

А. М. Коврижных

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

С позиции двух новых теорий пластичности [1, 2] решается задача о выпучивании шарнирно закрепленной удлиненной прямоугольной пластинки, сжатой вдоль длинной стороны. Считается, что начало выпучивания сопровождается увеличением сжимающей нагрузки.

Теоретические и экспериментальные исследования, посвященные этой задаче, показывают, что деформационная теория (Надаи, Ильюшин) дает лучшее соответствие с экспериментом, чем теория течения (Рейс, Ланинг) [3]. С другой стороны, известно, что деформационная теория обоснованно может использоваться лишь при пропорциональном нагружении, в то время как теория течения не имеет таких ограничений.

В процессе потери устойчивости пластинки происходит сложное нагружение с поворотом главных осей напряжений. Каждый элемент материала, первоначально пропорционально нагруженный, в момент выпучивания догружается с приложением всех компонент напряжений в условиях плоского напряженного состояния. К настоящему времени такой класс сложных нагружений хорошо изучен экспериментально [4—6], установлено, что ни деформационная теория, ни теория течения не пригодны для количественного описания этих опытов.

Ниже иллюстрируется возможность использования теорий [1, 2] для различных направлений сложной догрузки из состояния растяжения. Приводится сравнение с данными опытов [6]. Полученное хорошее соответствие расчета и эксперимента позволяет с большим основанием использовать для решения задач устойчивости [1, 2], чем теории деформаций и течения. Результаты расчетов по устойчивости пластинки сопоставляются с опытами [3, 7].

1. Наиболее полно в литературе представлены эксперименты, в которых различные сложные догрузки осуществляются из состояния одноосного растяжения [4—6]. Обратимся к их анализу с целью определения характеристик материала, используемых в теориях [1, 2].

Как правило, эксперименты по сложному нагружению с поворотом главных осей напряжений проводятся на тонкостенных трубках с приложением осевой силы и крутящего момента. Пусть ось x направлена по образующей, ось y имеет тангенциальное направление. Отличные от нуля компоненты напряжений обозначим σ_x и τ_{xy} . Произвольное догружение можно охарактеризовать параметром $m = \Delta\sigma_x / \Delta\tau_{xy}$.

С позиций теорий [1, 2] рассмотрим для пластически несжимаемого материала различные сложные догрузки из состояния растяжения посредством приложения $\Delta\sigma_x$, $\Delta\tau_{xy}$. На основании [1] при растяжении имеем

$$\Delta\epsilon_x = \left(\frac{1 + \sin \varphi}{2G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta\sigma_x, \quad \Delta\epsilon_y = \Delta\epsilon_z = -\frac{\Delta\epsilon_x}{2} + \frac{1 - 2\nu}{2E} \Delta\sigma_x$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, φ — угол внутреннего трения). По известному из опыта касательному модулю $E_K = \Delta\sigma_x / \Delta\epsilon_x$ можно определить пластический модуль упрочнения G_0

$$\frac{E}{G_0} = \frac{2}{1 + \sin \varphi} \left(\frac{E}{E_K} - 1 \right)$$

(G_0 и φ при одноосном нагружении — функции σ_x [1]).

Область активного догружения, когда положительные пластические сдвиги реализуются по всем плоскостям скольжения, определяется условиями $\Delta\sigma_x > 0$, $-(1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi) \leq m^{-1} \leq (1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi)$. В этом случае

$$(1.1) \quad \Delta\epsilon_x = \left(\frac{1 + \sin \varphi}{2G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta\sigma_x, \quad \Delta\gamma_{xy} = \left(\frac{2 \sin^2 \varphi}{G_0} + \frac{1}{\mu} \right) \Delta\tau_{xy}$$

(μ — упругий модуль сдвига, $\Delta\gamma_{xy}$ — приращение деформации сдвига).

Если $\Delta\tau_{xy} > 0$, $0 \leq m \leq 2 \sin 2\varphi / (1 + \sin \varphi)$, то одна из плоскостей скольжения разгружается и справедливы соотношения

$$(1.2) \quad \Delta\varepsilon_x = \left(\frac{3(1 + \sin \varphi)}{E G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta\sigma_x + \frac{\sin 2\varphi}{4G_0} \Delta\tau_{xy},$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} \operatorname{tg} \varphi \Delta\sigma_x + \left(\frac{\sin^2 \varphi}{G_0} + \frac{1}{\mu} \right) \Delta\tau_{xy}.$$

При $\Delta\tau_{xy} > 0$, $-2 \sin 2\varphi / (1 + \sin \varphi) \leq m \leq 0$ реализуется частичная разгрузка, для которой

$$(1.3) \quad \Delta\varepsilon_x = \left(\frac{1 + \sin \varphi}{3G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta\sigma_x + \frac{\sin 2\varphi}{4G_0} \Delta\tau_{xy},$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} \operatorname{tg} \varphi \Delta\sigma_x + \left(\frac{\sin^2 \varphi}{G_0} + \frac{1}{\mu} \right) \Delta\tau_{xy}.$$

Если при догрузке из растяжения $\Delta\sigma_x < 0$, $-(1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi) \leq m^{-1} \leq (1 + \sin \varphi) / (2 \sin 2\varphi)$, то происходит разгрузка по всем системам скольжения и материал в этой области деформируется упруго.

Как видно из (1.1)–(1.3), деформации $\Delta\varepsilon_x$, $\Delta\gamma_{xy}$ изменяются непрерывно в зависимости от направления догрузки m .

Обратимся к результатам экспериментов по сложному нагружению. Хорошее соответствие расчетных зависимостей по модели [1] с данными опытов на Ст. 20 [4] получается при $\varphi = 0,12$. С ростом уровня напряжений угол φ увеличивался [5]: $\varphi = 0,15 \div 0,41$ (для латуни), $0,18$ (для дюралюминия), $0,3$ (для меди).

В опытах [6] на тонкостенных трубчатых образцах из алюминиевого сплава 24S-T4 изучалась зависимость начального модуля $G_0 = \Delta\tau_{xy} / \Delta\gamma_{xy}$ от направления догрузки m . Хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов будем иметь, если примем $G_0 = 3940$ МПа, $\varphi = \pi/6$.

Исходя из теории [1], модуль G_0 можно также определять по известному из опыта на сжатие E_K :

$$(1.4) \quad \frac{E}{G_0} = \frac{2}{1 - \sin \varphi} \left(\frac{E}{E_K} - 1 \right).$$

При плоском напряженном состоянии в направлении z $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. В этом случае соотношения [1] для области активных догрузок из состояния сжатия в направлении x принимают вид

$$(1.5) \quad \Delta\varepsilon_x = \left(\frac{1 - \sin \varphi}{2G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta\sigma_x - \left(\frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} + \frac{\nu}{E} \right) \Delta\sigma_y,$$

$$\Delta\varepsilon_y = - \left(\frac{1 - \sin \varphi}{4G_0} + \frac{\nu}{E} \right) \Delta\sigma_x + \left(\frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} + \frac{1}{E} \right) \Delta\sigma_y,$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \left(\frac{2 \sin^2 \varphi}{G_0} + \frac{1}{\mu} \right) \Delta\tau_{xy}.$$

Определяющие соотношения теории [2] для растяжения и сжатия одинаковые и совпадают с теорией течения Рейса — Ланинга, основанной на изотропно расширяющейся поверхности Мизеса:

$$(1.6) \quad \Delta\varepsilon_x = \left(\frac{1}{E_K} + \frac{1 - 2\nu}{E} \right) \frac{\Delta\sigma_x}{3}, \quad \Delta\varepsilon_y = \Delta\varepsilon_z = - \frac{\Delta\varepsilon_x}{2} + \frac{1 - 2\nu}{2E} \Delta\sigma_x.$$

Как видно из (1.6), по известному из опыта касательному модулю E_K можно найти модуль упрочнения G_K :

$$E/G_K = 3E/E_K - 1 + 2\nu.$$

При решении задачи о выпучивании прямоугольной пластинки за пределом упругости используем уравнения теории [2] применительно к плоскому напряженному состоянию в направлении z . В этом случае

Номер образца	m	$G_i \cdot 10^{-2}$ МПа		
		эксперимент	теория [1]	теория [2]
A-1	-0,28	120	111	114
A-2	-0,40	117	120	125
A-3	-0,29	113	112	115
A-4	-0,32	116	114	118
A-5	-0,40	127	120	125
B-1	-2,0	232	237	237
C-1	-0,06	113	98	98
C-2	-0,025	95	96	96
D-1	1,2	84	59	61
D-2	1,1	77	60	62

для области активных догрузений из состояния одноосного сжатия в направлении x определяющие соотношения принимают вид

$$(1.7) \quad \Delta \varepsilon_x = \left(\frac{1-2\nu}{3E} + \frac{1}{3G_R} \right) \Delta \sigma_x + \left(\frac{1-2\nu}{3E} - \frac{1}{6G_R} \right) \Delta \sigma_y,$$

$$\Delta \varepsilon_y = \left(\frac{1-2\nu}{3E} - \frac{1}{6G_R} \right) \Delta \sigma_x + \left(\frac{5-\nu}{6E} + \frac{1}{12G_R} \right) \Delta \sigma_y, \quad \Delta \gamma_{xy} = \left(\frac{2\delta}{3G_R} + \frac{1-2\delta/3}{\mu} \right) \Delta \tau_{xy}$$

(G_R и δ — функции интенсивности касательных напряжений, определяются на основе опытных данных). В [2] подробно рассматриваются различные сложные догрузения из состояния одноосного растяжения с приложением $\Delta \sigma_x$, $\Delta \tau_{xy}$.

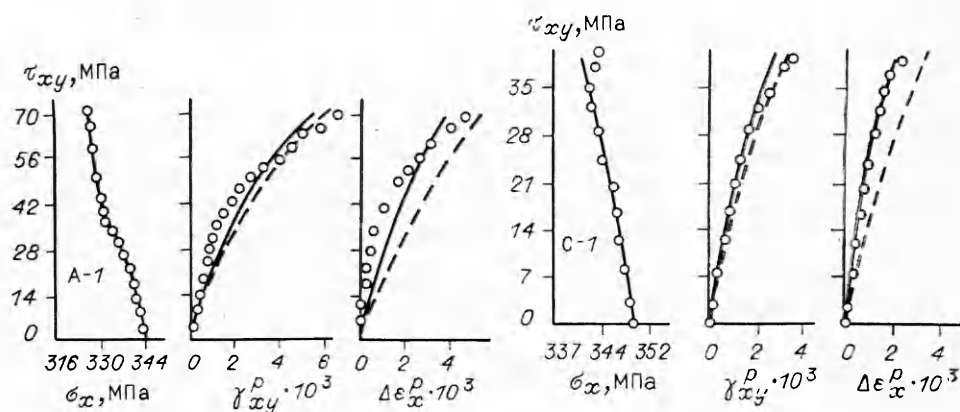
Проанализируем данные экспериментов [4—6] с позиции теории пластичности [2]. Хорошее соответствие расчетных зависимостей с результатами экспериментов на Ст. 20 [4] — при $\delta = 0,026$. Что касается опытов [5], то здесь вполне удовлетворительное соответствие расчета и эксперимента получается лишь для первой группы опытов (догрузка кручением). При этом установлено [2], что с ростом σ_x значения δ увеличиваются: для латуни $\delta = 0,1 \div 0,47$, для дюралюминия $0,15 \div 0,45$. Как следует из теории [2], догрузка растяжением из состояния кручения не должна вызывать изменения пластической деформации, но в опытах [5] это не подтверждается.

Обратимся теперь к результатам экспериментов [6]. Хорошее соответствие теоретических и опытных данных имеется при $G_R = 1640$ МПа, $\delta = 0,33$. В таблице представлены данные опытов для начального модуля догрузки G_i и результаты расчетов по теории [1] и теории [2]. На рис. 1—3 для участков сложного нагружения приводятся данные опытов (кружки) и расчетные кривые $\gamma_{xy}^p(\tau_{xy})$, $\Delta \varepsilon_x^p(\tau_{xy})$ по теориям [1] (сплошная линия) и [2] (штриховая). Здесь же указаны программы нагружений $\sigma_x(\tau_{xy})$.

2. Применим определяющие соотношения рассмотренных выше теорий к решению задачи о выпучивании шарнирно закрепленной удлиненной прямоугольной пластинки, сжатой вдоль длинной стороны.

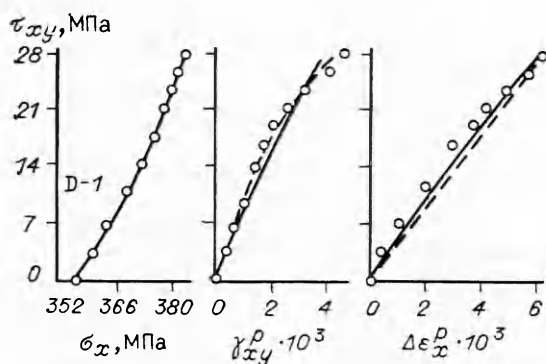
Первые исследования по выпучиванию пластин и оболочек на основе деформационной теории пластичности и классического представления о потере устойчивости при неизменных внешних силах принадлежат А. А. Ильюшину [8] и другим. При таком подходе выпучивание сопровождается появлением областей разгрузки, что существенно усложняет анализ. При использовании теории течения и того же критерия большая часть трудностей сохраняется.

Те же задачи решаются значительно проще, если исходя из какой-либо теории пластичности разыскивать нижнюю критическую нагрузку, соответствующую выпучиванию при продолжающемся нагружении (Шенли, 1946—1947 гг.). В [3] находим подробные ссылки на данные опытов по устойчивости пластин за пределом упругости и на работы, в которых анализ устойчивости ведется при использовании этого критерия с позиции деформационной теории и теории течения.

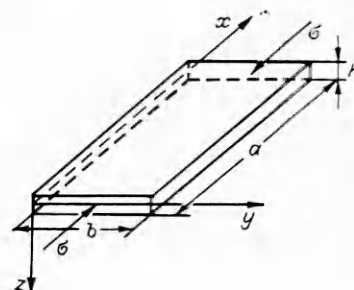


Р и с. 1

Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

Перейдем к решению задачи о выпучивании прямоугольной пластинки с позиций теорий [1, 2] при использовании критерия продолжающегося нагружения.

Пластинка постоянной толщины h (рис. 4) со сторонами a и b ($a \gg b$) до момента выпучивания находится в однородном напряженном состоянии $\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Запишем определяющие соотношения для области активных догружений из состояния одноосного сжатия в общем виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta\sigma_x &= E(a_{11}\Delta\varepsilon_x + a_{12}\Delta\varepsilon_y), \\ \Delta\sigma_y &= E(a_{21}\Delta\varepsilon_x + a_{22}\Delta\varepsilon_y), \quad \Delta\tau_{xy} = Ea_{33}\Delta\gamma_{xy}. \end{aligned}$$

Согласно теории изгиба пластин Кирхгофа, при выпучивании приращения деформаций — линейные функции расстояния от срединной поверхности

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Delta\varepsilon_x &= \Delta\varepsilon_x^0 - z\partial^2 w/\partial x^2, \\ \Delta\varepsilon_y &= \Delta\varepsilon_y^0 - z\partial^2 w/\partial y^2, \quad \Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{xy}^0 - 2z\partial^2 w/(\partial x \partial y), \end{aligned}$$

где $\Delta\varepsilon_x^0$, $\Delta\varepsilon_y^0$, $\Delta\gamma_{xy}^0$ — бесконечно малые приращения деформаций срединной поверхности; $w = w(x, y)$ — прогиб пластины при выпучивании.

Приращения напряжений, очевидно, также изменяются линейно по толщине пластинки. Нетрудно теперь, используя (2.1), (2.2), вычислить приращения изгибающих ΔM_x , ΔM_y и скручивающего ΔM_{xy} моментов:

$$(2.3) \quad \Delta M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_x z dz = -\frac{Eh^3}{12} \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\Delta M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y z dz = -\frac{Eh^3}{12} \left(a_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\Delta M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \tau_{xy} z dz = -\frac{Eh^3}{6} a_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Проектируя на ось z силы, действующие на элемент пластины в изогнутом состоянии, получим известное уравнение равновесия [3]

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 \Delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta M_y}{\partial y^2} + \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Подставляя (2.3) в (2.4), находим при $\sigma_x = -\sigma$ дифференциальное уравнение выпучивания пластинки

$$(2.5) \quad a_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (a_{12} + a_{21} + 4a_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{12\sigma}{Eh^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Для пластинки, шарнирно закрепленной по длинным краям, имеем следующие граничные условия при $y = 0, b$: $w = 0, \partial^2 w / \partial y^2 = 0$. Примем решение, удовлетворяющее этим условиям, в виде

$$(2.6) \quad w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя это выражение для прогиба в (2.5) и обозначая $\lambda = a^2 / (bm)^2$, найдем условие существования нетривиального решения в форме (2.6)

$$\sigma = \frac{Eh^2 \pi^2}{12b^2} \left[\frac{a_{11}}{\lambda^2} + (a_{12} + a_{21} + 4a_{33}) n^2 + a_{22} n^4 \lambda^2 \right].$$

Нетрудно видеть, что для нахождения наименьшего значения $\sigma = \sigma_*$ нужно положить $n = 1, \lambda^4 = a_{11}/a_{22}$, тогда

$$(2.7) \quad \sigma_* = \frac{E\pi^2 h^2}{12b^2} (2\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12} + a_{21} + 4a_{33}).$$

Таким образом, (2.7) определяет наименьшую сжимающую нагрузку, при которой происходит выпучивание удлиненной шарнирно закрепленной прямоугольной пластинки, сжатой вдоль длинной стороны.

Для упругого материала коэффициенты в соотношениях (2.4) принимают вид

$$(2.8) \quad a_{11} = a_{22} = \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\nu}{1 - \nu^2}, \quad a_{33} = \frac{1}{2(1 + \nu)}.$$

Подставляя (2.8) в (2.7), находим для упругой области

$$\sigma_* = \frac{E\pi^2}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2.$$

Эта формула справедлива лишь в том случае, если критическое напряжение находится в пределах упругости. Исходя из соотношений (1.5), найдем коэффициенты в (2.1) для пластической области активного нагружения

$$(2.9) \quad a_{11} = \left(\frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} E + 1 \right) / D, \quad a_{12} = \left(\frac{1 + \sin \varphi}{4G_0} E + \nu \right) / D,$$

$$a_{21} = \left(\frac{1 - \sin \varphi}{4G_0} E + \nu \right) / D, \quad a_{22} = \left(\frac{1 - \sin \varphi}{2G_0} E + 1 \right) / D,$$

$$a_{33}^{-1} = 2 \sin^2 \varphi E / G_0 + 2(1 + \nu),$$

$$D = \frac{\cos^2 \varphi}{16} \left(\frac{E}{G_0} \right)^2 + \frac{3 - 2\nu - \sin \varphi}{4G_0} E + 1 - \nu^2.$$

Подставляя (2.9) в (2.7), выводим зависимость σ_* от b/h по теории [1].

Если теперь разрешить относительно приращений напряжений соотношения (1.7) в виде (2.1), то получим

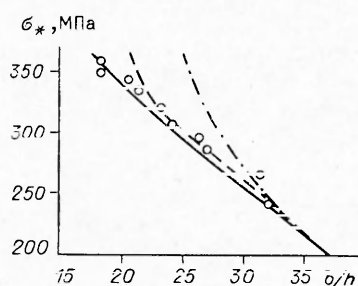
$$(2.10) \quad a_{11} = \frac{1 + 2(5 - \nu) G_R/E}{D}, \quad a_{22} = 4 \frac{1 + (1 - 2\nu) G_R/E}{D},$$

$$a_{12} = a_{21} = 2 \frac{1 - 2(1 - 2\nu) G_R/E}{D},$$

$$a_{33} = \frac{G_R/E}{2\delta(1 - G_R/\mu)/3 + G_R/\mu},$$

$$D = 5 - 4\nu + (1 - 2\nu) G_R/\mu.$$

Проведем сравнение расчетных зависимостей $\sigma_*(b/h)$ с результатами экспериментов [7]. В [3] на основе опытных данных для дюралюминиевых пластинок с упруго заземленными краями [7] приводится пересчет зависимостей $\sigma_*(b/h)$ к случаю шарнирно закрепленных краев. Результаты этих опытов изображены на рис. 5 кружками. Расчетная зависимость



Р и с. 5

$\sigma_* = \sigma_*(b/h)$ по теории [1] нанесена сплошной линией. В расчетах $E = 75\,000$ МПа, $\nu = 0,3$. В (2.9) при $\sigma_* < 340$ МПа угол $\varphi = 0$, далее при $\sigma_* = 340$ МПа $\varphi = 0,052(3^\circ)$, при $\sigma_* = 356$ МПа $\varphi = 0,105(6^\circ)$ и при $\sigma_* = 364$ МПа $\varphi = 0,156(9^\circ)$. Используемый в опытах металл по механическим свойствам был близок к дюралюминиевому Д16Т, поэтому пластический модуль упрочнения G_0 определялся из (1.4) по результатам экспериментов на сжатие образцов из Д16Т [3].

При построении расчетных зависимостей по теории [2] модуль упрочнения G_R находили по известному из опыта на одноосное сжатие касательному модулю E_R [3]. Если в (2.10) примем $\delta = 0$ и подставим в (2.7), то получим расчетную зависимость $\sigma_* = \sigma_*(b/h)$ по теории течения с изотропно-расширяющейся поверхностью Мизеса, которая изображена на рис. 5 штрихпунктирной линией. Лучшего соответствия с экспериментом можно добиться за счет увеличения δ . Из анализа опытных данных [5] следует, что для дюралюминия Д16Т максимальное значение $\delta \approx 0,5$. Расчетная зависимость $\sigma_* = \sigma_*(b/h)$, построенная по теории [2] при $\delta = 0,5$, дана на рис. 5 штриховой линией.

На основе приведенного сравнения можно сделать вывод, что при решении рассмотренной выше задачи об устойчивости пластинки предпочтительнее отдать теории [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коврижных А. М. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 4.
2. Коврижных А. М. К теории пластичности, учитывающей вид напряженного состояния при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 6.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
4. Жуков А. М. Пластические деформации стали при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН.— 1954.— № 11.
5. Свешникова В. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов // Изв. АН СССР. ОТН.— 1956.— № 1.
6. Naghdi P. M., Rowley J. C. An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity // J. Mech. Phys. Solids.— 1954.— V. 3, N 1.
7. Stowell E. Z. A unified theory of plastic buckling of columns and plates.— Washington, 1948.— (Techn. Note/NACA; N 1556).
8. Пльюшин А. А. Пластичность.— М.: Гостехиздат, 1948.

г. Новосибирск

Поступила 2/IX 1988 г.,
в окончательном варианте — 12/V 1989 г.