ЛУЧЕИСПУСКАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ И СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТЕМПЕРАТУРОЙ ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНОВ ОПТИЧЕСКИ ПРОЗРАЧНОЙ ПЛАЗМЫ

***Н. М. Кузнецов** (Москва)*

Получено уточненное выражение среднего коэффициента поглощения водородоподобной плазмы, переходящее в известную формулу для свободно-свободного поглощения в пределе полной ионизации.

Рассмотрено соотношение между температурой электронов T и ионов T_i в оптически тонкой плазме. Лучистые потери энергии плазмы приводят к нарушению равенства между T и T_i. Значительное отклонение отношения T / T_i от единицы при заданном постоянном T_i в случае воздуха и более тяжелых газов наступает при $T > 10^5$ °K.

В плазме, охлаждающейся излучением, отклонение T / T_i от единицы при тех же значениях T примерно на порядок меньше, чем в стационарном случае. Количественные данные о зависимости T от T_i получены для воздушной плазмы.

1. Постановка задачи. Радиационные потери приводят к нарушению термодинамического равновесия в оптически тонкой среде, что в свою очередь сказывается на излучательных свойствах среды. Нарушение термодинамического равновесия в малом объеме с заданной плотностью выражается либо в том, что заселенности u_l энергетических уровней l вообще не могут быть описаны равновесными соотношениями Максвелла, Больцмана, Саха и др., либо эти соотношения остаются в силе не для всех, а лишь для отдельных групп u_l. В частности, заселенность возбужденных электронных состояний (связанных или свободных) в излучающей плазме уменьшается либо существенно неравновесным образом, либо путем уменьшения электронной температуры T относительно температуры тяжелых частиц T_i. Вопрос об уменьшении u_l в излучающем газе при заданной T рассмотрен в работах [1, 2]. В работе [1] на примере оптически тонкой водородной плазмы показано, что для свободных электронов отношение $y \equiv u_l / u_l^*$, где u_l^* — равновесное значение u_l при температуре T, много меньше единицы в тех случаях, когда «плотность» числа свободных электронов N_e мала. Например, при нормальном давлении водородной плазмы $y = 2 \cdot 10^{-5}$ при $T = 5000$°K (малая степень ионизации) и $y = 0.84$ при $T = 15000$ °K. Величина N_e, при которой выполняется условие локального термодинамического равновесия электронных состояний

$$y = 1 \tag{1.1}$$

в многократно ионизированном газе значительно больше, чем при однократной ионизации. Это связано с тем, что сечение ударного возбуждения и ионизации электронами убывает примерно как $(z + 1)^{-3}$ ($z = 0$ для нейтрального атома, $z = 1$ для однократно ионизированного атома и т. д.) [2], а вероятность спонтанного излучения возрастает пропорционально $(z + 1)^4$, [3].

Согласно [2], равновесное отношение между заселенностью уровней с главным квантовым числом n водородоподобного иона и свободных электронов в прозрачной плазме имеет место в том случае, если

$$N_e \geqslant 7 \cdot 10^{18} \frac{(z+1)^7}{n^{17/2}} \left(\frac{kT}{I_z}\right)^{1/2} см^{-3} \tag{1.2}$$

Здесь I_z — потенциал ионизации водородоподобного иона с зарядом z — 1.

Соотношение (1.1) практически всегда выполняется для больших n, но для первых возбужденных уровней это довольно жесткое условие. Так, для полностью ионизированного воздуха нормальной плотности неравенство (1.2) выполняется лишь при $n \geqslant 4$. Однако часто представляет интерес плазма, оптически тонкая относительно свободно-свободного и свободно-связанного излучения, и непрозрачная для резонансного излучения с низковозбужденных уровней [3, 4], не удовлетворяющих (1.1) (низкотемпературная плазма, например, обычно непрозрачна по отношению к серии Лаймана). Если излучение с первого возбужденного уровня существенно реабсорбируется, то согласно [2] соотношение (1.1) во всяком случае выполняется при условии

$$N_e \geqslant 10^{17} z^7 \left(\frac{kT}{I_z}\right)^{1/2} \left(\frac{E_2 - E_1}{I_z}\right)^3 см^{-3} \tag{1.3}$$

E_2 и E_1 — энергии уровней с $n = 2$ и $n = 1$. Если плазма непрозрачна и для некоторых других резонансных квантов, то неравенство типа (1.3) становится менее жестким [2]. Опыты с искрой [5] и с ударными волнами [6] также показывают, что в нагретом газе, прозрачном относительно свободно-свободного и свободно-связанного излучения, имеется зона, где выполняется соотношение (1.1)

Что касается температуры электронов, то она и при условии (1.1) может быть не равна температуре ионов в излучающем газе. Представляет интерес рассмотреть этот вопрос количественно.

Далее исследуются излучающая способность высокотемпературного пространственно однородного газа и связь между T и T_i в стационарной (при заданном значении T_i) и в охлаждающейся плазмах, удовлетворяющих условию (1.1) и прозрачной для свободно-связанного и свободно-свободного излучения [1]. Будет показано, что в воздухе или более тяжелом газе неравенство

$$(T_i - T) \ll T \tag{1.4}$$

не выполняется при $T > 10^5$ °K.

2. Стационарное состояние плазмы. Рассмотрим соотношение между электронной и ионной температурами в излучающей плазме, в которой каким-либо образом поддерживается постоянная температура ионов T_i. Значение электронной температуры T, как функции T_i, определяется из условия равенства потоков энергии излучения и энергии, приобретаемой электронами при столкновениях с тяжелыми частицами и равной

$$3\,Nkz\,(T_i - T)\,/\,2\,\tau \qquad (\tau = 252\,AT^{7/2}/z^2\,N\Lambda) \tag{2.1}$$

Здесь N — плотность числа тяжелых частиц, τ—время электронно-ионной релаксации, A — атомный вес иона, Λ — кулоновский логарифм. В случае смеси ионов z имеет смысл среднего заряда иона, равного числу свободных электронов, приходящихся на одну тяжелую частицу (за единицу заряда иона принят заряд электрона).

Выражение (2.1) получается с помощью известного релаксационного уравнения Ландау. При этом предполагается, что релаксационный процесс не приводит к нарушению максвелловского распределения свободных электронов по скоростям. Такое предположение вполне оправдано, так как в рассматриваемой задаче охлаждение плазмы излучением и нагревание электронов при соударениях с ионами является медленным по сравнению со временем установления максвелловского распределения электронов $\tau_e = z\tau m\,/\,\mu$; здесь m и μ — массы электрона и иона. Заметное нарушение распределения Максвелла электронов было бы в случае $T_i \gg T$, для чего нужны чрезвычайно высокие температуры. При всех температурах, рассматриваемых далее $(T_i - T) \lesssim T$.

Поток энергии излучения [3] (мощность излучения единицы объема газа) равен

$$4\sigma T^4 \varkappa\,(T) \tag{2.2}$$

здесь $\varkappa$ — средний коэффициент поглощения, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Связь между T и T_i в количественном отношении зависит от природы газа и далее будет рассмотрена применительно к воздушной плазме. Но сначала проанализируем в более грубом приближении закономерности, присущие всем газам.

Для этого обратимся к приближенному выражению [3] коэффициента поглощения [2]

$$\varkappa = 9 \cdot 10^{-24} \frac{N^2\,(z-1)\,z^2}{T^{7/2}} \left(\frac{I_z}{kT}\right) \tag{2.3}$$

Здесь I_z — потенциал ионизации ионов со средним зарядом $z - 1$. Предварительно нужно произвести некоторое уточнение формулы (2.3). Это уточнение, как будет видно далее, не очень существенно при $I_z / kT > 1$, но оно необходимо для правильного описания $\varkappa$ водородоподобных ионов и для предельного перехода к $\varkappa$ полностью ионизированной плазмы при $I_z\,/\,kT < 1$. Следует отметить, что вместо (2.2) и (2.3) можно было бы с самого начала использовать данные [7], полученные путем непосредственного вычисления радиационных потерь водородоподобной плазмы за счет тормозного и рекомбинационного излучения. Представляется, однако, интересным, по крайней мере в методическом отношении, найти радиационные потери (2.2), вычислив сначала $\varkappa$.

3. Средний коэффициент поглощения водородоподобной плазмы. Формула (2.3) получается в результате усреднения по частотам спектрального коэффициента $\varkappa_\nu$ водородоподобного иона с последующим преобразованием результата вычисления при помощи формулы Саха для иона со средним зарядом [3]. При этом вклад тормозного поглощения в $\varkappa$ учитывается лишь соотношением Крамерса — Унзольда [3,8] (3.1)

$$\varkappa_\nu = \frac{aN_{z-1}z^2}{T^2x^3} \exp\left(x - \frac{I_z}{kT}\right), \quad h\nu < I_z, \quad a = 0.96 \cdot 10^{-7}\ см^2\ град^2, \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

---

[1] Для дальнейшего исследования связи между T и T_i выполнение условия (1.1) требуется лишь в той мере, в какой это нужно, для того чтобы концентрация свободных электронов описывалась уравнением Саха с электронной температурой и чтобы основное излучение плазмы было свободно-свободным и свободно-связанным.

[2] Формула из [3] здесь приведена в несколько уточненном виде, получающемся при замене m в [3] на $z - 1$. Последовательное применение метода [3] с учетом того, что максимум функции $N_m \exp\,(-I_m/kT)$ не совпадает с максимумом N_m и находится в точке $m = z - 1$, приводит при $z > 1$ к (2.3). Это обстоятельство существенно для подстановки в (2.3) правильного значения I_z.

полученным для мягких квантов с энергией $h\nu \ll I_z$. Кроме того, при выводе (2.3) формула (3.1) применяется во всем диапазоне $h\nu < I_z$.

Для правильного перехода к $\varkappa_\nu$ полностью ионизированной плазмы нужно учесть все свободно-свободные переходы и отказаться от использования (3.1) в области частот, не удовлетворяющих условию $h\nu \ll I_z$. Спектральный коэффициент связанно-свободного и свободно-свободного поглощения [3] равен (3.2)

$$\varkappa_\nu = \frac{2az^2N_{z-1}}{T^2x^3}\left[\sum_{n=n^*}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,e^{x_n-x_1}+\frac{1}{2x_1}\,e^{-x_1}\right] \qquad \left(x_1=\frac{I_z}{kT},\quad x_n=\frac{x_1}{n^2},\quad h\nu \geqslant \frac{x_1}{(n^*)^2}\right)$$

Формула (3.1) получается из (3.2) путем замены суммы по n интегралом. Вклад малых n при таком подходе к вычислению $\varkappa$ следует учитывать отдельно. Вычисление $\varkappa$, однако, оказывается более простым, если совсем не использовать (3.1) и проинтегрировать (3.2) по частотам [7] до суммирования по n. Интегрирование (3.2) по частотам (по x с весовым [3] множителем 15 x^3e^{-x}/π^4) и суммирование по всем сортам ионов дает

$$\varkappa = \frac{30a}{\pi^4T^2}\sum_{i=1}^{z_{\max}} N_{i-1}i^2\left(x_1S+\frac{1}{2}\right)e^{-x_1}, \qquad S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\approx 1.2 \tag{3.3}$$

Формула (3.3) отличается от аналогичного выражения в [3] множителем $^2/_3$ перед знаком суммы и дополнительным слагаемым $^1/_2$ в квадратной скобке. Комбинируя (3.3) с уравнением Саха

$$N_eN_i = 4.85\cdot 10^{15}\,\frac{g_i}{g_{i-1}}\,T^{3/2}e^{-x_1}N_{i-1}$$

с учетом того, что для водородоподобного иона отношение электронных статистических сумм $g_1 / g_{i-1} \approx 1/2$, найдем после усреднения суммы по i

$$\varkappa \approx 6.2\cdot 10^{-24}\,N^2z^3T^{-7/2}\,(2\,x_1S+1) \tag{3.4}$$

Уточненная таким путем формула для $\varkappa$ после умножения на $4\,\sigma T^4$ совпадает с соответствующим выражением, полученным в [7], если последнее усреднить по зарядам ионов. Этот результат вполне естествен в силу закона Кирхгофа и того, что вычисление излучательной способности [7] основано на том же водородоподобном приближении.

4. **Связь между температурой электронов и ионов в стационарной плазме.** Перейдем теперь к непосредственному вычислению искомой зависимости T от T_i при стационарном состоянии плазмы.

Приравнивая (2.1) и (2.2) с учетом (3.4) и значений постоянных σ и k, найдем

$$\theta \equiv \frac{T_i-T}{T} = \frac{8\sigma T^3\varkappa\tau}{3zNk} \approx 3.5\cdot 10^{-9}\,\frac{AT}{\Lambda}\left(\frac{SI_z}{kT}+\frac{1}{2}\right) \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что для водорода $\theta \sim 1$ лишь при чрезвычайно высоких температурах $T \sim 10^{10}$ °K (при таких температурах для водородной плазмы $\Lambda \sim 10$). Однако для других элементов соответствующее значение T намного меньше вследствие $A \gg 1$, $I_z / kT \gg 1$ и уменьшения Λ. Так, для аргона нормальной плотности $\theta \approx 1$ при $T \approx 5\cdot 10^5$—10^6 °K (при этом $I_z / kT \approx 10$, $\Lambda \sim 1$). Такие результаты получаются при использовании приближенной формулы (3.4). В действительности, условие (1.4) может быть нарушено при температурах, в несколько раз меньших. Дело в том, что формула (3.4) для водородоподобной плазмы приводит к несколько меньшим значениям $\varkappa$, чем более точная формула (3.3), поскольку при переходе от (3.3) к (3.4) в формуле Саха не учитывается вклад возбужденных электронных уровней в электронную статистическую сумму иона.

Ниже приведем результаты вычисления θ в зависимости от T для воздушной плазмы нормальной плотности, а также соответствующие значения среднего заряда и кулоновского логарифма; при вычислении были использованы данные о z и $\varkappa$ воздуха [9]; коэффициент $\varkappa$ вычислен в [9] по интегральной формуле Крамерса — Унзольда [8], которая при $I_z / kT > 1$ незначительно отличается от (3.3)

$T\cdot 10^{-6}$ °K =	3.0	2.0	1.0	0.8	0.65	0.50	0.30	0.20	0.16	0.10	0.08
z =	7.2	7.2	6.8	6.2	5.6	5.2	5.0	4.5	3.9	3.1	2.4
Λ =	3.2	2.6	1.7	1.7	1.6	1.5	0.8	0.53	0.64	0.59	1.0
$\varkappa$(*см*$^{-1}$) =	$6.1\cdot 10^{-3}$	$1.9\cdot 10^{-2}$	0.16	0.32	0.87	2.7	12	26	28	45	54
θ =	0.98	0.62	0.41	0.42	0.61	0.82	0.67	0.53	0.27	0.11	0.06

Отсюда видно, что отличие T от T_i становится заметным при $T = 10^5$ °K и, достигая при $2\cdot 10^5$ °K величины ~ 0.5, мало меняется с возрастанием T до $2\cdot 10^6$ °K. Рост

θ при дальнейшем увеличении температуры воздушной плазмы с хорошей точностью описывается уравнением (4.1). Вся зависимость θ от плотности газа заключена в кулоновском логарифме. При уменьшении плотности различие между T и T_i уменьшается вследствие увеличения кулоновского логарифма.

5. **Охлаждающая плазма.** Для определения зависимости T и T_i от времени лучистого охлаждения нужно, вообще говоря, решать систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно T и T_i. Однако задача с хорошей точностью может быть решена приближенно. Это связано с тем, что теплоемкость электронного газа, включающая и теплоемкость ионизации в многократно ионизированном газе, значительно больше теплоемкости газа тяжелых частиц, вследствие чего электронный газ охлаждается достаточно медленно, так что температура ионов успевает «подстраиваться» к T. Полагая в первом приближении $dT_i / dt = dT / dt$, найдем

$$dT_i / dt = 4\,\sigma T^4 \varkappa / C_v \qquad (5.1)$$

Здесь C_v — равновесное значение теплоемкости при постоянном объеме плазмы, имеющей температуру T, t — время.

Подстановка (5.1) в релаксационное уравнение для ионной температуры, имеющее вид

$$dT_i / dt = z\,(T - T_i) / \tau$$

дает

$$\theta = 4\,\sigma T^3 \varkappa \tau / (z C_v) \qquad (5.2)$$

Сравнивая (5.2) с уравнением (4.1) для стационарного режима, видим, что величина θ в охлаждающейся плазме в $2\,C_v / (3\,Nk)$ раз меньше, чем при тех же значениях T в стационарном режиме. В полностью ионизированной плазме это отношение равно $z + 1$, а при неполной ионизации оно больше $z + 1$ вследствие вклада в C_v «теплоемкости ионизации» и возбуждения электронных уровней связанных состояний.

Если в начальный момент охлаждения плазмы $T = T_i = T_0$, то выход на режим (5.2) происходит за время Δt остывания плазмы до

$$T \approx T_0 - 4\,\sigma T_0^4 \varkappa \tau / (z C_v), \qquad T_i \approx T_0$$

Из (5.1) и (5.2) следует, что $\Delta t \approx \tau / z$.

Ниже приведены значения $2\,C_v / 3\,Nk$, вычисленные по [9], и θ в охлаждающейся воздушной плазме нормальной плотности при тех же T, что и в стационарном случае.

$T \cdot 10^{-6}$ (°K) = 3	2	1.0	0.8	0.65	0.5	0.3	0.2	0.16	0.1	0.084
$2c_v/3Nk$ = 7.8	7.9	21	28	24	11	8.1	14	17	15	14
θ = 0.13	0.087	0.02	0.015	0.025	0.074	0.083	0.038	0.016	0.007	0.004

Отсюда видно, что величина θ на порядок меньше, чем в соответствующих стационарных состояниях (см. выше), и при всех температурах, меньших $2 \cdot 10^6$ °K, не превышает 9%.

Поступила 21 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Биберман Л. М. и Ульянов К. Н. Влияние выхода излучения на отклонение от термодинамического равновесия. Оптика и спектроскопия, 1964, т. 16, № 3.
2. Griem H. Validity of local thermal eguilibrium in plasma spectroscopy. Phys. Rev. 1963, vol. 131, No. 3.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.
4. Сб. «Атомные и молекулярные процессы» под ред. Бейтса Д. Изд. «Мир», 1964.
5. Мандельштам С. Л., Суходрев Н. К. Элементарные процессы в канале искрового разряда. ЖЭТФ, 1953, т. 24, вып. 6.
6. Петрухин А. И., Проскуряков В. А. Температура и концентрация заряженных частиц за фронтом сильной ударной волны в воздухе. Ж. эксперим. и теор. физ. 1966, т. 50, № 6.
7. Griem H. Plasma Spectroscopy. McGrawHill Company, New York, 1964.
8. Унзольд А. Физика звездных атмосфер, Изд. иностр. лит. 1949.
9. Кузнецов Н. М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. Изд. «Машиностроение», 1965.