

11. *Liepmann H. W., Laufer J.* Investigations of free turbulent mixing. NACA Report N 1257.
12. *Rodi W., Spalding D. B.* A two-parameter model of turbulence and its application to free jets.— In: Wärme — und Stoffübertragung. Bd 3. Berlin, Springer — Verlag., 1970, p. 85—95.
13. *Vasilii J.* Turbulent mixing of [a rocket exhaust jet with a supersonic stream including chemical reactions.—*J. Aerospace Sci.*, 1962, vol. 29, N 1, p. 19—28.
14. *Kraichnan R. H.* Turbulent mixing in the chemically reacting wake. Research Council of Alberta. Report (RCA Report) 64—07. (December 1964).

УДК 532.517.4+536.2.023

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПРИСТЕННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА

П. И. Гешев

(Новосибирск)

Рассмотрен турбулентный перенос тепла в средах с малыми числами Прандтля ($Pr \ll 1$ — жидкие металлы). В этом случае тепловой подслоя в $Pr=1$ раз толще вязкого подслоя. Установлено, что коэффициент турбулентного переноса тепла меняется в тепловом подслое пропорционально второй степени расстояния до стенки; отношение коэффициентов турбулентного переноса тепла и импульса в этой области уменьшается по линейному закону с приближением к стенке. Выводы теории сравниваются с экспериментальными данными других авторов.

Как известно, числа Прандтля для жидких металлов малы: $Pr = \frac{\nu}{\chi} \sim 10^{-2} \dots 10^{-3}$ (ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент молекулярной теплопроводности), а при $\chi \gg \nu$ область влияния молекулярных эффектов переноса тепла («тепловой подслоя») намного превосходит по своим размерам вязкий подслоя, размеры которого определяются масштабом $y_1 = \frac{\nu}{v_*} \left(v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right)$ — параметр «динамической скорости», τ_w — напряжение трения на стенке, ρ — плотность жидкости). Толщина теплового подслоя при $Pr \ll 1$ определяется масштабом $y_2 = \frac{\chi}{v_*}$ [1]. Вне теплового подслоя в слое постоянного напряжения трения соображения размерности дают значение $\chi_T(y) = \text{const } v_* y$, где $\chi_T(y)$ — коэффициент турбулентной теплопроводности; y — расстояние до стенки. Поведение функции $\chi_T(y)$ в тепловом подслое определяется согласно уравнению для пульсаций температуры.

1. Рассмотрим турбулентный поток несжимаемой жидкости, текущей над гладкой поверхностью в направлении оси x , ось y направим по нормали к стенке, ось z — перпендикулярно осям x и y . Обозначим через $U(y)$ среднюю скорость потока, через u, v, w — пульсационные составляющие скорости в x, y, z -направлениях соответственно. Турбулентность предполагается статистически стационарной по времени и однородной по координатам x и z .

Ограничимся рассмотрением пристенной области $y \ll L$ (L — внешний масштаб потока), где турбулентность имеет универсальный характер [1,2]. Основные положения теории подобия пристенной турбулентности сформу-

лируем в виде двух гипотез, аналогичных колмогоровским гипотезам подобия [1]:

1. В случае пристенной турбулентности с достаточно большими числами Рейнольдса Re статистический режим турбулентных пульсаций скорости в области, расположенной близко к гладкой стенке, однозначно определяется двумя параметрами: v_* и ν .

2. Если $Re \gg 1$, то существует широкая область $L \gg y \gg y_1$, в которой статистический режим пульсаций скорости однозначно определяется параметром v_* и не зависит от ν .

Под статистическим режимом следует понимать совокупность всех многомерных распределений вероятности или множество всех многомерных моментов пульсационных скоростей. Гипотеза 2 может оказаться несправедливой, если точки наблюдения взяты слишком близко друг к другу — на расстояниях порядка масштаба наименьших вихрей ν/v_* . Для ее справедливости нужно потребовать выполнение хотя бы одного из условий

$$(1.1) \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg \frac{\nu}{v_*}, \quad |t - t'| \gg \frac{\nu}{v_*}$$

для любых точек \mathbf{x} , \mathbf{x}' и моментов времени t , t' , в которых берутся значения скоростей, входящих в гидродинамические моменты.

Рассмотрим в области $L \gg y \gg y_1$ момент $\langle v(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}', t) \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по времени, либо по статистическому ансамблю). Предполагая выполненным первое условие из (1.1) и справедливость гипотезы 2, заключаем, что он зависит лишь от v_* , y , y' , $x' - x$, $z' - z$ (разности возникают в силу однородности по x и z). Так как из v_* и координат нельзя составить безразмерной комбинации, общий вид момента должен быть следующим:

$$(1.2) \quad \langle v(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}', t) \rangle = v_*^2 R\left(\frac{y'}{y}, \frac{x' - x}{y}, \frac{z' - z}{y}\right),$$

где $R(\eta, \xi, \zeta)$ — некоторая безразмерная функция. Аналогично устанавливаются выражения для любых моментов. В дальнейшем потребуются лишь следующие:

$$(1.3) \quad \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) u_k(\mathbf{x}'', t) \rangle = v_*^3 \Phi_{ijk}\left(\frac{y'}{y}, \frac{x' - x}{y}, \frac{z' - z}{y}; \frac{y''}{y}, \frac{x'' - x}{y}, \frac{z'' - z}{y}\right);$$

$$(1.4) \quad \left\langle u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_j(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{v_*^3}{y} \Psi_{ij}\left(\frac{y'}{y}, \frac{x' - x}{y}, \frac{z' - z}{y}\right),$$

где $u_i(\mathbf{x}, t)$ — вектор пульсационной скорости; Φ_{ijk} , Ψ_{ij} — безразмерные функции. В случае, когда в (1.2) — (1.4) берутся различные моменты времени, в безразмерных функциях возникает зависимость от комплексов $\frac{t' - t}{y} v_*$, $\frac{t'' - t}{y} v_*$.

Закон относительного изменения средней скорости имеет вид [1]

$$(1.5) \quad \Delta U = U(y') - U(y) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y'}{y},$$

где $\kappa = 0,4$ — постоянная Кармана, а y и y' взяты в области, где справедлива гипотеза 2.

Формулы типа (1.2) — (1.4) обсуждались Таунсендом [2]. Теория подобия пристенной турбулентности изложена в [1, 2].

2. Уравнения для средней температуры $T(y)$ и пульсации температуры $\theta(x, t)$ получаются из уравнения конвективного переноса тепла в предположении статистической стационарности по времени и однородности по координатам x и z

$$(2.1) \quad \frac{d\langle v\theta \rangle}{dy} = \chi \frac{d^2 T}{dy^2};$$

$$(2.2) \quad \Delta\theta = \frac{v}{\chi} \frac{dT}{dy} + \frac{1}{\chi} \left\{ U \frac{\partial\theta}{\partial x} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{d\langle v\theta \rangle}{dy} + \frac{\partial\theta}{\partial t} \right\},$$

где Δ — оператор Лапласа. Граничные условия к уравнениям (2.1), (2.2) могут быть двух типов:

$$(2.3) \quad (T)_{y=0} = \text{const}, \quad (\theta)_{y=0} = 0;$$

$$(2.4) \quad \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \text{const}, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.$$

Температурные пульсации в тепловом подслое вызываются турбулентным полем скорости, наложенным на линейный профиль средней температуры) $\left(\frac{dT}{dy} \simeq \text{const}$ в тепловом подслое). Представляется естественным предположение, что при $y \ll y_2 = \frac{\chi}{v_*}$ пространственно-временные масштабы температурных пульсаций определяются только масштабами турбулентных движений и не зависят от параметра χ (здесь χ влияет лишь на амплитуду θ). Если $y \gg y_1 = \frac{v}{v_*}$, то, согласно результатам п. 1, на расстоянии y от стенки масштаб вихрей $\sim y$, а временной масштаб движения $\sim \frac{y}{v_*}$.

Оценивая производные от $\theta(x, t)$ масштабами y и $\frac{y}{v_*}$, а скорости — параметром v_* , заключаем, что в тепловом подслое (при $y \gg y_2$) справедливо неравенство

$$\frac{1}{\chi} \left\{ U \frac{\partial\theta}{\partial x} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{d\langle v\theta \rangle}{dy} + \frac{\partial\theta}{\partial t} \right\} \sim \frac{v_*\theta}{\chi y} \ll \frac{\theta}{y^2} \sim \Delta\theta,$$

позволяющее пренебречь в (2.2) членами в фигурных скобках по сравнению с членом $\Delta\theta$ (оценки имеют смысл, конечно, не для отдельных реализаций, а лишь для среднеквадратичных значений величин).

Чтобы окончательно убедиться в возможности пренебрежения указанными членами в (2.2), устремим χ и $\frac{dT}{dy}$ к бесконечности так, чтобы их отношение оставалось конечным (это выполнимо, так как $\frac{dT}{dy}$ может меняться независимо от χ). После этого в правой части в (2.2) остается только $\frac{v}{\chi} \frac{dT}{dy}$; остальные члены выпадают, так как содержат множитель χ^{-1} . В силу линейности уравнения (2.2) по θ , $\frac{dT}{dy}$ определяет абсолютную величину θ , но не влияет на соотношение членов этого уравнения между собой.

Таким образом, можно надеяться, что при очень больших, но конечных значениях χ ($\chi \gg v$) температурные пульсации в тепловом подслое

можно описать в первом приближении уравнением Пуассона (аналогичный подход использован в [3] при определении спектра температурных пульсаций в случае изотропной турбулентности при $Pr \ll 1$). Решение приближенного уравнения (2.2) имеет вид

$$(2.5) \quad \theta_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\chi} \int \int \int_{y' \geq 0} d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') v(\mathbf{x}', t) \frac{dT(y')}{dy'}$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — функция Грина уравнения Пуассона для области $y \geq 0$:

$$(2.6) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2 + (z'-z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(y'+y)^2 + (x'-x)^2 + (z'-z)^2}} \right]$$

В (2.6) знак минус относится к условию (2.3), знак плюс — к условию (2.4). Умножив (2.6) на $v(\mathbf{x}, t)$ и усреднив, получаем выражение для турбулентного потока тепла

$$(2.7) \quad \langle v\theta_1 \rangle = -\frac{1}{\chi} \int \int \int_{y' \geq 0} d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \langle v(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}', t) \rangle \frac{dT}{dy}$$

Предполагается в соответствии с (1.2), что корреляционная функция быстро убывает при $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| > y$, так что область интегрирования, дающая основной вклад в интеграл (2.7), имеет размер $\sim y$. Поэтому градиент $\frac{dT}{dy}$

можно вынести за знак интеграла, так как $\frac{dT}{dy} \cong \text{const}$ при $y \ll y_2$.

Перейдем в (2.7) к новым переменным

$$(2.8) \quad \eta = \frac{y'}{y}; \quad \xi = \frac{x' - x}{y}; \quad \zeta = \frac{z' - z}{y}$$

от которых зависит момент $\langle v(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}', t) \rangle$ в соответствии с формулой (1.2). При этом из выражения $d^3 \mathbf{x}'$ выносятся y^3 , из функции Грина (2.6) y^{-1} , и она приобретает вид

$$\bar{G}(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\eta)^2 + \xi^2 + \zeta^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1+\eta)^2 + \xi^2 + \zeta^2}} \right]$$

Поделив выражение (2.7) на $\frac{dT}{dy}$ и изменив знак, получим в соответствии с определением коэффициента турбулентной теплопроводности

$$(2.9) \quad \chi_T^{(1)}(y) = \frac{v_*^2 y^2}{\chi} \int \int \int_{\eta > 0} d\eta d\xi d\zeta \bar{G}(\eta, \xi, \zeta) R(\eta, \xi, \zeta) = C \chi y_-^2$$

где $y_- = \frac{v_* y}{\chi}$; C — универсальная постоянная, обозначающая интеграл, вычислить ее невозможно, так как неизвестна функция $R(\eta, \xi, \zeta)$ из (1.2). Функция Грина и $R(\eta, \xi, \zeta)$ имеют положительные максимумы при $\eta=1$, $\xi=\zeta=0$. Так как при больших η, ξ, ζ эти функции быстро убывают, можно считать, что $\chi_T^{(1)}(y) > 0$. Формула (2.9) дает первый член разложения по малым y_- .

Учет отброшенных в первом приближении членов можно провести по теории возмущений. Подставив в них значение $\theta_1(\mathbf{x}, t)$ из (2.5), найдем

$\theta_2(\mathbf{x}, t)$ — решение во втором приближении. После умножения на $v(\mathbf{x}, t)$ и усреднения получаем

$$(2.10) \quad \langle v\theta_2 \rangle = \frac{1}{\chi^2} \frac{dT}{dy} \int_{y' > 0} \int \int d^3\mathbf{x}' \int_{y'' > 0} \int \int d^3\mathbf{x}'' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left[\left\langle v \frac{\partial v''}{\partial t} \right\rangle + \right. \\ \left. + \Delta U \langle vv'' \rangle \frac{\partial}{\partial x'} + \langle v u_j v'' \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \right] G(\mathbf{x}', \mathbf{x}''),$$

где штрихи при функциях означают зависимость от координат \mathbf{x}' или \mathbf{x}'' , по j предполагается суммирование, $u_j = (u', v', w')$, $x_j = (x', y', z')$. В (2.10) система координат \mathbf{x}' предполагается движущейся со скоростью жидкости, находящейся на расстоянии y от стенки. Согласно (1.5), $\Delta U = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{y'}{y}$ — средняя скорость потока в этой системе координат. В соответствии с принципом относительности Галилея переход в движущуюся систему отсчета не может изменить величину потоков тепла и импульса в направлении оси y .

Перейдем в (2.10) к переменным (2.8) и к аналогичной тройке переменных с \mathbf{x}'' . При этом $d^3\mathbf{x}'$ и $d^3\mathbf{x}''$ дают y^6 , две функции Грина — y^{-2} , а члены в квадратных скобках, согласно (1.2) — (1.5), дают множитель $\frac{v_*^3}{y}$. В соответствии с определением величины $\chi_T(y)$ из (2.10) получаем

поправку к (2.9): $\chi_T^{(2)}(y) = \text{const } \chi y_-^2$, что еще раз подтверждает справедливость сделанных оценок (так как $\chi_T^{(2)} \ll \chi_T^{(1)}$ при $y_- \ll 1$).

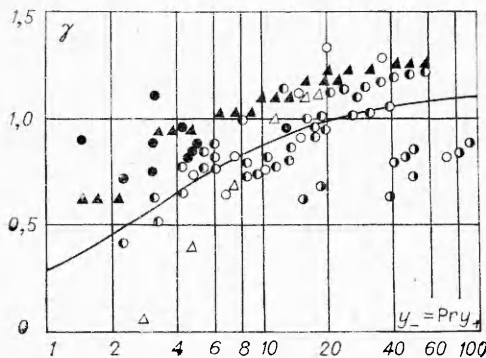
Остается установить поведение $\chi_T(y)$ в глубине вязкого подслоя при $y \ll y_1$. Здесь в соответствии с гипотезой 1 все величины в (2.7) обезразмериваются при помощи v_* и v . Вследствие уравнения неразрывности $v(\mathbf{x}, t)$ при $y_+ = \frac{v_* y}{v} \ll 1$ изменяется по закону $v \sim v_* y_+^2$ [1]. Учитывая, что $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ при $y \rightarrow 0$ ведет себя различным образом, получаем из (2.7) $\chi_T(y) \sim \sim v \text{Pr } y_+^3$ для условий (2.3), $\chi_T(y) \sim v \text{Pr } y_+^2$ для условий (2.4).

Вне вязкого подслоя для турбулентной вязкости справедлива формула $\nu_T = \chi v_* y$. Разделив значение χ_T из (2.9) на ν_T , получим соотношение $\gamma = \text{Pr}_T^{-1} = \frac{C}{\chi} y_-$ (Pr_T — турбулентное число Прандтля). Согласно имеющимся экспериментальным данным, γ убывает с приближением к стенке. На фиг. 1 точками изображены данные различных авторов, собранные в [4]. К сожалению, отсутствуют данные для области $y_- \ll 1$, где формально справедлива предлагаемая теория.

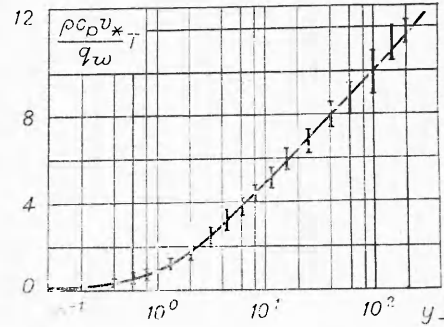
Для величины χ_T предлагается интерполяционная формула

$$(2.11) \quad \frac{\chi}{\chi_T} = \frac{A}{y_-} + \frac{B}{y_-^2} \quad (A, B - \text{const}),$$

дающая правильную зависимость при больших и малых y_- (в (2.11) пренебрегается изменением поведения χ_T в вязком подслое). Подставим χ_T из (2.11) в уравнение (2.1) и проинтегрируем его с учетом граничного условия $\chi \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = \frac{q_w}{\rho c_p}$ (q_w — плотность потока на стенке, c_p — удельная



Ф и г. 1



Ф и г. 2

теплоемкость жидкости при постоянном давлении). Положив $A=2,2$; $B=6,5$, получаем профиль средней температуры

$$(2.12) \quad \frac{\rho c_p v_*}{q_w} T = 2,54 \lg(1 + 0,338 y_- + 0,154 y_-^2) + \\ + 1,78 \operatorname{arctg}\left(\frac{y_-}{0,478 y_- + 2,83}\right),$$

хорошо согласующийся с экспериментальными данными работы [5]. На фиг. 2 вертикальные отрезки изображают разброс этих данных, кривая проведена, согласно формуле (2.12).

Используя (2.11), получаем для соотношения $\tilde{\gamma}$ выражение

$$\tilde{\gamma} = \frac{y_-}{\kappa(A y_- + B)} = \frac{y_-}{0,88 y_- + 2,6},$$

в соответствии с которым проведена кривая на фиг. 1. В [4] получено аналогичное выражение на основе осредненных уравнений и гипотез замыкания.

Таким образом, в случае $Pr \ll 1$ величина Pr_T меняется в большей части теплового подслоя обратно пропорционально расстоянию до стенки. Аналогия между турбулентным переносом тепла и импульса в этом случае отсутствует.

Автор признателен С. С. Кутателадзе и В. Е. Накорякову за обсуждение результатов работы.

Поступила 7 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. В 2-х ч. М., «Наука», 1965, 1967.
2. Гаунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., ИЛ, 1959.
3. Batchelor G. K., Howles I. D., Townsend A. A. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2.—*J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, N 1.
4. Кокорев Л. С. О соотношении коэффициентов турбулентного обмена тепла и количества движения в турбулентном потоке жидкого металла.— В кн.: Жидкие металлы. М., Госатомиздат, 1963, с. 27.
5. Кириллов П. Л. Обобщение опытных данных по переносу тепла в жидких металлах.—*Атомная энергия*, 1962, т. 13, № 5.