

**ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ**

**Б. А. Урюков**

(Новосибирск)

В дальнейшем при изложении будут применяться следующие обозначения:

<p><math>x, y</math> — координаты в направлениях течения и перпендикулярном ему,  <math>U</math> — осредненная скорость течения,  <math>\rho</math> — плотность,  <math>T</math> — осредненная температура жидкости,  <math>c_p</math> — теплоемкость при постоянном давлении,  <math>c_f</math> — местный коэффициент трения,  <math>\tau</math> — напряжение трения,  <math>q</math> — тепловой поток,  <math>\mu, \lambda</math> — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности,</p>	<p><math>\mu_T, \lambda_T</math> — коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности,  <math>\eta, \varphi, \psi</math> — универсальные переменные,  <math>v_*</math> — скорость трения,  <math>t_*</math> — температура трения,  <math>\delta</math> — толщина пограничного слоя,  <math>P</math> — число Прандтля,  <math>P_T</math> — турбулентное число Прандтля,  <math>R_l</math> — число Рейнольдса, выраженное через характерный размер <math>l</math>,  <math>S</math> — число Стэнтона,  <math>N</math> — число Нуссельта.</p>
--	--

Для определения указанных выше величин служат следующие зависимости

$$\eta = \frac{y v_* \rho}{\mu}, \quad \varphi = \frac{U}{v_*}, \quad \psi = \frac{T - T_w}{t_*}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad t_* = -\frac{q_w}{\rho c_p v_*}$$

$$P = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad P_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}, \quad \sigma = \frac{P}{P_T}, \quad R_l = \frac{\rho u_0 l}{\mu}$$

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_0^2}, \quad S = -\frac{q_w}{\rho c_p u_0 (T_0 - T)}, \quad N = PRS$$

Применяемые индексы имеют следующее назначение:  $w$  — параметр на стенке, 1 — граница ламинарного подслоя, 2 — границы переходной области, 0 — параметр свободного потока, ( )' (штрих) — граница тепловой области.

1. Уравнения Ньютона для напряжения трения и Фурье для теплового потока в жидкости в применении к турбулентному течению несжимаемой жидкости на плоской пластине, как известно, имеют вид

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{dU}{dy}, \quad -q = (\lambda + \lambda_T) \frac{dT}{dy} \quad (1.1)$$

Будем предполагать постоянство  $\tau$  и  $q$  в сечении потока, а также постоянство физических свойств жидкости. Тогда эти уравнения в универсальных переменных  $\eta, \varphi, \psi$  можно представить так:

$$\left(1 + \frac{\mu_T}{\mu}\right) \frac{d\varphi}{d\eta} = 1, \quad \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\mu_T}{\mu}\right) \frac{d\psi}{d\eta} = P_T \quad (1.2)$$

Гипотеза Рейнольдса об аналогии между трением и теплопередачей в турбулентном потоке жидкости приводит в предположении о полностью турбулентном течении во всем сечении потока к известному соотношению (считается, что  $P_T = 1$ )

$$S = \frac{1}{2} c_f \quad (1.3)$$

Экспериментально показано, что аналогия Рейнольдса справедлива лишь при  $P = 1$ .

Основываясь на измерениях профиля скорости в турбулентном потоке, Карман предложил разделить турбулентный пограничный слой на три области, характеризующиеся различным влиянием турбулентного и молекулярного трения на перенос импульса.

Следуя Карману, в турбулентном пограничном слое различают

- а) ламинарный подслой, где  $\mu_T \ll \mu$ , лежащий в пределах  $0 < \eta \leq \eta_1 = 5$ ; профиль скорости

$$\varphi = \eta \quad (1.4)$$

- б) переходную область, где  $\mu_T \sim \mu$ , лежащую в диапазоне  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 = 30$ , профиль скорости

$$\varphi = a_1 + b_1 \ln \eta \quad (a_1 = -3,05, b_1 = 5,0) \quad (1.5)$$

- в) турбулентное ядро, где  $\mu_T \gg \mu$ , находящийся при  $\eta \geq \eta_2$ , профиль скорости

$$\varphi = a_2 + b_2 \ln \eta \quad (a_2 = 5,5, b_2 = 2,5) \quad (1.6)$$

Гипотеза Кармана позволила существенно уточнить аналогию Рейнольдса (1.3). Было получено

$$S = \frac{c_f}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{1/2 c_f F(P)}}, \quad F(P) = 5 \left( P - 1 + \ln \frac{5P + 1}{6} \right) \quad (1.7)$$

(предполагалось, что  $P_T = 1$ ).

Однако формула Кармана экспериментально подтверждается лишь в некотором диапазоне чисел Прандтля ( $0,7 \lesssim P \lesssim 10$ ), не сильно отличающихся от единицы.

В аналогии Кармана неявно предполагается, что в областях, на которые разделен динамический пограничный слой, соотношения между турбулентной и молекулярной теплопроводностью таковы же, как и между турбулентной и молекулярной вязкостью. Легко видеть из сравнения уравнений (1.2), что это неверно, по крайней мере при числах  $\sigma$ , достаточно отличающихся от единицы. Более того, поскольку границам областей в динамическом пограничном слое приписаны совершенно определенные значения координат, то, очевидно, это предположение неверно вообще при числах  $\sigma$ , отличающихся от единицы, так как в этом случае границы областей, в которых соотношения между молекулярной и турбулентной теплопроводностью одинаковы с соотношениями между молекулярной и турбулентной вязкостью, должны отличаться от границ соответствующих областей в динамическом пограничном слое. Таким образом, при  $\sigma \neq 1$  (или при  $P \neq 1$ , если считать  $P_T = 1$ ) тепловой пограничный слой должен иметь структуру, отличную от структуры динамического пограничного слоя.

2. Разделение динамического пограничного слоя на области по методу Кармана, вообще говоря, является достаточно искусственным, хотя это и отражает физическую картину явления. Очевидно, например, что в ламинарном подслое турбулентное трение не равно в точности нулю, а имеет некоторое, хотя и малое по сравнению с молекулярным, значение. Пренебрежение этой величиной вносит некоторую погрешность в уравнения.

Пусть на границе динамического ламинарного подслоя ( $\eta = \eta_1$ ) эта погрешность равна  $\varepsilon_1$

$$\left( \frac{\mu_T}{\mu} \right)_1 = \varepsilon_1 \quad (2.1)$$

Пренебрежение турбулентным переносом тепла в тепловом ламинарном подслое также вводит некоторую ошибку, которая на границе тепло-

вого ламинарного подслоя ( $\eta = \eta_1'$ ) равна  $\varepsilon_1'$

$$\left(\frac{\lambda_T}{\lambda}\right)'_1 = \varepsilon_1' \quad (2.2)$$

Аналогично, пренебрежение молекулярным трением и молекулярным переносом тепла в динамическом и тепловом турбулентном ядре потока приводит к погрешностям, которые на границах этих областей (на границе с переходной областью) при  $\eta = \eta_2$  и  $\eta = \eta_2'$  равны  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_2'$  соответственно

$$\left(\frac{\mu}{\mu_T}\right)_2 = \varepsilon_2, \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_T}\right)'_2 = \varepsilon_2' \quad (2.3)$$

Необходимо построить тепловой пограничный слой с той же точностью, с какой построен Карманом динамический пограничный слой. Для этого следует считать, что граничные ошибки, которые появляются вследствие разбиения пограничного слоя как динамического, так и теплового, на области, должны быть равны, т. е.  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$ , или, согласно (2.1—2.3)

$$\left(\frac{\mu_T}{\mu}\right)_1 = \sigma \left(\frac{\mu_T}{\mu}\right)'_1, \quad \left(\frac{\mu}{\mu_T}\right)_2 = \sigma \left(\frac{\mu}{\mu_T}\right)'_2 \quad (2.4)$$

Отношение  $\mu_T/\mu$  растет в направлении от стенки, поэтому из (2.4) можно заключить:

а) при  $\sigma > 1$  границы областей в тепловом пограничном слое смещаются в направлении к стенке относительно границ областей динамического пограничного слоя;

б) при  $\sigma < 1$  границы тепловых областей сдвигаются в направлении от стенки.

Координаты границ тепловых областей находятся подстановкой отношения  $\mu_T/\mu$ , выраженного через координату  $\eta$  посредством уравнений для трения (1.2) и для профилей скорости в (2.4).

Разберем случаи  $\sigma > 1$  и  $\sigma < 1$  отдельно.

3. Рассмотрим случай  $\sigma > 1$ . Граница теплового ламинарного подслоя должна находиться в пределах динамического ламинарного подслоя. Однако профиль скорости (1.4) приводит к равенству  $\mu_T/\mu \equiv 0$  во всем ламинарном подслое. Следовательно, необходимо воспользоваться другими данными.

Показано [1-6], что вблизи стенки турбулентное трение можно считать степенной функцией от координаты

$$\frac{\mu_T}{\mu} = k^n \eta^n \quad (3.1)$$

причем показатель  $n$ , указываемый в различных работах, лежит в пределах от 2 до 4. Значение величин  $k$  и  $n$  можно определить из сравнения теории и эксперимента при очень больших значениях числа Прандтля, когда термическое сопротивление теплового ламинарного подслоя, существенным образом зависящее от  $k$  и  $n$ , будет оказывать определяющее влияние на теплопередачу в жидкости.

Подставляя (3.1) в первое равенство (2.4), получим

$$\eta_1' = \sigma^{-1/n} \eta_1 \quad (3.2)$$

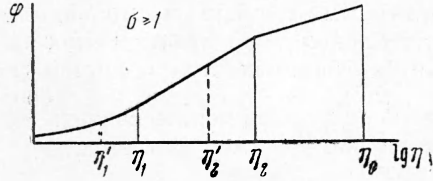
Граница теплового турбулентного ядра лежит в пределах переходной области, по крайней мере до некоторого значения  $\sigma$ .

Подставляя профиль скорости (1.5) в (1.2), находим  $\mu_T/\mu$ , а из (2.4)

$$\eta_2' = b_1 \left[ 1 + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\eta_2}{b_1} - 1 \right) \right] \quad (3.3)$$

Так как  $\eta_1 = b_1 = 5$ , то можно видеть, что  $\eta_2'$  находится в пределах динамической переходной области при любом значении  $\sigma > 1$ . Это будет обусловлено только формой используемого профиля скорости.

На фиг. 1 показан профиль скорости в универсальных переменных и обозначены границы динамических и тепловых областей при некотором значении  $\sigma \gg 1$ . Определим профили температур в каждом из пяти полученных диапазонов.



Фиг. 1

а) В интервале  $0 \leq \eta \leq \eta_1'$  отношение  $\mu_T/\mu \ll 1/\sigma$ , поэтому из второго уравнения (1.2) имеем

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\eta} = P_T \quad \text{или} \quad \psi = P_T \sigma \eta \quad (3.4)$$

б) В интервале  $\eta_1' \leq \eta \leq \eta_1$  отношение  $\mu_T/\mu \ll 1$ , но сравнимо с  $1/\sigma$ ; поэтому, подставляя во второе уравнение (1.2) выражение (3.1), получим

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{P_T \sigma}{1 + \sigma k^n \eta^n} \quad (3.5)$$

Интегрируя

$$\psi = \psi_1' + P_T \sigma \int_{\eta_1'}^{\eta} \frac{d\eta}{1 + \sigma k^n \eta^n} = P_T \sigma^{\frac{n-1}{n}} \eta_1 \left( 1 + \frac{1}{k \eta_1^n} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{dz}{1 + z^n} \right) \quad (3.6)$$

$$(\zeta_1 = k \eta_1, \zeta_2 = k \eta \sigma^{1/n})$$

в) В интервале  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2'$  отношение  $\mu_T/\mu$  сравнимо как с единицей, так и с  $1/\sigma$ . Отношение  $\mu_T/\mu$  находим из первого уравнения (1.2) и профиля скорости (1.5). Подставляя во второе уравнение (1.2), получим

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{P_T}{1/\sigma + \eta/b_1 - 1} \quad (3.7)$$

или интегрируя

$$\psi = \psi_1 + b_1 \ln \left[ 1 + \sigma \left( \frac{\eta}{b_1} - 1 \right) \right] =$$

$$= P_T \left\{ \sigma^{\frac{n-1}{n}} \eta_1 \left( 1 + \frac{1}{k \eta_1^n} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dz}{1 + z^n} \right) + b_1 \ln \left[ 1 + \sigma \left( \frac{\eta}{b_1} - 1 \right) \right] \right\} (\zeta_2 = k \eta \sigma^{1/n}) \quad (3.8)$$

г) В интервале  $\eta_2' \leq \eta \leq \eta_2$  отношение  $\mu_T/\mu \gg 1/\sigma$ , но сравнимо с единицей. Следовательно, второе уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{\mu_T}{\mu} \frac{d\psi}{d\eta} = P_T$$

Используя профиль (5.1) и первое уравнение (1.2), получаем

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{P_T}{\eta/b_1 - 1} \quad (3.9)$$

Отсюда

$$\psi = \psi_2' + P_T b_1 \ln \left( \sigma \frac{\eta/b_1 - 1}{\eta_2/b_1 - 1} \right) =$$

$$= P_T \left\{ \sigma^{\frac{n-1}{n}} \eta_1 \left( 1 + \frac{1}{k \eta_1^n} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dz}{1 + z^n} \right) + b_1 \ln \frac{\eta_2}{b_1} + b_1 \ln \left( \sigma \frac{\eta/b_1 - 1}{\eta_2/b_1 - 1} \right) \right\} \quad (3.10)$$

д) В интервале  $\eta_2 \leq \eta$  имеем  $\mu_T/\mu \gg 1 > 1/\sigma$ , поэтому уравнения (1.2) примут вид

$$\frac{\mu_T}{\mu} \frac{d\psi}{d\eta} = 1, \quad \frac{\mu_T}{\mu} \frac{d\psi}{d\eta} = P_T \quad (3.11)$$

или

$$\psi = \psi_2 + P_T (\varphi - \varphi_2) = P_T [F(\sigma) + \varphi] \quad (3.12)$$

Здесь

$$F(\sigma) = \sigma^{\frac{n-1}{n}} \eta_1 \left( 1 + \frac{1}{k\eta_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dz}{1+z^n} \right) + b_1 \ln \sigma \frac{\eta_2}{b_1} - \varphi_2 \quad (3.13)$$

На границе турбулентного пограничного слоя, где можно считать, что температура и скорость жидкости в пограничном слое сравниваются с температурой и скоростью свободного потока, получим

$$\psi_0 = P_T [F(\sigma) + \varphi_0] \quad (3.14)$$

Легко можно видеть, что

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{c_f}{2} \frac{1}{S}}, \quad \varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{c_f}} \quad (3.15)$$

Таким образом, приходим к формуле

$$\frac{2P_T S}{c_f} = \frac{1}{1 + \sqrt{1/2} c_f F(\sigma)} \quad (3.16)$$

отличающейся от формулы Кармана (1.7) выражением для  $F(\sigma)$ .

В работе [7] показано, что при значениях числа Прандтля, близких или больших единицы, турбулентное число  $P_T$  мало отличается от единицы, то есть здесь можно считать  $\sigma = P$ .

Известно [1], что при очень больших значениях числа Прандтля ( $P > 500$ ) число Стэнтона пропорционально числу  $P$  в степени  $(-2/3)$ . Из (3.13) и (3.16) видно, что при больших числах  $P$  выражение для числа  $S$  пропорционально числу  $P$  в степени  $-(n-1)/n$ . Следовательно,  $n = 3$ .

Сравнение с имеющимися [1] экспериментальными данными по теплопередаче для течения жидкостей с большими числами Прандтля (до  $P \approx 100$ ) в круглой цилиндрической трубе показало, что значение  $k = 0.12$  дает хорошее совпадение теории с экспериментом.

Возможность сравнения теории теплопередачи для пограничного слоя на пластине, какой является данное исследование, с экспериментами в круглой трубе обусловлена тем, что, как было показано, с ростом числа Прандтля размеры пристеночных областей (уравнения (3.2) и (3.3)), в которых имеет место наибольшее изменение температуры жидкости, уменьшаются (очевидно, это будет иметь место и для течения в круглой трубе), и, таким образом, течение в круглой трубе по своему характеру приближается (в смысле протекания тепловых процессов) к течению в пограничном слое.

Окончательное выражение для  $F(P)$  имеет вид

$$F(P) = 5 (\ln P + P^{1/3} - 1) + P^{2/3} [2.78 \ln \frac{1 + 0.6P^{1/3}}{1.6} - 1.39 \ln \frac{1 - 0.6P^{1/3} + 0.36P^{2/3}}{0.76} + 4.8 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{0.693 (P^{1/3} - 1)}{1 + 0.0667 (1.2P^{1/3} - 1)}]$$

На фиг. 2 сплошными кривыми представлены зависимости  $2S/c_f$  от числа Прандтля для различных чисел Рейнольдса ( $c_f$  рассчитывается по формуле для течения в трубе  $0.5 c_f = 0.023 R^{-0.2}$ ); пунктиром с точками приведена эмпирическая формула Нуссельта  $2S/c_f = P^{-0.6}$ , штрих-пунктиром построена зависимость, вычисленная по результатам Кармана (1.7) и экспериментальные точки, заимствованные из работы [1] для  $R \approx 10^4$ . Видно, что формула Нуссельта близка к полученным данным лишь до чисел Рейнольдса  $\sim 10^4$ .

4. Рассмотрим случай  $\sigma < 1$ . С уменьшением числа Прандтля происходит увеличение координат границ тепловых областей по сравнению с динамическими. Граница теплового ламинарного подслоя должна, по крайней мере до некоторого значения  $\sigma$ , находиться в пределах переход-

ной области. Таким образом, используя первые из уравнений (2.4), (1.2) и профиль скорости (1.5), получаем

$$\eta_{1'} = b_1 = \eta_{11} \quad (4.1)$$

Следовательно, с уменьшением числа  $\sigma$  граница теплового ламинарного подслоя не изменяется. Очевидно, это обусловлено несовершенностью используемого профиля скорости (1.5) (а также (1.4)), который при  $\eta = \eta_{11}$  дает  $\mu_{\tau} / \mu = 0$ .

Для границы теплового турбулентного ядра из второго уравнения (2.4) и первого уравнения (1.2), а также профиля скорости (1.6) (при этом учитываем, что  $\mu_{\tau} / \mu \gg 1$ ), получим

$$\eta_{2'} = \eta_2 / \sigma \quad (4.2)$$

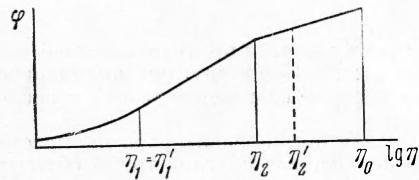
Зависимость (4.2) справедлива до значения

$$\sigma^* = \eta_2 / \eta_0 \quad (4.3)$$

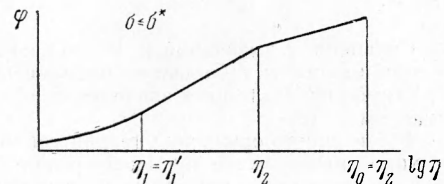
когда нижняя граница теплового турбулентного ядра достигнет границы пограничного слоя. При  $\sigma \leq \sigma^*$  следует считать

$$\eta_{2'} = \eta_0 \quad (4.4)$$

На фиг. 3 показан профиль скорости в универсальных переменных и отмечены границы динамических и тепловых областей при некотором



Фиг. 3



Фиг. 4

значении  $1 \gg \sigma \gg \sigma^*$ . Определим профили скоростей в каждом из четырех полученных диапазонов. Учитывая соотношения между  $\mu_{\tau} / \mu$ , 1 и  $1 / \sigma$  в каждой из областей, получим, как и ранее,

а) в интервале  $0 \leq \eta \leq \eta_{11}$

$$\psi = P_{\tau} \sigma \eta \quad (4.5)$$

б) в интервале  $\eta_{11} \leq \eta \leq \eta_2$

$$\psi = P_{\tau} \left\{ \sigma \eta_{11} + b_1 \ln \left[ 1 + \sigma \left( \frac{\eta}{b_1} - 1 \right) \right] \right\} \quad (4.6)$$

в) в интервале  $\eta_2 \leq \eta \leq \eta_2'$

$$\psi = P_{\tau} \left\{ \sigma \eta_{11} + b_1 \ln \left[ 1 + \sigma \left( \frac{\eta_2}{b_1} - 1 \right) \right] + b_2 \ln \frac{1 + \sigma \eta / b_2}{1 + \sigma \eta_2 / b_2} \right\} \quad (4.7)$$

г) в интервале  $\eta \geq \eta_2'$

$$\psi = \psi_2' + P_{\tau} (\varphi - \varphi_2') = P_{\tau} [F(\sigma) + \varphi] \quad (4.8)$$

где

$$F(\sigma) = \sigma \eta_{11} + b_1 \ln \left[ 1 + \sigma \left( \frac{\eta_2}{b_1} - 1 \right) \right] + b_2 \ln \left( \sigma \frac{1 + \eta_2 / b_2}{1 + \sigma \eta_2 / b_2} \right) - \varphi_2 \quad (4.9)$$

Применяя (4.8) на границе пограничного слоя, получим снова (3.16), где  $F(\sigma)$  будет выражаться уравнением (4.9).

На фиг. 4 показано расположение границ областей при  $\sigma < \sigma^*$ .

В этом случае будут иметь место уравнения (4.5), (4.6) и (4.7). Применяя (4.7) на границе пограничного слоя, получим

$$P_{\tau}S = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \frac{1}{A(\sigma, R)} \tag{4.10}$$

где

$$A(\sigma, R) = \sigma\eta_1 + b_1 \ln \left[ 1 + \sigma \left( \frac{\eta_2}{b_1} - 1 \right) \right] + b_2 \ln \frac{1 + \sigma\eta_0/b_2}{1 + \sigma\eta_2/b_2} \tag{4.11}$$

Величина  $\eta_0$  зависит от числа Рейнольдса

$$\eta_0 = R_{\delta} \sqrt{\frac{1}{2} c_f} \tag{4.12}$$

При  $\sigma \rightarrow 0$  получаем

$$N_x = \lim_{\sigma \rightarrow 0} PRS = \lim_{\sigma \rightarrow 0} R_x \sqrt{\frac{c_f}{2}} \frac{\sigma}{A(\sigma, R)} = \frac{R_x}{R_{\delta}} \tag{4.13}$$

Здесь число Рейнольдса  $R_x$  выражено через координату  $x$  вдоль пластины.

Принимая [8]

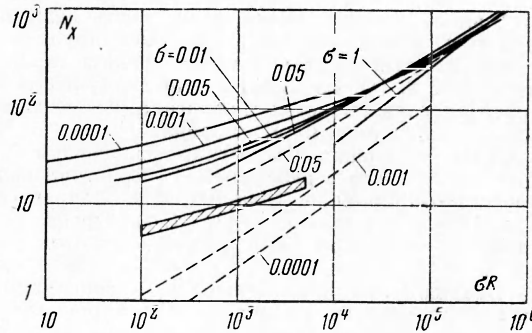
$$\frac{\delta}{x} = 0.37 R_x^{-0.2} \tag{4.14}$$

получим

$$N_x(\sigma = 0) = 2.7 R_x^{0.2} \tag{4.15}$$

На фиг. 5 сплошными кривыми построены зависимости числа Нуссельта  $N_x$  от числа  $\sigma R$ , вычисленного для различных значений  $\sigma$ ; заштрихованной полосой нанесены экспериментальные данные для течения жидкого металла в круглой трубе ( $P \approx 0.02 \div 0.04$ ) из работы [9] (при нанесении экспериментальных точек считалось  $P = \sigma$ ); штрих-пунктирные линии представляют собою результаты вычислений по формуле Кармана.

Количественное сравнение теории для пограничного слоя и экспериментов в трубе, как это было возможно для  $\sigma > 1$ , в данном случае будет неверным, так как с уменьшением  $\sigma$  различие в происхождении тепловых процессов в трубе и в пограничном слое будет расти. Как показывает фиг. 5, поведение теоретических кривых качественно подтверждается экспериментами.



Фиг. 5

Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР

Поступила 20 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Р э н н и. Теплопередача в турбулентном вязком течении. Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1956, № 6.
2. S z a b l e w s k i. Zur Theorie der laminaren Unterschicht turbulenter Grenzschichtströmungen. Z. angew. Math. und Mech., 1958, vol. 38, N 1 (2).
3. V o n R e i c h a r d t H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. Z. angew. Math. und Mech., 1951, vol. 31, № 7.
4. V a n D r i e s t. On turbulent flow-near a wall. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, № 11.
5. E l r o d. Note on the turbulent shear stress near a wall. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, № 6.
6. D e i s s l e r. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Smith numbers. NACA Rep., 1955, 1240.
7. L y k o u d i s T o u l o u k i a n. Heat transfer in liquid metals. Trans. ASME, 1958, vol. 80, № 3.
8. Ш л и х т и н г. Теория пограничного слоя. ИИЛ, М., 1956.
9. J o h n s o n, H a r n e t t. C l a b a u g h. Heat transfer to molten lead—bismuth eutectic in turbulent pipe flow. Trans. ASME, 1953, vol. 75, № 6.