырь станет занимать большую часть сечения трубы, то деформация поверхности приводит к сильному замедлению скорости его всплытия [6]. Итак, при  $\lambda = 0,8$  и  $0,98$  проводятся расчеты для  $W = 0,5$  и  $1$ . Учитывая данные [6] (соответствуют  $W = 0$ ), можно выявить особенности течений, обусловленные прокачиваемой жидкостью. Анализ и представление результатов проводятся построением диаграмм изолиний  $Fr$  в координатах  $R_\sigma = a/(\sigma/\rho g)^{1/2}, R_\nu = a/(\nu^2/g)^{1/3}$  [6], на которых указаны основные типы течений. В используемых здесь координатах каждая жидкость изображается прямой, наклон которой определяется числом Мортон  $M = g\nu^4\rho^3/\sigma^3 = (R_\sigma/R_\nu)^6$ . Таким образом, построив линии  $Fr = \text{const}$  в этих координатах, имеем полную информацию о течении: скорость всплытия пузыря, расход прокачиваемой жидкости, которые легко вычисляются из определения  $Fr$  и  $W$  для пузыря данного размера  $a$  в конкретной жидкости.

**3. Сильное влияние стенок ( $\lambda = 0,8$ ).** Для  $W = 0,5$  проведена серия расчетов с различными значениями  $Re$  и  $We$ . Уже на расстоянии  $1-1,5$  калибров трубы от пузыря течение жидкости одинаково и мало отличается от задаваемого на входе и выходе. Характер течения слоистый, с век-

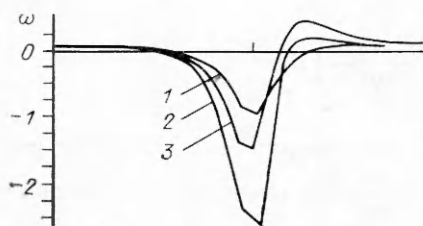


Рис. 2

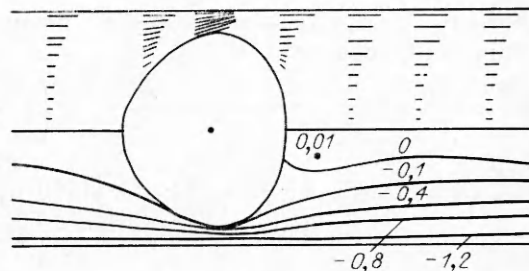
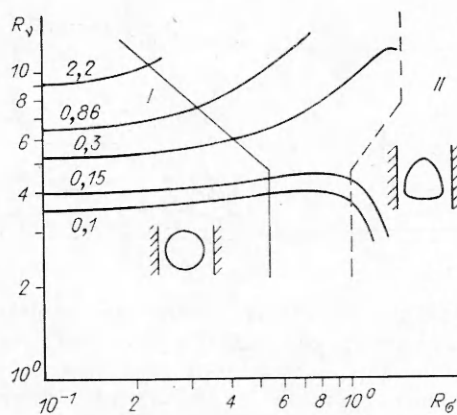


Рис. 3

тором скорости, параллельным оси трубы, за исключением области в непосредственной близости от пузыря. Переток обтекающей пузырь жидкости происходит с образованием струи за ним и вдоль оси трубы и замедлением ее у твердых стенок за пузырем. Однако эти процессы не так ярко выражены, как при  $W = 0$  [6]. Например, для  $Re = 100$ ,  $We = 0,166$ ,  $R_g = 0,35$ ,  $R_v = 15,4$ ,  $M \sim 10^{-10}$  структура течения такая же, как на рис. 7, а в [6] для  $Re = 0,4$ . При меньших  $Re$  характер течения тот же, но с более слабой застойной зоной и струей, при  $Re = 4$  их практически нет. За пузырем в расширяющейся части течения в сечении трубы имеется веер скорости с минимальным (ненулевым) значением на поверхности пузыря. С увеличением  $We$  при фиксированном  $Re$  происходит сплющивание пузыря с уменьшением зазора между его стенками и трубой. Причем распределение скорости вблизи пузыря носит еще более неравномерный характер. На рис. 2 представлены распределения вихря  $\omega$  на стенке трубы, когда  $Re$ ,  $We$ ,  $M$  соответственно равны: для линии 1 — 4; 0,05;  $2,6 \cdot 10^{-5}$ ; 2 — 40; 0,34;  $2,4 \cdot 10^{-7}$ ; 3 — 100; 0,166;  $\sim 10^{-10}$ . В области перед пузырем наблюдается резкое уменьшение  $\omega$ , что говорит об ускорении здесь жидкости. Сразу за узкой частью зазора  $\omega$  возрастает, становится положительным и далее выходит на постоянный уровень, отвечающий течению Пуазейля. Учитывая, что трение на стенке трубы  $\tau = (2/Re)\omega$ , можно установить потери, связанные с прохождением пузыря. Сравнение графиков на рис. 2 говорит о том, что наибольший пик вихря  $\omega$  у кривой 2. Это объясняется тем, что кривые 1 и 3 отвечают практически сферическим пузырям с одинаковым расстоянием между пузырем и стенкой трубы в узком зазоре. Кривая 2 соответствует сплюсненному пузырю, когда зазор существенно уменьшился. Поскольку расход в трубе задан, то это приводит к росту скорости жидкости в зазоре, а следовательно, и резкому уменьшению завихренности  $\omega$ . Сопоставление рассчитанных значений  $Fg$  в соответствующих точках диаграммы рис. 6 из [6] говорит о том, что в области сферических пузырей  $Fg$  возросло примерно в 2,5 раза, а в области деформированных — менее чем в 2. Поскольку  $Fg = u^2/ga$ , то, беря отношение чисел Фруда и извлекая из него квадратный корень, можно получить оценку роста  $u$  по сравнению с процессом в покоящейся жидкости. В данном случае слабodeформированные пузыри всплывают в  $\sqrt{2,5}$  раза быстрее, чем в покоящейся жидкости. Скорость всплытия у деформированных пузырей немного меньше суммы скоростей всплытия в покоящейся жидкости и среднерасходной на входе. В области сферических пузырей наблюдается линейная зависимость  $Fg = k_1 Re$  ( $k_1 = 0,0095$ ).

С увеличением количества прокачиваемой жидкости существенно изменяется структура всего течения, становясь все менее похожей на картину при всплытии пузыря в покоящейся жидкости. Пузырь начинает играть роль поршня, толкающего жидкость. На рис. 3 показано течение для  $Re = 40$ ,  $We = 0,96$ ,  $M = 2,38 \cdot 10^{-6}$ ,  $R_g = 1,22$ ,  $R_v = 11,1$ ,  $W = 1$ . За пузырем (и перед ним) у оси трубы формируется структура, отвечающая течению за поршнем. При больших  $Re$  она не примыкает к пузырю — следствие практически исчезнувшей струи жидкости за ним, как видно на рис. 7 из [6]. Завихренность  $\omega$  и трение  $\tau$  на стенке трубы имеют

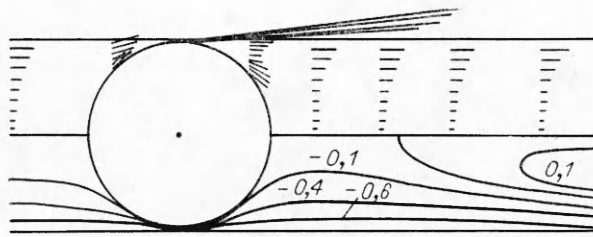
тот же характер, что и на рис. 2. Отрицательные пики уменьшились по абсолютной величине примерно в 2 раза. Расчеты для других  $Re$  и  $We$  дают картину течения, отличающуюся от рис. 3 вблизи пузыря. На рис. 4 изображены изолинии  $Fr = \text{const}$  в координатах  $R_\sigma, R_v$ . Поведение их аналогично случаю всплытия пузыря в покоящейся жидкости [6]. Практически совпадают области сферических I (левый угол, очерченный сплошной ломаной) и деформированных II пузырей. Правее штриховой линии деформация происходит вытягиванием вдоль оси трубы с увеличением зазора между



Р и с. 4

стенками пузыря и трубы. Почти исчезла застойная зона у стенки трубы за пузырем. Возросла скорость всплытия. Сравнение значений  $Fr$  в соответствующих точках диаграмм рис. 4 и 6 из [6] показывает, что в области I их отношение  $\approx 10-13$ , а в II  $\approx 5-7$ . Таким образом, сферические пузыри всплывают примерно в 3,5 раза быстрее, чем в покоящейся жидкости, а деформированные — более чем в 2 раза. Учитывая расход прокачиваемой жидкости, можно сделать вывод, что  $u$  у сферических пузырей больше суммы скорости всплытия в покоящейся жидкости  $u_0$  и среднерасходной  $u_c$ . В самом деле,  $u = 3,5u_0$ . Поскольку  $W = 1$ , то в размерном виде  $u_n = u$ ,  $u_c = u_n/2 = 1,75u_0$ . Тогда  $u_0 + u_c = 2,75u_0 < u$ . Для деформированных пузырей  $u$  примерно равна (чуть больше)  $u_c + u_0$ . В области сферических пузырей  $Fr = k_2 Re$  ( $k_2 = 0,0244$ ).

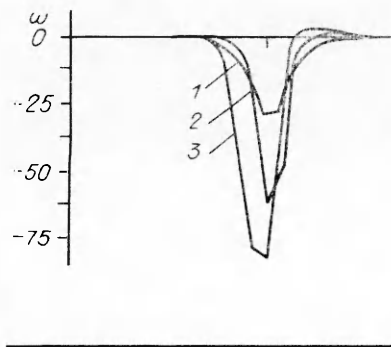
4. «Снарядный» режим течения ( $\lambda = 0,98$ ). Термин «снарядный» здесь отличается от общепринятого снарядного режима, когда скорость всплытия пузыря уже не зависит от его объема для трубы указанного радиуса. Как следует из диаграмм [6], в капиллярных трубах (радиус которых меньше капиллярной постоянной  $\delta_\sigma = (\sigma/\rho g)^{1/2}$ ) в данной жидкости зависимость скорости всплытия пузыря от его объема имеет немонотонный характер и с приближением эквивалентного радиуса  $a$  к радиусу трубы скорость всплытия сильно уменьшается. Это объясняется тем, что в таких трубах сила поверхностного натяжения пузыря велика и является доминирующей по сравнению с инерционными и вязкими силами. Пузырь становится «жестким» и практически не деформируется, оставаясь сферическим. С ростом объема он закупоривает капилляр. В трубах,  $R_T$  которых больше  $\delta_\sigma$ , с приближением  $a$  к  $R_T$  инерционные силы становятся сравнимыми с силой поверхностного натяжения, пузырь деформируется, вытягиваясь вдоль оси трубы, скорость его всплытия увеличивается. Наличие восходящего течения должно приводить к росту скорости всплытия, величина которой будет определяться формой пузыря. Картина течения для  $W = 0,5$ ,  $Re = 100$ ,  $We = 0,0008$ ,  $M \sim 10^{-12}$  напоминает структуру при  $W = 0$ ,  $Re = 60$  [6]. Однако здесь у стенки трубы за пузырем застойная зона без замкнутых линий тока. С увеличением  $We$  пузырь сначала деформируется, несмотря на малый зазор, сплющиваясь, а затем (при  $R_\sigma > 0,8$ ) вытягивается вдоль оси трубы с увеличением зазора между стенками пузыря и трубы. При меньших  $Re$  картина течения в целом аналогичная, но с менее выраженной струей за пузырем и застойной зоной у стенки. Области характерных типов течений строятся, как в [6], и мало отличаются от диаграммы для  $\lambda = 0,98$ . Скорость всплытия пузырей больше, чем при  $W = 0$ , примерно в 1,2 раза. Это значит, что  $u = 1,2u_0$ . Так как  $u_c = u_n/2 = u/4$ , то  $u_0 + u_c = u_0 + 0,3u_0 > u$ . Таким образом, при  $W = 0,5$  пузыри всплывают со скоростью, большей, чем  $u_0$ , но меньшей, чем  $u_c + u_0$ . В области сферических пузырей  $Fr = k_3 Re$  ( $k_3 = 0,00035$ ).



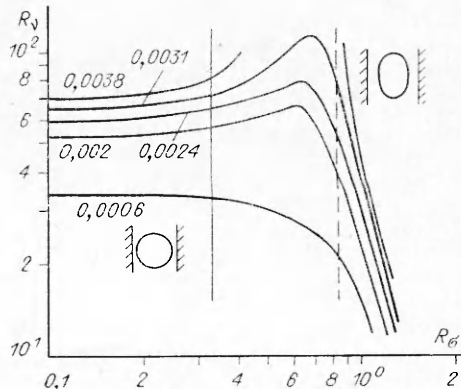
Р и с. 5

С увеличением расхода прокачиваемой жидкости изменяется структура течения. На рис. 5 показана картина для  $W = 1$ ,  $Re = 100$ ,  $We = 0,0014$ ,  $M \sim 10^{-13}$ ,  $R_c = 0,42$ ,  $R_v = 85$ . Струя за пузырем и застойная зона у стенки весьма незначительны. У оси трубы на некотором расстоянии от пузыря формируется структура, отвечающая течению жидкости за поршнем. При меньших  $Re$  нулевая линия тока замыкается на пузырь. На рис. 6 показаны графики вихря  $\omega$  на стенке трубы при  $W = 1$  для случаев, когда  $Re$ ,  $We$ ,  $M$ ,  $R_c$ ,  $R_v$  равны: для линии 1 — 4; 0,0016;  $4,6 \cdot 10^{-8}$ ; 1,07; 17,8; 2 — 40; 0,0054;  $\sim 10^{-11}$ ; 0,93; 50,1; 3 — 100; 0,0014;  $\sim 10^{-13}$ ; 0,42; 85. Величина отрицательных пиков  $\omega$  примерно в 2 раза меньше, чем при соответствующих значениях параметров для  $W = 0,5$ . Области характерных типов течений и изолинии  $Fr$  представлены на рис. 7. В целом поведение их аналогично случаю  $W = 0$ . Вертикальные линии, показывающие области с определенным типом деформации, сдвинулись несколько влево. В области сферических пузырей имеется линейная зависимость  $Fr = k_4 Re$  ( $k_4 = 0,000055$ ). Значения  $Fr$  в соответствующих точках рис. 7 и рис. 9 в [6] возросли примерно в 3 раза для больших  $Re$  (где линии  $Fr = const$  немонотонны) и в 5—6 раз для малых  $Re$  ( $R_v < 5$ ). Скорость всплытия пузырей при больших  $Re$  чуть меньше  $u_0 + u_c$ . В области сферических пузырей, где происходит увеличение зазора между стенками пузыря и трубы,  $u$  несколько выше  $u_0 + u_c$ . Более точную оценку можно получить из сравнения диаграмм для разных  $W$ .

**5. Обсуждение результатов.** Представленные в работе расчетные данные несут подробную информацию о структуре течений жидкости около пузыря при движении ее в вертикальной трубе и отвечают случаю, когда влияние стенок на формирование следа будет определяющим. Это следует из того, что течения практически одинаковы уже на расстоянии 1—1,5 калибра трубы от пузыря. Построенные диаграммы режимов течений позволяют вычислить скорость всплытия пузыря, величину расхода прокачиваемой жидкости для трубы данного радиуса и соответствующего ( $\lambda$  фиксировано) размера пузыря. Также легко проследить общие закономерности, связанные с увеличением прокачиваемого расхода. Поскольку диаграммы и линии  $Fr = const$  имеют ту же структуру, что и в случае всплытия пузыря в покоящейся жидкости [6], то зависимость скорости всплытия пузыря от  $a$  будет иметь локальный максимум и по мере приближения значения  $a$  к  $R_T$  определяться суммой  $u_0 + u_c$ . Для капиллярных трубок  $R_T < \delta_c = (\sigma/\rho g)^{1/2}$ , поскольку при  $\lambda$ , близких к единице,



Р и с. 6



Р и с. 7

пузыри практически стоят, скорость их всплытия диктуется среднерасходной. В этих случаях пузырь играет роль поршня. При расчетах с  $W = 1,5$  ( $\lambda = 0,8$ ) даже для сферических пузырей равнодействующая сил, действующих на пузырь, направлена вверх — пузырь совершает нестационарное всплытие.

Приведем одно сравнение, характеризующее влияние прокачивания жидкости на течение в трубе данного радиуса при всплытии пузыря заданного размера. Возьмем на диаграмме точку с координатами  $R_\sigma = 0,4$ ,  $R_v = 8$ , отвечающую жидкости с  $M = 1,65 \cdot 10^{-8}$ . Для  $\lambda = 0,8$  в случае всплытия пузыря в трубе с покоящейся жидкостью ( $W = 0$ )  $Fr_0 = 0,076$  [6] ( $Re \approx 13$ ). Для  $W = 1$  имеем  $Fr_1 = 0,77$  ( $Re = 40$ ). В обоих случаях пузырь примерно одинаково деформирован с отношением поперечного и продольного размеров  $\chi = 1,03$ . Сравним размерные значения  $\omega$  (и трения  $\tau$ ) на стенке трубы. Когда  $W = 0$ , всюду вне створа пузыря значение  $\omega$  мало и вдали от него равно нулю. В области узкого зазора имеется всплеск  $\omega$ , максимальная (по модулю) величина которого в безразмерном виде  $\omega_0 \approx 1,6$ . При  $W = 1$  вне створа пузыря вихрь  $\omega$  выходит на положительную константу, соответствующую течению Пуазейля, а в области узкого зазора всплеск  $\omega$  имеет значение (по модулю)  $\omega_1 \approx 0,47$ . Учтявая, что обезразмеривание проведено по скорости всплытия пузыря, которая в каждом случае своя, получим отношение размер-

ных величин  $\omega'$  в точке их наибольших (по модулю) значений  $\frac{\omega'_1}{\omega'_0} =$   
 $= \frac{\omega_1 u_1}{\omega_0 u_0} = \frac{0,47}{1,6} \sqrt{\frac{Fr_1}{Fr_0}} \approx 0,95 < 1$ . Таким образом, пик вихря  $\omega$  (а значит,

и  $\tau$ ) у малодеформированных пузырей не возрастает, если всплытие происходит в восходящем потоке. В области деформированных пузырей ( $R_\sigma = 1$ ,  $R_v = 10$ , при  $W = 0$  степень деформации  $\chi = 1,17$  и несколько больше при  $W = 1$ ) аналогичное отношение  $\omega'_1/\omega'_0 \approx 1,1$ . Наличие восходящего потока приводит к увеличению пика трения в узком зазоре между пузырем и стенкой трубы. Сравнения расчетов для  $\lambda = 0,98$  дают такие же соотношения для  $\omega'$  в областях сферических и деформированных пузырей.

Скорость всплытия  $u = (ga Fr)^{1/2}$ . Поскольку  $R_\sigma = a/\delta_\sigma = 0,4$ , то  $a = 0,4\delta_\sigma$ . Капиллярная постоянная для многих жидкостей  $\delta_\sigma \approx 0,3$  см, подставляя ее в формулу для  $u$ , имеем  $u \approx 3$  см/с. Для деформированного пузыря  $R_\sigma = 1$ , значит,  $a = 0,3$  см и  $u = 10,2$  см/с ( $Fr = 0,36$ ). Среднерасходная скорость прокачивания соответственно 1,5 и 5,1 см/с, а диаметр трубы в первом случае равен 3 мм, во втором — 7,5 мм. Для выяснения характеристик течения заданной жидкости при движении ее в трубе приведенного радиуса с заданной величиной расхода при увеличении размеров пузыря из представленных расчетных результатов можем получить не более двух точек. Это связано с тем, что в принятом способе обезразмеривания только знание параметров  $Re$ ,  $We$ ,  $Fr$  позволяет указать, для какой конкретной жидкости найдены результаты. Поскольку один из них ( $Fr$ ) является определяемым, то получить значения для наперед заданной жидкости не представляется возможным. Для этой цели необходимо либо воспользоваться алгоритмом, разработанным ранее на основе используемого здесь [7], для решения задачи всплытия пузыря в конкретной жидкости, либо провести более подробные расчеты по параметрам  $W$ ,  $\lambda$ ,  $Re$ ,  $We$  и путем интерполяции найти значения для интересующей жидкости.

Результаты расчетов можно применять при моделировании течений всплытия пузыря в погружном канале. В самом деле, в погружном канале — трубе, открытой с обоих концов, полностью опущенной в жидкость, пузырь при всплытии будет толкать ее, таким образом, он всплывает в жидкости, движущейся снизу вверх. Расход жидкости в трубе определяется выталкивающей силой и трением ее о стенки. Для очень длинных

трубок будем иметь случай покоящейся жидкости ( $W = 0$ ). По мере ускорения их происходят как переток жидкости, так и движение ее в трубе (течение при некотором  $W$ ). Если в трубе несколько пузырей, то суммарная сила Архимеда будет большей и цепочка пузырей может всплывать в погруженной трубе с большой скоростью в отличие от задачи при высунутом конце трубы (тушиковом канале). Как показывают расчеты, при  $\lambda$ , близком к единице, переток даже небольшого количества жидкости через узкий зазор между стенками пузыря и трубы вызывает огромное местное сопротивление в районе пузыря. Поэтому проталкивание жидкости в затопленном канале происходит тогда, когда нет резких перепадов трения на стенке, т. е. при «поршневом режиме движения», реализуемом при определенной скорости всплытия. Согласно приведенным расчетам, это будет для  $W > 1$ . Приближенную оценку скорости проталкивания можно получить из следующих соображений. Расход жидкости в зазоре в случае всплытия пузыря в трубе с высунутым концом известен и равен  $u_0 s$  ( $s$  — миделево сечение пузыря). Это количество должно перетечь через кольцевой зазор, площадь которого равна  $s_T - s$  ( $s_T$  — площадь сечения трубы). Тогда средняя скорость жидкости в зазоре  $W_c = u_0 s / (s_T - s)$ . Это приближенно та среднерасходная скорость, с которой должна двигаться жидкость на входе и выходе трубы, чтобы реализовался «поршневый режим течения». Для  $\lambda = 0,98$  имеем  $W_c = u_0 \lambda^2 / (1 - \lambda^2) = 24u_0$  (сферический пузырь). При  $\lambda = 0,8$  получим  $W_c = (16/9)u_0$  ( $u_0$  можно определить из [6]). При меньших  $\lambda$ , как видно из рис. 2 и [6], отрицательные пики трения не столь велики и вклад их в общее сопротивление жидкости о стенки трубы может быть мал. Оценим  $W$  для «поршневого режима течения». В этом случае объем проталкиваемой жидкости  $us = u_c s_T$ , тогда  $u_c = u\lambda^2$  или  $W = 2\lambda^2$ . При  $\lambda = 0,8$   $W = 1,28$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рагулин В. В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отд-ние. Ин-т гидродинамики.*— 1976.— Вып. 27.
2. Cagnet G., Lebouche M., Souhar M. Utilisation des techniques électrodynamiques pour la mesure de frottement pariétal dans les écoulements diphasiques // *Houille blanche.*— 1978.— N 5.
3. Кашинский О. Н., Козьменко Б. К., Кугателадзе С. С., Накоряков В. Е. Исследование напряжения трения на стенке в восходящем снарядном течении // *ПМТФ.*— 1982.— № 5.
4. Nakorjakov V. E., Kashinsky O. N., Kozmenko B. K. Experimental study of gas liquid slug flow in a small-diameter vertical pipe // *Intern. J. Multiphase Flow.*— 1986.— V. 12, N 3.
5. Волков П. К., Кузнецов Б. Г. Численное решение задачи о стационарном обтекании вязкой жидкостью газовой полости в трубе // *ЧММСС.*— 1982.— Т. 13, № 5.
6. Волков П. К. Всплывание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // *ПМТФ.*— 1989.— № 6.
7. Волков П. К. Алгоритм численного решения задачи стационарного обтекания пузыря заданной жидкостью // *Тр. IX Всесоюз. шк.-семина. «Численные методы динамики вязкой жидкости».*— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983.

г. Новосибирск

Поступила 28/III 1989 г.,  
в окончательном варианте — 26/IV 1990 г.

УДК 533.6.011

В. И. Запругаев, А. В. Солотчин

### ТРЕХМЕРНАЯ ОСОБЕННОСТЬ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕДОРАСПИРЕННОЙ СТРУЕ

На шпирен-снимках сверхзвуковых неизобарических струй, истекающих из осесимметричного сопла в затопленное пространство, отчетливо видны продольные полосы, на происхождение которых в литературе не имелось ответа. Сопоставление наблюдаемых продольных полос в струе с аналогичными полосами, возникающими при