$$\varphi_3 = K_1 \frac{H_2 - H_1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda Q} e^{\lambda(y-y_1)} \sin \lambda x \, d\lambda + \frac{H_1 + H_2}{2}.$$

Здесь $a = K_3 - K_1 + \lambda A$, $Q = (K_3 + \lambda A)s + K_1 c$ для трещины с параметром A и $a = K_3 - K_1 - K_1 K_3 \lambda B$, $Q = K_3 s + K_1 c(K_3 \lambda B + 1)$ для завесы с параметром B; $s = \operatorname{sh} \lambda |y_1|$; $c = \operatorname{ch} \lambda y_1$. Отсюда, в частности, следует, что горизонтальная трещина $y = y_1$ увеличивает, а завеса $y = y_1$ уменьшает скорость фильтрации на линии бьефов, при этом потенциал на трещине и поток на завесе непрерывны, что согласуется с другими моделями трещины [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арье А. Г.** Физические основы фильтрации подземных вод.— М.: Недра, 1984.
2. **Буйкис А. А.** Моделирование процессов фильтрации в слоистых средах методом консервативного осреднения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Рига, 1987.
3. **Голубева О. В.** Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1966.— № 1.
4. **Чемерис А. Н., Шпилевой А. Я.** О построении фильтрационных течений в неоднородных средах // Проблемы теоретической гидродинамики.— Тула: ТГПИ, 1977.
5. **Ярмицкий А. Г.** Фильтрационная теорема о двух окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 4.
6. **Пилатовский В. П.** Основы гидромеханики тонкого пласта.— М.: Недра, 1966.
7. **Копаев А. В., Радыгин В. М.** Фильтрационные теоремы об окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 1.
8. **Берс Л.** Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.— М.: ИЛ, 1961.
9. **Сансоне Д.** Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: ИЛ, 1953.

г. Брянск *Поступила 20/VI 1990 г.*

УДК 532.533

Э. Г. Азнакаев

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

В работе проводится описание процессов переноса в многокомпонентных смесях плотных газов и жидкостей. Используется метод описания процессов переноса в плотных средах, впервые предложенный в [1].

1. Исходная система уравнений и постановка задачи. При описании процессов переноса в многокомпонентных плотных смесях примем следующую модель:

— частицы среды считаются бесструктурными с массой m_i и диаметром σ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$ — номер компонента смеси, m — число компонентов смеси);

— все компоненты смеси характеризуются одной температурой T и массовой скоростью $\mathbf{u}$;

— рассматривается парный механизм взаимодействия частиц. Потенциал парного межмолекулярного взаимодействия частиц i-го и j-го сортов $\varphi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ определяется в виде суммы потенциалов твердых сфер $\varphi_{\text{т.с}\, ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ и дальнодействующей притягивающей части межмолекулярного потенциала $\Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ [2]:

$$\varphi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \begin{cases} \varphi_{\text{т.с}\, ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < \sigma_{ij}, \\ \Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \geqslant \sigma_{ij}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ — пространственные координаты частиц i-го и j-го сортов; $\sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$ — расстояние между частицами i-го и j-го сортов при их контакте.

Исходное уравнение для одночастичной функции распределения $f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$ i-го компонента смеси имеет вид

$$(1.2)\quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_i} - m_i^{-1} \sum_{j=1}^{m} \int\int \frac{\partial \Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial f_{2ij}}{\partial \mathbf{v}_i} d\mathbf{r}_j \, d\mathbf{v}_j = J_{\text{ст}\,i},$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость i-й частицы среды; t — время; $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t)$ — внешняя сила, действующая на частицу i-го сорта; $f_{2ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j, t)$ — двухчастичная функция распределения:

$$f_{2ij} = f_i f_j G_{ij}.$$

Здесь $G_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)$ — парная корреляционная функция пары частиц; $J_{\text{ст}\,i}$ — интеграл столкновений в модели твердых сфер:

$$J_{\text{ст}\,i} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^2 \int\limits_{(\mathbf{v}_{j,i}\cdot\mathbf{e}) \geqslant 0}\int (\mathbf{v}_{j,i}\cdot\mathbf{e}) \{ f'_{2ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}'_i, \mathbf{r}_i + \sigma_{ij}\mathbf{e}, \mathbf{v}'_j, t) -$$
$$- f_{2ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i - \sigma_{ij}\mathbf{e}, \mathbf{v}_j, t)\} d\mathbf{e}\, d\mathbf{v}_j;$$

штрих — значение функций после столкновения; $\mathbf{e}$ — единичный вектор; $\mathbf{v}_{j,i} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$.

При представлении межмолекулярных взаимодействий в виде (1.1) интеграл столкновений, входящий в уравнение (1.2), представляется в виде суммы вкладов от взаимодействий частиц с потенциалом твердых сфер $\varphi_{\text{т.с}ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ и вкладов от взаимодействий частиц с дальнодействующей притягивающей частью межмолекулярного потенциала, определяемых последним членом в левой части уравнения (1.2). Подобное представление интеграла столкновений рассматривалось в [2] и обосновано в [3].

Беря в качестве парной корреляционной функции G_{ij} ее равновесное значение G_{0ij} и учитывая центральный характер межмолекулярного потенциала $\Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$, представим левую часть уравнения (1.2) как

$$(1.3)\quad Df_i \equiv \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_i} + m_i^{-1}\left(\mathbf{F}_i - \frac{\partial \mathcal{U}_{\text{эф}\,i}}{\partial \mathbf{r}_i}\right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i}$$

$$\left(\mathcal{U}_{\text{эф}\,i}(\mathbf{r}_i, t) = n_i(\mathbf{r}_i, t) \int \Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) G_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)\, d\mathbf{r}_j\right),$$

а правую — в виде

$$(1.4)\quad J_{\text{ст}\,i} = \sigma_{ij}^2 \int\limits_{(\mathbf{v}_{j,i}\cdot\mathbf{e}) \geqslant 0}\int (\mathbf{v}_{j,i}\cdot\mathbf{e}) \{ G_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i + \sigma_{ij}\mathbf{e}, t) \times$$
$$\times f'_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}'_i, t) f'_j(\mathbf{r}_i + \sigma_{ij}\mathbf{e}, \mathbf{v}'_j, t) - G_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i - \sigma_{ij}\mathbf{e}, t) \times$$
$$\times f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) f_j(\mathbf{r}_i - \sigma_{ij}\mathbf{e}, \mathbf{v}_j, t)\} d\mathbf{v}_j\, d\mathbf{e}.$$

Переходя к безразмерным переменным в уравнении (1.2) и приравнивая выражения (1.3) и (1.4), получим

$$(1.5)\quad Df_i = \varepsilon^{-1} J_{\text{ст}\,i}.$$

Здесь $\varepsilon = (nr_0^2 L)^{-1} = l/L = \text{Kn}$; ε — параметр, определяющий степень неоднородности системы, имеющую порядок величины градиентов гидродинамических переменных; n — плотность числа частиц; r_0 — эффективный радиус межмолекулярного взаимодействия; L — характерный линейный макроскопический размер течения; $l = (nr_0^2)^{-1}$; Kn — число Кнудсена. Этот параметр практически для всех течений плотного газа и жидкости мал ($\varepsilon \ll 1$) и поэтому при нахождении решения системы уравнений (1.5) в гидродинамическом режиме можно строить решение в форме разложения по малому параметру ε.

2. Гидродинамическая асимптотика решений системы уравнений (1.5). Решение системы уравнений (1.5) проводится методом Чепмена — Энскога [4], где в качестве малого параметра ε используются градиенты гидродинамических переменных. Решение в гидродинамическом режиме ищется как

$$f_i = f_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \Gamma_i(\mathbf{r}, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_i^{(n)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \Gamma_i(\mathbf{r}, t)) \tag{2.1}$$

($\Gamma_i(\mathbf{r}, t)$ — средние значения гидродинамических переменных).

Подстановка представления (2.1) в выражение для $J_{\text{ст}\,i}$ (1.4) и разложение в нем подынтегральных членов в ряд Тейлора в окрестности точки с координатой $\mathbf{r}_i$ приводят к представлению правой части уравнения (1.5) в виде ряда по степеням ε:

$$J_{\text{ст}\,i} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n J_{\text{ст}\,i}^{(n)}. \tag{2.2}$$

Подставляем (2.1) в (1.3) и раскладываем эволюционный оператор в ряд по малому параметру ε. Это приводит (1.3) к выражению

$$Df_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (Df_i)^{(n)}. \tag{2.3}$$

С учетом (2.2) и (2.3) уравнение (1.2) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (Df_i)^{(n)} = \varepsilon^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n J_{\text{ст}\,i}^{(n)}. \tag{2.4}$$

Приравнивая в (2.4) члены при одинаковых степенях параметра ε, получаем уравнения для нахождения величин $f_i^{(n)}$, входящих в формулу (2.1), определяющую одночастичную функцию распределения.

Решаем уравнение (2.4) в нулевом приближении по градиентам гидродинамических величин: $0 = J_{\text{ст}\,i}^{(0)}$. Его решение, представляющее локально-равновесное решение уравнения (1.2), запишем как

$$\ln f_{ip}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) = m_i \alpha_i^{(1)} + \mathbf{v}_i \cdot m_i \boldsymbol{\alpha}_i^{(2)} + \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \mathcal{U}_{\text{эф}\,i}(\mathbf{r}_i, t) \right) \alpha_i^{(3)},$$

где $\mathcal{U}_{\text{эф}\,i}(\mathbf{r}_i, t)$ — энергия взаимодействия i-й частицы со всеми частицами смеси; $\alpha_i^{(1)}$, $\boldsymbol{\alpha}_i^{(2)}$, $\alpha_i^{(3)}$ — постоянные, подлежащие определению.

В результате имеем

$$f_{ip}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) = \bar{f}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) \exp\{-\mathcal{U}_{\text{эф}\,i}(\mathbf{r}_i, t)/kT(\mathbf{r}, t)\}.$$

Здесь k — постоянная Больцмана; $\bar{f}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$ — локально-равновесная максвелловская функция распределения; $T(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — локальные значения температуры и гидродинамической скорости. Для разрешимости неоднородных линейных интегральных уравнений системы (2.4) необходима ортогональность инвариантов интеграла столкновений $J_{\text{ст}\,i}$ к неоднородной части интегральных уравнений (2.4).

В нулевом приближении по градиентам термодинамических величин получаем уравнения гидродинамики типа Эйлера, в которых новые выражения для давления $p(\mathbf{r}, t)$ и удельной теплоемкости смеси при постоянном объеме $c_V(\mathbf{r}, t)$ имеют вид

$$p = \sum_{i=1}^{m} n_i k T J_i \left[1 + \frac{2\pi}{3} \sum_{j=1}^{m} n_j \sigma_{ij} J_j \times \right.$$
$$\left. \times G_{0ij}(\sigma_{ij}) \right] - \frac{2\pi}{3} \sum_{i,j=1}^{m} n_i n_j J_i J_j \int \Phi'_{0ij}(R) G_{0ij}(R) R^3 \, dR, \tag{2.5}$$

$$c_V = \frac{3}{2} k + (2nT)^{-1} \sum_{i,j=1}^{m} n_i n_j J_i J_j \int \Phi_{0ij}(R) G_{0ij}(R) \, d\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j,$$

где

$$J_i(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{-(kT)^{-1}\sum_{j=1}^{m} n_j(\mathbf{r}_i, t)\int \Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)\, G_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)\, d\mathbf{r}_j\right\};$$

$G_{0ij}(\sigma_{ij})$ — значение функции в точке контакта частиц i-го и j-го сорта; аргументы функций по возможности опущены.

Решение уравнения (1.2) в линейном по градиентам термодинамических величии приближении для одночастичной функции распределения запишем как

$$f_i = f_{ip}[1 + \Phi_i], \tag{2.6}$$

$$\Phi_i = \mathbf{A}_i \cdot \nabla \ln T - \widehat{B}_i : \nabla\mathbf{u} - n\sum_{k=1}^{m} \mathbf{G}_i^k \cdot \mathbf{d}_k.$$

Здесь $$\widehat{B}_i = B_i^{(1)}\left(\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \frac{1}{3}W_i^2 U\right) + B_i^{(2)} U;$$

$$\mathbf{A}_i = \sum_{r=0}^{\infty} a_{ir} S_{3/2}^{(r)}(W_i^2)\,\mathbf{W}_i;\quad B_i^{(1)} = \sum_{r=0}^{\infty} b_{ir}^{(1)} S_{5/2}^{(r)}(W_i^2);\; B_i^{(2)} = \sum_{r=0}^{\infty} b_{ir}^{(2)} S_{1/2}^{(r)}(W_i^2);$$

$$\mathbf{G}_i^k = \sum_{r=0}^{\infty} g_{ir}^{(k)} S_{3/2}^{(r)}(W_i^2)\,\mathbf{W}_i;\quad \mathbf{W}_i = (m_i/2kT)^{1/2}(\mathbf{v}_i - \mathbf{u});$$

U — единичный тензор; $S_m^{(n)}(W_i^2)$ — полиномы Сонина [4]; $\mathbf{d}_k(\mathbf{r}, t)$ — диффузионная термодинамическая сила k-го компонента смеси, определяемая обычным образом [4], в которой стоят новые значения для давления смеси и ее удельной теплоемкости (2.5).

Система линейных уравнений для нахождения коэффициентов a_{ir}, $b_{ir}^{(1)}$, $b_{ir}^{(2)}$, $g_{ir}^{(k)}$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{N-1} L_{ij}^{pq} a_{jq}(N) = -\frac{15}{4} n_i J_i (2kT/m_i)^{1/2}\left[1 + \frac{8\pi}{5}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}^3 n_j J_j G_{0ij}(\sigma_{ij}) \times m_{ij} m_{ji}\right]\delta_{p1}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{N-1} H_{ij}^{(1)pq} b_{jq}^{(1)}(N) = 5 n_i J_i (2kT/m_i)^{1/2}\left[1 + \frac{8\pi}{15}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}^3 n_j J_j G_{0ij}(\sigma_{ij})\, m_{ji}\right]\delta_{p0},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{N-1} H_{ij}^{(2)pq} b_{jq}^{(2)}(N) = n_i J_i (2kT/m_i)^{1/2} \times \left[1 + \frac{4\pi}{3}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}^3 n_j J_j G_{0ij}(\sigma_{ij})\, m_{ji} - \frac{3}{2} p\,(nTc_V)^{-1}\right]\delta_{p1},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=0}^{N-1} L_{ij}^{pq} g_{ir}^{(k)} = \frac{3}{2}(2kT/m_i)^{1/2}(\delta_{ik} - \rho_i/\rho)\,\delta_{p0},$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots, N-1,\quad m_{ij} = m_i/(m_i + m_j),$$

где $\sum_{q=0}^{N-1}$ обозначает N-й порядок приближения по полиномам Сонина. Величины, входящие в уравнения (2.7), определяются соотношениями

$$L_{ij}^{pq} = \delta_{ij}\sum_{l=1}^{m} n_i J_i n_l J_l \left[S_{3/2}^{(p)}(W_i^2)\,\mathbf{W}_i;\, S_{3/2}^{(q)}(W_i^2)\,\mathbf{W}_i\right]'_{il} +$$

$$+ n_i J_i n_j J_j \left[S_{3/2}^{(p)}(W_i^2)\,\mathbf{W}_i;\, S_{3/2}^{(q)}(W_j^2)\,\mathbf{W}_i\right]''_{ij},\quad L_{ij}^{pq} = L_{ji}^{qp},\quad \sum_{i=1}^{m} L_{ij}^{0q} m_i^{1/2} = 0,$$

$$H_{ij}^{(1)pq} = \delta_{ij} \sum_{l=1}^{m} n_i J_i n_l J_l \left[S_{5/2}^{(p)}(W_i^2)\left(\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \frac{1}{3} W_i^2 U\right);\quad S_{5/2}^{(q)}(W_i^2)\left(\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3} W_i^2 U\right)\right]'_{il} + n_i J_i n_j J_j \left[S_{5/2}^{(p)}(W_i^2)\left(\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i - \frac{1}{3} W_i^2 U\right),\right.$$

$$\left. S_{5/2}^{(q)}(W_j^2)\left(\mathbf{W}_j\mathbf{W}_j - \frac{1}{3} W_j^2 U\right)\right]''_{ij},$$

$$H_{ij}^{(2)pq} = \delta_{ij} \sum_{l=1}^{m} n_i J_i n_l J_l \left[S_{1/2}^{(p)}(W_i^2),\ S_{1/2}^{(q)}(W_i^2)\right]'_{il} + n_i J_i n_j J_j S_{1/2}^{(p)}(W_i^2),$$

$$S_{1/2}^{(q)}(W_j^2)\big]''_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{m} n_i a_{i0} m_i^{1/2} = 0, \quad b_{i0}^{(2)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} n_i b_{i1}^{(2)} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} n_i g_{ir}^{(k)} m_i^{1/2} = 0$$

(через [;] обозначены интегральные скобки [4]).

3. Коэффициенты переноса плотной смеси. Найденная одночастичная функция распределения (2.6) позволяет определить коэффициенты переноса многокомпонентной плотной смеси (сдвиговой вязкости η_1, объемной вязкости η_2, теплопроводности λ, взаимной диффузии D_{ij}, бародиффузии D_i^p, термодиффузионные отношения K_i^{T}, термодиффузии D_i^{T}):

$$\eta_1 = \frac{kT}{2} \sum_{i=1}^{m} n_i b_{i0}^{(1)} J_i \left[1 + \frac{8\pi}{5} \sum_{j=1}^{m} n_j J_j \sigma_{ij} m_{ji} G_{0ij}(\sigma_{ij}) \right] + \tag{3.1}$$

$$+ \frac{8}{15} \sum_{i,j=1}^{m} (2\pi m_{ji} m_i kT)^{1/2} n_i n_j \sigma_{ij}^4 J_i J_j G_{0ij}(\sigma_{ij}),$$

$$\eta_2 = \frac{4}{9} \sum_{i,j=1}^{m} (2\pi m_{ji} m_i kT)^{1/2} n_i n_j \sigma_{ij}^4 J_i J_j G_{0ij}(\sigma_{ij}) +$$

$$+ \frac{2\pi}{3} \sum_{i,j=1}^{m} \sigma_{ij}^3 m_{ji} n_i n_j J_i J_j G_{0ij}(\sigma_{ij})\, b_{i1}^{(2)},$$

$$\lambda = \frac{5}{4} (2k^3T^3)^{1/2} \sum_{i=1}^{m} n_i m_i^{-1} J_i \left[1 + \frac{8\pi}{15} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} n_j J_j m_{ij}\, m_{ji} G_{0ij}(\sigma_{ij}) \right] \left(a_{i1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{l=1}^{m} g_{i1}^{(l)} \tilde{d}_l \right) + \left(\frac{4}{3} 2\pi k^3 T^3 \right)^{1/2} \sum_{i,j=1}^{m} \sigma_{ij}^4 n_i n_j G_{0ij}(\sigma_{ij})\, J_i J_j\, (m_{ij} m_{ji}/(m_i + m_j))^{1/2},$$

$$D_{ij} = \frac{\rho_i J_i}{2m_j} (2kT/m_i)^{1/2} \sum_{k=1}^{m} g_{i0}^{(k)} (E_{kj} - P_j E_{kl}/P_l),$$

$$D_j^p = (\rho_j J_j / 2\rho)(2kT/m_j)^{1/2} \sum_{k=1}^{m} g_{j0}^{(k)} E_{kl}/P_l kT,$$

$$D_i^{\mathrm{T}} = (\rho_i J_i / 2\rho)(2kT/m_i)^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{m} g_{i0}^{(k)} \left\{ \sum_{j=1}^{m} n_k J_k \left(\delta_{kj} + \frac{4\pi}{3} n_j J_j \sigma_{kj}^3 m_{kj} G_{0kj}(\sigma_{kj}) \right) + \right.\right.$$

$$+ n_k J_k n_j J_j T \left(\int \nabla\Phi_{0kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \nabla_{\mathrm{T}} G_{0kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\, d\mathbf{r}_j + \frac{2\pi}{3} \sigma_{kj}^3 \nabla_{\mathrm{T}} G_{0kj}(\sigma_{kj}) \right) -$$

$$- E_{kl} P_l^{-1} \sum_{p=1}^{m} \left[n_p J_p \left(\delta_{pj} + \frac{4\pi}{3} n_j J_j \sigma_{pj}^3 m_{pj} G_{0pj}(\sigma_{pj}) \right) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + n_p J_p n_j J_j \left(\int \nabla\Phi_{0pj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \nabla_{\mathrm{T}} G_{0pj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\, d\mathbf{r}_j + (2\pi/3) \sigma_{pj} \nabla_{\mathrm{T}} G_{0pj}(\sigma_{pj}) \right) \right] \right\} - a_{i0} \right],$$

$$K_l^{\mathrm{T}} = -(P_l n_l J_l)^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{m} (1-\delta_{jl}) P_j n_j J_j K_j^{\mathrm{T}} - \right.$$

$$- \sum_{i,j=1}^{m} \left[n_i J_i \left(\delta_{ij} + \frac{4\pi}{3} n_j J_j \sigma_{ij}^3 m_{ij} G_{0ij}(\sigma_{ij}) \right) + \right.$$

$$\left. \left. + n_i J_i n_j J_j T \int \nabla \Phi_{0ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \nabla_{\mathrm{T}} G_{0ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\, d\mathbf{r}_j + \frac{2\pi}{3} \sigma_{ij}^3 \nabla_{\mathrm{T}} G_{0ij}(\sigma_{ij}) \right] \right\}.$$

Здесь $\tilde{a}_l$ определяется согласно соотношению

$$\sum_{l=1}^{m} \left(g_{i1}^{(l)} - g_{i1}^{(h)} \right) (1-\delta_{lh}) \tilde{a}_l = a_{i0} \quad (i \neq h), \quad E_{kj} = \delta_{kj} +$$

$$+ \frac{4\pi}{3} \sigma_{jk}^3 J_k G_{0kj}(\sigma_{kj}) + \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^{m} n_k J_k \sigma_{ki}^3 n_i J_i \nabla_{n_j} G_{0ki}(\sigma_{ki}),$$

$$P_l = \sum_{i=1}^{m} \left[\delta_{il} kT + (4\pi/3) \sigma_{li}^3 n_i J_i kT G_{0il}(\sigma_{il}) + \right.$$

$$\left. + (2\pi/3) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^3 n_i J_i n_j J_j kT \nabla_{n_l} G_{0ij}(\sigma_{ij}) \right] + \sum_{i=1}^{m} n_i J_i \left(I_{il} + I_{li} + \sum_{j=1}^{m} n_j J_j \nabla_{n_l} I_{ij} \right),$$

$$I_{ij} = \int \nabla \Phi_{0ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) G_{0ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\, d\mathbf{r}_j.$$

Выражения для тензора потока импульса $\Pi(\mathbf{r}, t)$, вектора потока тепла $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$, вектора потока массы i-го компонента смеси $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ с учетом (3.1) имеют вид

$$\Pi = pU - 2\eta_1 \left\{ \hat{\varepsilon} - \frac{U}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} - \eta_2 U \nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$\mathbf{Q} = -\lambda \nabla T + \sum_{i=1}^{m} h_i \mathbf{J}_i + p \sum_{i=1}^{m} K_{\mathrm{T}i} \mathbf{J}_i / \rho_i,$$

$$\mathbf{J}_i = -\sum_{j=1}^{m} (1-\delta_{ji}) D_{ij} m_j \nabla (n_j/n) - D_i^{\mathrm{T}} \rho_i \nabla \ln T - \rho_i D_i^p \nabla \ln p,$$

где $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$ — тензор скоростей деформации; $\rho_i(\mathbf{r}, t)$ — массовая плотность i-го компонента; h_i — удельная парциальная энтальпия.

Отметим, что первоначальное обобщение уравнения Энскога на случай смеси [4] обладало тем недостатком, что коэффициенты переноса не удовлетворяли соотношениям Онсагера [5]. Этот недостаток был исправлен в [6].

Выполнимость соотношений взаимности Онсагера в данной работе обеспечивается правильным выбором выражений для потоков термодинамических величин и термодинамических сил, минимизирующих производство энтропии для стационарных процессов. Для этого необходимо использовать равновесную парную корреляционную функцию распределения, которая является нелокальным функционалом полей термодинамических переменных. Таким образом, в линейном по градиентам термодинамических величин приближении кинетическое уравнение будет содержать дополнительный член в интеграле столкновений. Учет таких членов, как показано в [6], позволяет получать решения, согласующиеся с термодинамикой неравновесных процессов и обеспечивает выполнимость соотношений взаимности Онсагера.

Выражения для коэффициентов переноса, полученные в настоящей работе, согласуются с коэффициентами переноса, найденными на основании подхода [6] в пределе, когда притягивающей частью межмолекулярного потенциала $\Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Азнакаев Э. Г.** Исследование явлений переноса в плотных однокомпонентных системах. Криогенные простые жидкости // Физика низких температур.— 1979.— № 10.
2. **Физика** простых жидкостей. Статистическая теория.— М.: Мир, 1971.
3. **Боголюбов Н. Н.** Микроскопические решения уравнения Больцмана — Энскога в кинетической теории для упругих шаров // ТМФ.— 1975.— Т. 24, № 2.
4. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов.— М.: ИЛ, 1960.
5. **Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.
6. **Струминский В. В., Курочкин В. И.** К кинетической теории плотных газов // ДАН СССР.— 1981.— Т. 257, № 1.

г. Киев *Поступила 24/XI 1988 г., в окончательном варианте — 19/VII 1990 г.*

УДК 539.3

В. В. Кузнецов, Ю. В. Сойников

О КРИТЕРИИ ПРИМЕНИМОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК В ОБЛАСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек при больших упругих перемещениях существует ряд подходов. В [1] получены соотношения теории оболочек при малых деформациях и произвольных перемещениях, а также проанализированы основные способы упрощений при ограниченных перемещениях. В [2, 3] предложены варианты нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении. В [4] выведены уравнения тонких оболочек путем выделения в перемещениях жесткого поворота. В [5] основные допущения теории тонких оболочек распространены и уточнены на случай больших деформаций, сопровождающихся изменением толщины оболочки. Обычно применяемые упрощающие допущения о малости наряду с деформациями некоторых других членов, связанных с перемещениями или поворотами, не применимы при произвольных перемещениях.

Теория, построенная в [1], явилась отправным пунктом многих исследований в области нелинейного деформирования оболочек. Подход [1] к выводу деформационных соотношений при произвольных поворотах и малых деформациях основан на рассмотрении общих уравнений трехмерной нелинейной теории упругости в ортогональных криволинейных координатах. С использованием геометрических гипотез Кирхгофа — Лява была получена система трех нелинейных алгебраических уравнений относительно направляющих косинусов ϑ, ψ, $(1+\chi)$ вектора нормали к деформированной срединной поверхности оболочки:

$$\vartheta^2+\psi^2+(1+\chi)^2=1,\ (1+\chi)\widehat{e}_{13}+\psi\widehat{e}_{12}+\vartheta(1+\widehat{e}_{11})=0,$$
$$(1+\chi)\widehat{e}_{23}+\vartheta\widehat{e}_{21}+\psi(1+\widehat{e}_{22})=0, \tag{0.1}$$

где $\widehat{e}_{ij}$ $(i, j=1, 2)$ — линейные компоненты деформаций срединной поверхности; $-\widehat{e}_{i3}$ $(i=1, 2)$ — направляющие косинусы нормали к деформированной поверхности в линейном приближении.

В предположении, что величинами деформаций можно пренебречь по сравнению с единицей, дано приближенное решение системы (0.1) в виде $\vartheta=-\widehat{e}_{13}(1+\widehat{e}_{22})+\widehat{e}_{23}\widehat{e}_{12}$, $\psi=-\widehat{e}_{23}(1+\widehat{e}_{11})+\widehat{e}_{13}\widehat{e}_{21}$, $\chi=\widehat{e}_{11}+\widehat{e}_{22}+\widehat{e}_{11}\widehat{e}_{22}-\widehat{e}_{12}\widehat{e}_{21}$. По поводу правильности этого шага вывода деформационных соотношений, сделанного автором в рамках исходных гипотез, высказано сомнение в [6, 7]. Авторами этих работ в качестве основного критерия оценки соотношений [1] принята возможность их приведения к линейным выражениям [8] при малых перемещениях. Для удовлетворения этому критерию в [6] функция χ разлагается в ряд по степеням перемещений срединной поверхности и их производных с удержанием членов второго порядка малости. Такие допущения, как отмечено в [7], не применимы при произвольных перемещениях. При этом в [7] деформационные соотношения дополняются малыми членами порядка $\widehat{\varepsilon}_{ij}/R_j$ (R_j — главные радиусы кривизны, $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ — деформации срединной поверхности). Как указано в [8, с. 27]: «Некоторые авторы склонны придавать данному обстоятельству принципиальное значение... Однако достигаемое при этом уточнение не превосходит погрешности исходных допущений теории оболочек».

Из анализа рассмотренных работ можно заключить, что при выводе различных вариантов деформационных соотношений на основе подхода [1] вопрос об их применимости в области произвольных перемещений исследован не достаточно полно.