

ЛИТЕРАТУРА

1. Багрянов Б. В., Квасков Г. А. и др. Исследование осевого динамического сжатия трубчатых металлических крешеров // ПМТФ.— 1982.— № 1.
2. Коипа А. О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе // Механика.— 1961.— № 6.
3. Ефимов А. Б., Малый В. И. О механизме выпучивания цилиндрической оболочки при продольном ударе // Теория оболочек и пластин.— М.: Наука, 1973.
4. Баженов В. Г., Ломунов В. К. Экспериментально-теоретическое исследование упругопластического выпучивания цилиндрических оболочек при осевом ударе // ПМ.— 1983.— № 6.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.
6. Баженов В. Г., Ломунов В. К. Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении // Прикл. проблемы прочности и пластичности/Всесоюз. межвуз. сб.— Горький: Горьк. ун-т, 1975.— Вып. 2.
7. Бригадиров Г. В., Ломунов В. К. О двух расчетных схемах ударного выпучивания цилиндрических оболочек // Прикл. проблемы прочности и пластичности/Всесоюз. межвуз. сб.— Горький: Горьк. ун-т, 1984.— Вып. 28.

Поступила 3/II 1987 г.

УДК 539.3

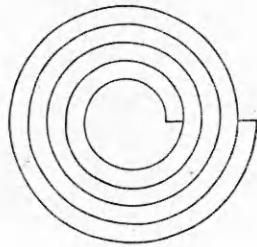
ПЛАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РУЛОНИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко

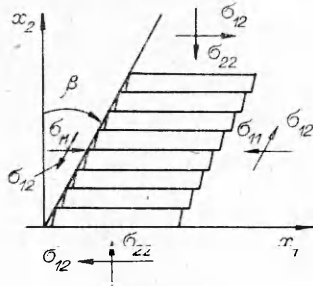
(Новосибирск)

1. Рассмотренные в данной работе постановки возникли из следующих соображений. Обратимся к классическому решению задачи Ламе для толстостенной цилиндрической трубы. В силу осевой симметрии задачи касательные напряжения отсутствуют: $\sigma_{r\theta} = 0$ (r, θ — полярные координаты). Но это означает, что если в трубе сделать произвольное число разрезов по окружностям $r = \text{const}$, то на работе конструкции эти разрезы не отразятся. Следовательно, сечение трубы можно представить набранным из тонких отдельных колец, вплотную вставленных друг в друга; кольца работают так, что условия на контактах между ними на работе всей конструкции не сказываются. Как известно, в такой схеме материал нагружен весьма неравномерно, причем, если внешний радиус трубы превосходит внутренний более чем в 3—4 раза, то дальнейшее увеличение толщины трубы на переход внутренней области в пластическое состояние (разрушение) практически не влияет. Поэтому естественно возникает идея: нельзя ли работу упругих колец организовать таким образом, чтобы между ними мобилизовались силы внешнего трения, которые внесли бы свой вклад в «противоборство» внутреннему давлению. Разрежем кольца по некоторому радиусу и склеим их со сдвигом на один шаг (рис. 1). Полученная конструкция отличается от предыдущей принципиально. Можно ожидать, что за счет проскальзывания слоев удастся включить в работу материал, удаленный от внутренней границы и, следовательно, приложенную нагрузку распределить более равномерно, увеличив тем самым несущую способность конструкции.

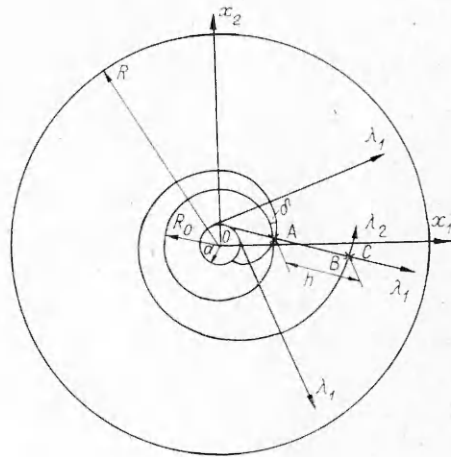
2. Пусть имеется упругая оболочка постоянной толщины, свернутая в рулон (рис. 1). Считаем это состояние естественным. Возьмем отдельный элемент среды, включающий некоторое число слоев рулона. Кривизну линий контакта пока не учитываем (рис. 2). Как реагирует этот элемент на внешнее нагружение? Очевидно, что при сжатии в направлениях Ox_1, Ox_2 разрезы никак не проявятся и реакция элемента будет упругой. Пусть теперь приложены касательные напряжения, они вызовут упругий сдвиг слоев материала между разрезами и в общем случае — определенные проскальзывания на контактах. Таким образом,



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

поля скоростей и смещений становятся разрывными, а деформация элемента в целом (точнее, макродеформация, характеризующая изменение угла β и размеров элемента в направлениях Ox_1, Ox_2) состоит из двух частей: упру-

ругой, связанной с упругим деформированием слоев, и пластической, связанной с проскальзыванием между ними. Следовательно, хотя материал оболочки идеально упругий, для анализа ее работы естественно использовать упругопластические модели, причем такие, в которых учитываются существенные черты внутреннего механизма пластической деформации: разрывность исходного поля перемещений, наличие проскальзываний только по одному направлению и др. Такие модели разработаны в [1, 2], где показано, что исходное разрывное поле перемещений допускает такое гладкое осреднение, что тензор деформаций, определенный по гладкому полю, характеризует макродеформацию, а для сохранения информации о разрывах поля, которая теряется при осреднении, вводятся дополнительные кинематические переменные γ_{12}, γ_{21} , имеющие смысл безразмерных проскальзываний. Для определения последних необходимо ввести внутреннее вращение ω , характеризующее поворот материальных микроэлементов, целиком содержащихся внутри слоя. Так, в случае элемента (см. рис. 2) система определяющих уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11} - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22} - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \omega = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} + \Gamma(\sigma_{12}), \quad \gamma_{21} = \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \omega = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \end{aligned}$$

где μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; w_1, w_2 — компоненты вектора перемещений; Γ — безразмерная величина, определяющая проскальзывание.

В [1] уравнения записаны в координатной системе, линии которой совпадают с линиями скольжения. В задаче о деформировании рулонированной оболочки такую систему можно описать следующим образом. Возьмем окружность радиуса a и проведем к ней касательные (рис. 3). Эта окружность является огибающей для семейства своих касательных. Затем из всех точек окружности проведем спиральные кривые, которые в любой точке плоскости были бы ортогональны соответствующей этой точке прямой из семейства касательных. Получили два взаимно ортогональных семейства линий, причем оказывается, что расстояние h между соседними витками одной и той же спирали постоянно и равно $2\lambda a$.

Таким образом, в данной задаче появляется характерный размер h , имеющий смысл толщины слоя оболочки. Следует отметить, что нет необходимости считать h исчезающе малой величиной. Это нигде и не предполагается. А переход к осреднению в элементе среды означает фактически, что упругий слой оболочки набирается из исчезающе малых упругих слоев и общее проскальзывание между слоями толщины h «размазывается» по континуальному элементу. Отметим также, что по построению расстояние h меряется по нормали к спирали, т. е. по прямой из семейства касательных, а не по радиусу, как в спирали Архимеда. Это означает, что если взять лист толщины h какого-нибудь материала и свернуть его в рулон, то линия разреза слоев полученной оболочки совпадает именно с построенной спиральной линией.

Итак, координатная сетка построена. Задачу будем решать для кольцевой области $R_0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (см. рис. 3), причем на внутренней границе $r = R_0$ угол δ между окружностью и спиралью постоянен: $\delta = \arcsin(a/R_0)$. Выбор кольцевой области означает, что в реальной оболочке (см. рис. 1) на внутренней и внешней границах при переходе к окружностям убирается часть материала. Здесь обнаруживается замечательный факт: в континуальной постановке задача является осесимметричной.

Выберем следующую параметризацию построенной координатной сетки: λ_2 — угол между соответствующей прямой из семейства касательных и осью Ox_1 , λ_1 — длина вдоль некоторой фиксированной прямой $\lambda_2 = \text{const}$. Для того чтобы по числу λ_1 определить нужную спираль из своего семейства, оказывается достаточным запараметризовать только отрезок [AB]. Такой выбор параметров означает, что на фиксированной линии $\lambda_2 = \text{const}$ необходимо выполнить условия согласования: точки $B(\lambda_1 + h, \lambda_2)$ и $C(\lambda_1, \lambda_2 + 2\pi)$ должны совпадать. Таким образом, преобразование полярных координат (r, θ) в систему (λ_1, λ_2) имеет вид

$$(2.1) \quad \lambda_1 = \sqrt{r^2 - \xi^2} - \xi(\theta - \arcsin(\xi/r)) - R_0 \cos \delta, \lambda_2 = \theta - \arcsin(\xi/r) \\ (\xi = R_0 \sin \delta). \text{ Параметры Ламэ такой замены: } a_1 = 1, a_2 = \lambda_1 + \xi \lambda_2 + R_0 \cos \delta.$$

Заметим, что угол наклона к спирали λ_2 к окружности не постоянен в каждой точке плоскости и определяется соотношением $\text{tg } \kappa = \frac{\xi}{a_2} = \frac{\xi}{\lambda_1 + \xi \lambda_2 + R_0 \cos \delta}$. Радиус кривизны ρ спиральной линии λ_2 тоже переменный:

$\rho = a_2 = \sqrt{r^2 - \xi^2}$. Из этого следует, что при движении оболочки вдоль спиральной траектории возникают изгибные моментные напряжения, которыми, однако, можно пренебречь, если считать, что средний радиус трубы $(R + R_0)/2$ много больше толщины слоя оболочки h [3, 4].

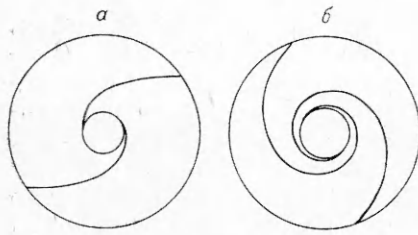
Система (2.1) выбрана так, что линии λ_2 совпадают с линиями раздела слоев рулонированной оболочки. Тогда замкнутая система уравнений, согласно [1], примет вид

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{a_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{2\sigma_{12}^0}{a_2} = 0;$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial w_1^0}{\partial \lambda_1} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0, \quad \frac{\partial w_2^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{w_1^0}{a_2} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0;$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial w_3^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial w_1^0}{a_2 \partial \lambda_2} - \frac{w_2^0}{a_2} = \frac{\sigma_{12}^0}{\mu} + \Gamma(\sigma_{12}^0, \lambda_1, \lambda_2),$$

где индекс 0 означает проекции на координаты (λ_1, λ_2) ; (2.2) — уравнения равновесия в криволинейных координатах; (2.3) характеризуют упругие изменения размеров элементарного объема в направлениях λ_1, λ_2 ; (2.4) описывает сдвиговую деформацию элементарного объема. Функция Γ имеет смысл безразмерной величины проскальзывания



Р и с. 4

слоев и может явно зависеть от координат λ_1, λ_2 . Это означает возможность учета неоднородных условий на контакте (неравномерная смазка). Ниже ограничимся только прямой задачей, когда функция Γ заранее задана из экспериментальных данных о характере контактного взаимодействия слоев.

3. Вначале рассмотрим жесткую постановку задачи, когда модуль сдвига $\mu \rightarrow \infty$. В этом случае оболочка несжимаема и нерастяжима, а задача становится кинематически определенной. Система (2.3) гиперболическая и требует двух краевых условий на перемещения. Пусть

$$(3.1) \quad w_1^0|_{\lambda_1=\chi_1} = 0, \quad w_2^0|_{\lambda_2=\chi_2} = U,$$

где U — постоянная; $\lambda_1 = \chi_1(\lambda_2) = \xi(\sqrt{(R/\xi)^2 - 1} - \text{ctg } \delta - \lambda_2)$, $\lambda_2 = -\chi_2(\lambda_1) = \sqrt{(R/\xi)^2 - 1} - \text{ctg } \delta - \lambda_1/\xi$ — внешняя граница области. Это условие означает, что каждая точка внешней границы смещается вдоль спирали λ_2 на расстояние U . Тогда из системы (2.3) с учетом (3.1) получаем

$$(3.2) \quad w_1^0 = 0, \quad w_2^0 = U.$$

Из условия $w_1^0 = 0$ следует $\omega = U/a_2$. Полученные результаты указывают на адекватность построенной модели реальному деформированию жесткой оболочки, поскольку такое деформирование можно понимать как движение элементов этой оболочки вдоль заданной спиральной траектории, угол поворота ω по определению есть отношение перемещения U к радиусу кривизны траектории a_2 . Эти результаты проиллюстрированы на рис. 4, а, б (перед началом деформирования сечение трубы разделено на две части диаметром).

После того как перемещения найдены, обращая известную функцию Γ в (2.4), находим касательные напряжения

$$(3.3) \quad \sigma_{12}^0 = S(\lambda_1, \lambda_2).$$

Подставляя (3.3) в (2.2), получаем решение для напряжений в квадратурах:

$$(3.4) \quad \sigma_{22}^0 = \int \left(-2S(\lambda_1, \lambda_2) - a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 + f_1(\lambda_1),$$

$$\sigma_{11}^0 = \frac{1}{a_2} \left(\int \left(-\frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \right) d\lambda_1 + \iint \left(-2S(\lambda_1, \lambda_2) - a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 d\lambda_1 + \int f_1(\lambda_1) d\lambda_1 + f_2(\lambda_2) \right)$$

($f_i(\lambda_i)$ — произвольные интегрирования). В качестве краевых возьмем обычные условия вида $\sigma_r|_{r=R_0} = -p$, $\sigma_{r\theta}|_{r=R_0} = 0$, перепроектировав которые на оси (λ_1, λ_2) , из (3.4) находим, что функции $f_i(\lambda_i)$ определяются из соотношений

$$(3.5) \quad f_1(\lambda_1) = -p - S\left(\lambda_1, -\frac{\lambda_1}{\xi}\right) \text{ctg } \delta +$$

$$+ \left[\int \left(2S(\lambda_1, \lambda_2) + a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 \right]_{\lambda_2 = -\lambda_1/\xi}, \quad f_2(\lambda_2) =$$

$$= (-p - S(-\xi\lambda_2, \lambda_2) \text{tg } \delta) R_0 \cos \delta + \left[\int \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 \right]_{\lambda_1 = -\xi\lambda_2} +$$

$$+ \left[\iint \left(2S(\lambda_1, \lambda_2) + a_2 \frac{\partial S(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \right) d\lambda_2 d\lambda_1 \right]_{\lambda_1 = -\xi\lambda_2} - \left[\int f_1(\lambda_1) d\lambda_1 \right]_{\lambda_1 = -\xi\lambda_2}.$$

Таким образом, задавая конкретный вид условия на контакте (функцию $S(\lambda_1, \lambda_2)$), имеем решение исходной жесткой задачи в виде (3.2) — (3.5).

4. Рассмотрим частный случай исходной жесткой задачи, когда условие на контакте соответствует условию постоянства касательных напряжений

$$(4.1) \quad \sigma_{12}^0 = -T, \quad T = \text{const.}$$

Тогда система (3.4), (3.5), (4.1) дает следующее распределение напряжений:

$$(4.2) \quad \sigma_{11}^0 = -p - T \operatorname{ctg} \delta + T \left(\frac{a_2}{\xi} + \frac{\xi}{a_2} \right),$$

$$\sigma_{22}^0 = -p - T \operatorname{ctg} \delta + 2T \frac{a_2}{\xi}, \quad \sigma_{12}^0 = -T.$$

В проекции на полярные координаты выражения (4.2) преобразуются к виду

$$(4.3) \quad \sigma_r = -p + T \left(\sqrt{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{R_0}{\xi}\right)^2 - 1} \right),$$

$$\sigma_\theta = -p + T \left(\frac{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 1}} + \sqrt{\left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{R_0}{\xi}\right)^2 - 1} \right), \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Из (4.3) вытекает, что если положить $T = 0$, т. е. проскальзывание слоев происходит свободно ($\sigma_{12}^0 = 0$), то решение совпадает с гидростатическим.

Рассмотрим условие, когда все напряжения, возникающие в рулонированной трубе, не превосходят предела упругости материала τ_s , например, в смысле критерия

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)^2 + 4\sigma_{12}^0{}^2} < \tau_s,$$

что наложит ограничение на T в виде $T < \min_{R_0 \leq r \leq R} \left(2\tau_s \frac{r}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right)$.

Этот минимум существенно зависит от угла δ (по определению $\xi = R_0 \times \sin \delta$). Ясно, что для улучшения работы конструкции необходимо взять такой угол δ , при котором значение T максимально. Все вышеперечисленные условия приводят к тому, что несущая способность рулонированной оболочки с условием на контакте (4.1) будет максимальной (в смысле критерия (4.4)) при $\delta = \arcsin \left[R / \left(\sqrt{R^2 + R_0^2} \right) \right]$, причем ограничение на T преобразуется к виду $T < 2\tau_s R_0 R / (R_0^2 + R^2)$, подставляя которое в распределение (4.3) и требуя, чтобы на внешней границе области давление равнялось нулю (в силу гиперболичности системы это возможно не при всех значениях p), получим ограничение на внутреннее давление p .

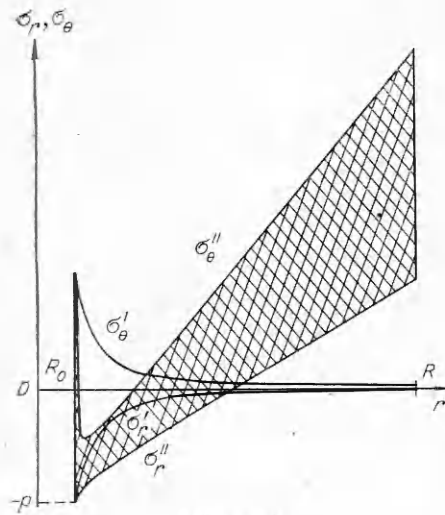
Итак, предельное давление, которое может выдержать исходная оболочка, не переходя в пластическое состояние (разрушение), при условии на контакте (4.1)

$$(4.5) \quad p^* = 2\tau_s \left(1 - 2R_0^2 / (R^2 + R_0^2) \right),$$

тогда как в решении Ламэ [5] на внутренней границе области впервые появляется пластическая зона при нагрузке

$$(4.6) \quad p_0^* = \tau_s \left(1 - R_0^2 / R^2 \right).$$

Сравнивая выражения (4.5) и (4.6), видим, что, разрешая в толстостенной трубе вдоль спиральной линии λ_2 проскальзывание с условием на контакте (4.1), можно получить выигрыш в несущей способности по сравнению с



Р и с. 5

ких от внутренней кромки слоев рулонированной оболочки (рис. 5).

Зададим теперь некоторое внутреннее давление p_0 и потребуем, чтобы материал деформировался только упруго (критерий (4.4)). При этом для рулонированной оболочки потребуется существенно меньшая толщина $R_2 = R_0 \sqrt{\frac{2+p_0/\tau_s}{2-p_0/\tau_s}}$, чем для цельной трубы $R_1 = R_0 \frac{1}{\sqrt{1-p_0/\tau_s}}$ (рис. 6).

5. Рассмотрим исходную задачу с учетом упругого деформирования самих слоев оболочки ($\mu < \infty$). Как и в жесткой постановке, возьмем условие на контакте в виде (4.1) (условие постоянства касательных напряжений σ_{12}^0). Очевидно, что распределение напряжений будет совпадать с распределением в жестком случае, поскольку задача статически определима и напряжения находятся независимо от кинематики. Перемещения же отличаются от жестких вкладом упругого деформирования самих слоев. Из системы (2.3) с учетом (4.2) после интегрирования имеем

$$(5.1) \quad w_1^0 = \frac{1-2\nu}{2\mu} (-p - T \operatorname{ctg} \delta) a_2 + \frac{1-3\nu}{2\mu} T \frac{a_2^2}{2\xi} + \frac{1-\nu}{2\mu} T \xi \ln a_2 + \Phi_2(\lambda_2),$$

$$w_2^0 = \frac{1-2\nu}{2\mu} T a_2 + \frac{1-\nu}{2\mu} T \frac{a_2^3}{2\xi^2} - \frac{1-\nu}{2\mu} T a_2 \ln a_2 - \int \Phi_2(\lambda_2) d\lambda_2 + \Phi_1(\lambda_1)$$

($\Phi_i(\lambda_i)$ — произвольные интегрирования). Если запретить перемещение внешней границы оболочки $w_1^0|_{\lambda_1=\lambda_1} = 0$, $w_2^0|_{\lambda_2=\lambda_2} = 0$, то функции $\Phi_i(\lambda_i)$ станут постоянными и определяются из соотношений

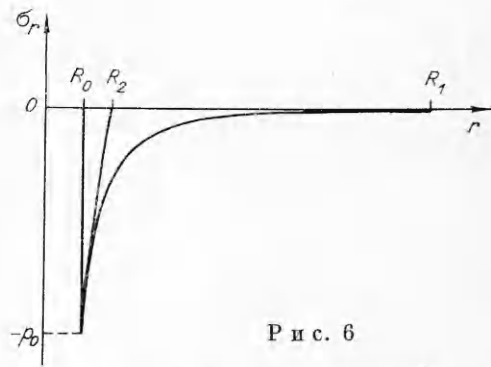
$$(5.2) \quad \Phi_2(\lambda_2) = C_2 = \frac{1-2\nu}{2\mu} (P + T \operatorname{ctg} \delta) A - \frac{1-3\nu}{2\mu} T \frac{A^2}{2\xi} - \frac{1-\nu}{2\mu} T \xi \ln(A),$$

$$\Phi_1(\lambda_1) = C_1 = C_2 \frac{A}{\xi} - \frac{1-2\nu}{2\mu} T A - \frac{1-\nu}{2\mu} T \frac{A^3}{2\xi^2} + \frac{1-\nu}{2\mu} T A \ln(A)$$

$$(A = \sqrt{R^2 - \xi^2}).$$

Таким образом, выражения (4.2), (5.1), (5.2) дают полное решение упругопластической постановки исходной задачи при условии на контакте (4.1).

Итак, рассмотрен подход к решению класса задач упругого деформирования рулонированных оболочек, основанный на использовании пластических моделей, причем под пластичностью здесь понимается наличие проскальзывания слоев этих оболочек. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния таких конструкций. Оказалось, что за счет возможности проскальзывания слоев рулонированная оболочка работает



Р и с. 6

цельной трубой практически вдвое. Ясно, что это становится возможным за счет более равномерного перераспределения приложенной нагрузки по толщине конструкции, т. е. за счет включения в работу даже далекой

лучше, чем цельная толстостенная труба в том смысле, что удастся более равномерно по толщине конструкции перераспределить приложенную нагрузку. В частности, если условие на контакте взять в виде (4.1), то можно получить в сравнении с цельной трубой выигрыш в несущей способности практически вдвое. Приведенная модель позволяет рассматривать ее обобщения в ряде других моделей, учитывающих, например, внутреннее трение среды, пластические деформации самих слоев оболочки и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // ПМТФ.— 1977.— № 3.
2. Ревуженко А. Ф. О деформировании сыпучей среды. Ч. IV. Микровращения // ФТПРПИ.— 1983.— № 6.
3. Писаренко Г. С., Бабенко А. Е. Напряженно-деформированное состояние трехслойной цилиндрической оболочки под внутренним давлением // Пробл. прочности.— 1977.— № 3.
4. Ильин Л. А., Лобкова Н. А. Упругая деформация и проскальзывание слоев рулонированной цилиндрической оболочки при нагружении внутренним давлением // ПМ.— 1981.— Т. 17, № 6.
5. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.

Поступила 18/III 1987 г.

УДК 539.374

АНТИПЛОСКОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

С. И. Сенашов

(Красноярск)

Рассмотрим уравнения, описывающие нестационарные пластические течения среды Мизеса:

$$(1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j},$$

$$s_{ij}s_{ij} = 2k_s^2, \quad 2s_{ij} = \lambda \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

где u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора скорости; p — гидростатическое давление; λ — неотрицательная функция; s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; k_s — предел текучести при чистом сдвиге; по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Предположим, что среда находится в условиях антиплоского пластического течения, поэтому решение уравнений (1) следует искать в виде [1]

$$(2) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, y, t), \quad p = 0.$$

Подставляя соотношения (2) в (1), имеем уравнение, описывающее антиплоское пластическое течение:

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{w_y}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Для отыскания точных решений уравнения (3) найдем группу непрерывных преобразований, им допускаемую. Вычисляя ее, согласно методике