

**ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ
ГИДРОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
КАК ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ**

*Г. В. Аронович, Л. Н. Белюстина, Н. А. Картвелишвили,
Я. К. Любимцев*

(Горький, Москва)

Любая машина переменного тока в общем случае является системой с периодически изменяющимися параметрами [1]. Однако при симметричных режимах уравнения переходных процессов оказываются уравнениями с постоянными коэффициентами. Будем иметь в виду именно симметричные режимы или режимы, которые с достаточной точностью сводятся к симметричным. Они составляют большинство практически интересных случаев [2]. Общий случай несимметричного переходного процесса до настоящего времени исследован очень мало.

Энергетическая система, состоящая из параллельно работающих на общую сеть электростанций, каждая из которых имеет несколько агрегатов, управляемых достаточно сложными регуляторами, представляет собой существенно нелинейную колебательную систему с постоянными (при указанном ограничении) параметрами, число степеней свободы которой обычно составляет сотни и тысячи, и только в самых простейших случаях снижается до единиц или десятков. При этом нельзя указать какого-либо предельного перехода, который сводил бы эту колебательную систему к системе с распределенными параметрами, т. е. позволял бы заменить систему большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений уравнениями в частных производных. Исследование колебательных процессов в энергетических системах и, в частности, устойчивости их стационарных режимов, возможно путем расчленения исходной системы на несколько более простых колебательных систем с сосредоточенными постоянными таким образом, чтобы по их поведению можно было судить о поведении исходной системы. Математически это сводится к разбиению сложной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на более простые системы и к суждению о решениях первой по решениям последних.

Расчленение энергетической системы на несколько независимых одна от другой колебательных систем основывается на следующих физических предположениях.

1. При исследовании переходных режимов в напорных гидравлических системах гидроэлектрических станций (и переходных режимов котлов тепловых станций) предполагают, что турбинные регуляторы обладают идеальным быстродействием, т. е. всегда поддерживают точное соответствие между механическим и электрическим моментами (гипотеза идеальных регуляторов). Кроме того, пренебрегают инерцией воды в турбинных трубопроводах, т. е. гидравлическим ударом. Гипотеза идеальных регуляторов позволяет исследовать указанные процессы, которые будем называть гидравлическими, совершенно отвлекаясь от переходных режимов всех остальных элементов энергетической системы.

2. При исследовании регулирования турбин (механические процессы) предполагается, с одной стороны, что уровни воды в уравнительных резервуарах (а при их отсутствии — в напорных бассейнах или верхних бьефах) гидроэлектрических станций и давления в котлах тепловых станций остаются неизменными в течение всего исследуемого процесса, а с другой стороны, что электрические связи между всеми генераторами системы являются абсолютно жесткими (все генераторы все время имеют одинаковые электрические скорости вращения). За счет этого абстрагируются от взаимных качаний роторов машин и от переходных процессов всех устройств, предшествующих турбинным трубопроводам.

3. При исследовании взаимных качаний роторов машин, т. е. электромеханических переходных процессов в системе, механические моменты турбин считают постоянными, чем исключаются из рассмотрения процессы регулирования турбин и переходные процессы устройств, предшествующих турбинам.

Как можно показать, все эти предположения сводятся к тому, что в каждой из перечисленных задач учитывается только часть постоянных времени. Остальные же постоянные времени (различные в различных задачах) считаются либо бесконечно большими, либо бесконечно малыми, за счет чего и отбрасываются либо соответствующие члены в уравнениях неустановившихся процессов, либо часть самих уравнений.

Перечисленные предположения стихийно применяются при изучении неустановившихся режимов энергетических систем, но только в последние годы появились работы, в которых рассматривается вопрос о границах допустимости подобного подхода к делу. До указанных работ, о которых речь будет ниже, гидравлические, механические и электромеханические процессы резко разграничивались и каждая из этих трех категорий рассматривалась и изучалась независимо от двух других.

Упрощения, достигаемые в результате указанных ограничений, практически, однако, оказываются недостаточными, и в задаче об электромеханических процессах идут еще дальше, пренебрегая взаимными качаниями генераторов в пределах одной станции, или даже группы близко расположенных станций, т. е. заменяя каждую такую группу одним «эквивалентным» агрегатом при помощи недостаточно обоснованных предположений. Сравнительно простой анализ показывает, что эта операция также фактически сводится к отбрасыванию некоторых постоянных времени в уравнениях задачи.

Пренебрежение малыми постоянными времени сплошь и рядом не приводит к ошибкам. Но наряду с этим известны многие случаи, когда пренебрежение ими совершенно искажает результат исследования, а также, когда пренебрежение одним каким-либо фактором влечет за собой необходимость обязательно пренебречь и другим, ибо только при этом условии обеспечивается получение правильного результата. Так, например, гипотеза идеальных регуляторов оказывается правильной при исследовании устойчивости стационарных режимов напорных гидравлических систем, если либо пренебречь постоянной времени турбинных трубопроводов, т. е. гидравлическим ударом [3], либо учесть как гидравлический удар, так и инерцию массы воды, заключенной в уравнительном резервуаре [4]. Иначе получается совершенно ошибочный вывод, что система принципиально неустойчива.

Наконец, следует иметь в виду, что увеличение числа степеней свободы по мере развития и объединения энергетических систем на больших территориях может привести и к качественным изменениям переходных процессов; здесь можно ожидать некоторого подобия волновых явлений при распространении возмущения от одного конца объединенной системы к другому. Стремление же во чтобы то ни стало свести сложную систему к системе с небольшим числом станций заведомо исключает возможность анализа такого рода явлений.

Предпосылки для расчленения сложных нелинейных динамических систем на более простые были заложены в работах [5, 6] в виде идеи разделения движений системы на «быстрые» и «медленные» и основанного на ней анализа релаксационных колебаний. К этому вопросу имеют непосредственное отношение чисто математические работы [7-10].

1. Постановка задачи. Уравнения переходных процессов в энергетической системе могут быть записаны в виде

$$T_i \frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, \dots, x_n, m) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

где x_i — безразмерные обобщенные координаты, m — малый параметр. Обычно при $m = 0$ некоторые Φ_i имеют особенность и система (1.1) приводится к виду

$$T_i \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_\mu, z_1, \dots, z_\nu) \quad (i = 1, \dots, \lambda) \quad (1.2)$$

$$m T_j' \frac{dy_j}{dt} = h_j(x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_\mu, z_1, \dots, z_\nu) \quad (j = 1, \dots, \mu) \quad (1.3)$$

$$m^{1+\alpha_k} T_k'' \frac{dz_k}{dt} = g_k(x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_\mu, z_1, \dots, z_\nu) \quad (k = 1, \dots, \nu) \quad (1.4)$$

$$\lambda + \mu + \nu = n$$

причем $\alpha_k > 0$ и может быть разным при разных k . Обобщенные координаты y_i и z_k претерпевают в переходном процессе быстрые изменения (dy_j/dt , а тем более, dz_k/dt — велики), а x_i изменяются медленно. Пренебрегая малыми постоянными времени, т. е. полагая $m = 0$, приходим к вырожденной системе

$$T_i \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_\mu, z_1, \dots, z_\nu) \quad (1.5)$$

$$0 = h_j(x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_\mu, z_1, \dots, z_\nu) \quad (1.6)$$

$$0 = g_k(x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_\mu, z_1, \dots, z_\nu) \quad (1.7)$$

Физически это равносильно предположению, что «быстрые» движения мгновенно затухают на гиперповерхностях (1.6) и (1.7), которые являются устойчивыми положениями равновесия быстрых движений, если [8] все корни p уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & T_1' p & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_\mu} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial z_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_\mu}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial h_\mu}{\partial y_\mu} - T_\mu' p & \dots & \frac{\partial h_\mu}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_\mu}{\partial z_\nu} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_\mu} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_\nu}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_\nu}{\partial y_\mu} & \dots & \frac{\partial g_\nu}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_\nu}{\partial z_\nu} \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть при любых y_i и z_k , удовлетворяющих уравнениям (1.6) и (1.7). Если это условие выполняется, то в процессах, начинающихся из состояний, совместных с приближенными уравнениями «медленных» движений (1.5) — (1.7), «быстрые» движения несущественны. Но вопрос о процессах, начинающихся из других состояний, т. е. вопрос об устойчивости в большом «быстрых» движений, остается при этом открытым и требует дополнительного исследования.

Изложенное положение и некоторые другие результаты работ [7-10] при их надлежащем развитии достаточны, по-видимому, для упрощения сложных систем уравнений в рассматриваемой задаче, если только пренебрегать степенями свободы моторов нагрузки, т. е. заменять нагрузку так называемым эквивалентным шунтом или пользоваться ее статическими характеристиками. Задача о построении обобщенных динамических характеристик нагрузки подстанций принципиально разрешима, конечно, на этой же основе. Однако практически она требует для своего решения экспериментальных методов. Это связано не только с тем, что число моторов и приводимых ими машин - орудий обычно столь огромно, что практически может считаться бесконечным, но и с тем, что состав моторов (и других токоприемников), хотя бы лишь в смысле их распределения по номинальным мощностям, никогда не бывает известен с достаточной определенностью, не говоря уже о характеристиках моторов.

2. Разбиение характеристического уравнения малых колебаний на уравнения низших степеней. Характеристическое уравнение системы, получаемой линеаризацией (1.1), имеет вид [11]

$$\{ m^{M_0} F_{N_0}(p) + m^{M_1} F_{N_1}(p) + \dots + m^{M_{n-1}} F_{N_{n-1}}(p) + F_{N_n}(p) = 0 \quad (2.1)$$

где $M_0 > M_1 > \dots > M_{n-1} > 0$ — несократимые рациональные числа, $F_{N_k}(p)$ — полином p степени N_k ($N_k > N_{k+1}$), некоторые коэффициенты которого, исключая коэффициент при p^{N_k} , могут быть нулями. «Медленным» движениям соответствуют те корни уравнения (2.1), приближенные значения которых определяются как корни уравнения $F_{N_n}(p) = 0$. Приближенные значения корней, соответствующих быстрым движениям, находятся как корни уравнений, получающихся из (2.1), если положить $p = q / m^\sigma$, освободиться от отрицательных степеней m и положить затем $m = 0$. Здесь σ — рациональные числа, зависящие от чисел M_i и N_k и определяемые по правилам, излагаемым в [11]. Таким образом, характеристическое уравнение расчленяется на несколько независимых уравнений низших степеней, причем операция расчленения может быть выполнена без развертывания характеристического определителя в строку. Расчленение характеристического определителя возможно и в том случае, когда система (1.1) содержит не только дифференциальные, но и конечно-разностные уравнения (например, при учете упругого гидравлического удара).

Описанный метод позволил выяснить область применимости гипотезы идеальных регуляторов и гипотезы постоянства механических моментов турбины при исследовании малых колебаний. Первая справедлива при достаточно большой (порядка десятков секунд) постоянной времени напорных деривационных сооружений гидравлической системы в случае, когда турбины имеют регуляторы с жесткой обратной связью [12, 13] и достаточно быстрое так называемое вторичное регулирование. При медленном вторичном регулировании [13] или упругой обратной связи [14, 15] гипотеза идеальных регуляторов дает более сильные условия устойчивости в малом для стационарных режимов напорных гидравлических систем, чем они являются в действительности. Предположение о постоянстве механических моментов турбин справедливо в том случае, если энергетическая система не находится вблизи так называемого статического предела мощности передачи. В противном случае при исследовании электромеханических процессов необходимо учитывать регулирование турбин, а если постоянные времени напорных деривационных сооружений малы (имеют порядок секунд), то нужно принимать во внимание и колебания жидких масс в этих сооружениях и уравнительных резервуарах. (Это может иметь место, например, в русловых установках, когда роль напорной деривации играет сравнительно короткий напорный трубопровод в теле плотины, заканчивающийся уравнительным резервуаром перед зданием ГЭС.) Уравнения электромеханических, механических и гидравлических процессов в данном случае не расчленяются на независимые системы.

Выше не рассматривалась возможность расчленения самих уравнений электромеханических процессов на простейшие системы. Исследование этого вопроса имеется в [16, 17]. В сложных случаях процесс расчленения существенно упрощается, если комбинировать изложенный способ с матричными преобразованиями исходных линейных уравнений [17].

Частной стороне задачи упрощения линейных систем — приведению однотипных генераторов к одному «эквиваленту» — посвящено несколько работ [18–22], суть которых, в конечном счете, так же сводится к расчленению движений системы: «быстрыми» являются взаимные качания машин в пределах станции или группы станций, «медленными» — качания машин одной группы по отношению к машинам другой группы. Но применяемые в этих работах весьма остроумные приемы не обобщаются до степени, позволяющей применять их к решению всей задачи в целом.

3. Разделение системы нелинейных уравнений на простейшие системы. Нарушения устойчивости в большом, т. е. динамической устойчивости энергетических систем, связаны с короткими замыканиями, приводящими к мгновенному изменению схемы и параметров системы. По истечении некоторого времени поврежденная линия отключается, что влечет за собой новое изменение схемы и параметров. Для возможности нормальной эксплуатации система должна прийти к установившемуся режиму при этой новой схеме. При этом возмущенными значениями обобщенных координат являются те значения, которые принимают координаты в момент отключения короткого.

Таким образом, задача о динамической устойчивости распадается на следующие четыре этапа.

1°. Упрощение или расчленение системы уравнений переходного процесса для режима короткого замыкания.

2°. То же для переходного процесса после отключения короткого.

3°. Построение областей устойчивости в большом для стационарного режима после отключения короткого.

4°. Сопоставление возмущенных значений обобщенных координат в момент отключения короткого с областью устойчивости в большом стационарного режима после отключения короткого.

Расчленению систем уравнений электромеханических и механических процессов посвящены работы [23, 24, 25].

Здесь для иллюстрации рассматривается простейший случай параллельной работы двух генераторов, причем принятая идеализация не преследует цели отразить все влияющие на процесс факторы, а направлена на то, чтобы показать в наиболее выпуклой форме существенные особенности рассматриваемого метода решения.

Будем предполагать, что э. д. с. генераторов остаются постоянными в переходном процессе, но будем учитывать изменения механических моментов генераторов, считая, что турбины снабжены регуляторами скорости с жесткой обратной связью.

Дифференциальные уравнения задачи имеют следующий вид (в возмущениях):

$$\begin{aligned} T_1 \frac{ds_1}{dt} &= -a_1(b_1 s_1 + s_1^2)(c_1 - \mu_1) - h_1 \mu_1 - B_1 [\sin(\varepsilon_1 + \delta) - \sin \varepsilon_1] \\ T_2 \frac{ds_2}{dt} &= -a_2(b_2 s_2 + s_2^2)(c_2 - \mu_2) - h_2 \mu_2 + B_2 [\sin(\varepsilon_2 + \delta) - \sin \varepsilon_2] \quad (3.1) \\ T_3 \frac{d\delta}{dt} &= s_1 - s_2, \quad T_4 \frac{d\mu_1}{dt} = f_1(s_1 - \rho_1 \mu_1), \quad T_5 \frac{d\mu_2}{dt} = f_2(s_2 - \rho_2 \mu_2) \end{aligned}$$

Обычно постоянные времени T_i удовлетворяют неравенству

$$T_3 \ll T_4, T_5 \ll T_1, T_2 \quad (3.2)$$

(в реальных условиях $T_3 = 0.00318$ сек, T_4, T_5 — порядка десятых долей секунды или секунд; T_1, T_2 — порядка десятка секунд). В силу неравенства (3.2) часть дифференциальных уравнений задачи можно рассматривать как уравнения, содержащие малый параметр при производных и разбить полное фазовое пространство системы на области более быстрых и менее быстрых движений. Если пока не обращать внимания на порядок правой части уравнений, то наиболее быстрой переменной будет δ , следующими по скорости изменения будут переменные μ_1 и μ_2 и, наконец, медленнее всего будут меняться переменные s_1 и s_2 . Это подсказывает возможность применения для приближенного анализа рассматриваемой динамической системы методов теории разрывных колебаний [5, 6]. Приближенное уравнение для «быстрых» движений δ имеет вид

$$T_3 \frac{d\delta}{dt} = s_1 - s_2, \quad s_1 = \text{const}, \quad s_2 = \text{const}$$

Отсюда

$$\delta = (s_1 - s_2)t / T_3 + \text{const}$$

Подставив этот результат в первые два уравнения (3.1), получим уравнения, характерные для динамической системы с быстро вращающейся фазой [26], если только разность $s_1 - s_2$ не очень мала. Своеобразие данного случая заключается, однако, в том, что «быстрое» движение может затухнуть лишь в результате медленного уменьшения разности самых медленных переменных $s_1 - s_2$, причем эта разность в процессе движения может не только стремиться к нулю, но и менять знак. Это обстоятельство приводит к необходимости начать анализ не с изучения проведения δ , а с рассмотрения μ_1 и μ_2 , движение которых затухает значительно быстрее δ и независимо от последней.

Пусть функции f_1 и f_2 , задаваемые характеристиками сервомоторов, удовлетворяют условиям

$$\sigma_i f_i(\sigma_i) > 0, \quad f_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

и являются линеаризуемыми. В области быстрого изменения μ_1 и μ_2 дифференциальные уравнения для μ_i приближенно можно записать в виде

$$T_4 \frac{d\mu_1}{dt} = f_1(s_1 - \rho_1 \mu_1), \quad T_5 \frac{d\mu_2}{dt} = f_2(s_2 - \rho_2 \mu_2) \quad (s_1, s_2 = \text{const})$$

Точки фазовых подпространств $f_i = 0$ являются состояниями равновесия для приближенных уравнений быстрых движений (1.5). Эти состояния равновесия устойчивы, так как во всех точках подпространств $f_i = 0$, $\partial f_i / \partial \mu_i < 0$ (при $\rho_i > 0$, как всегда бывает на практике). Поэтому, если в начальный момент времени изображающая точка не находилась вблизи подпространств $f_i = 0$, то, двигаясь по траекториям «быстрых» движений,

она обязательно придет к этим подпространствам и в дальнейшем будет «медленно» двигаться внутри них.

В силу ограничений, наложенных на функции f_i , движение в подпространствах $f_i = 0$ будет описываться первыми тремя уравнениями (3.1), в которых $\mu_i = s_i / \rho_i$.

В результате, если исходная система дифференциальных уравнений была пятого порядка, то после исключения «быстрых» движений по μ_1 и μ_2 она сведется к системе уравнений третьего порядка.

Положение равновесия $s_1 = s_2 = \delta = 0$ устойчиво в малом, если будут удовлетворены соответствующие условия Гурвица. Достаточные условия устойчивости в большом можно определить одним из вариантов прямого метода Ляпунова.

Если начальные отклонения s_1, s_2 и δ лежат в области, определяемой таким путем, то с течением времени они будут затухать. Следовательно, затухнут и возмущения μ_1 и μ_2 .

В работе [25] дополнительно предполагалось, что на одном из эквивалентных генераторов установлен регулятор напряжения. Исходная система дифференциальных уравнений имеет в этом случае восьмой порядок, а упрощенная — четвертый.

Этот подход может дать эффективные результаты и в более сложных случаях, когда постоянные времени можно разбить по порядку величины на большее число групп. Необходимо только, чтобы соответствующие состояния равновесия быстрых движений удовлетворяли условиям устойчивости.

Вопрос о том, выйдут или нет возмущенные значения обобщенных координат, приобретаемые ими в момент отключения короткого замыкания, за пределы построенной описанным путем области, может быть выяснен численным интегрированием уравнений переходного режима за время короткого, что предлагается, например, в [27]. Однако, более совершенно он может быть решен, по-видимому, на основе теории устойчивости за конечный промежуток времени.

Метод разделения движений на быстрые и медленные позволяет также дать обоснование гипотезе идеального регулятора при расчетах устойчивости в большом напорных систем с уравнительными резервуарами.

В связи с этим, в [28] рассмотрена работа изолированной гидроэлектрической установки с напорной деривацией и простым цилиндрическим уравнительным резервуаром, имеющей один гидрогенераторный агрегат при постоянном электрическом моменте сопротивления.

Установлено, что гипотеза идеального регулятора будет практически оправдана лишь в том случае, если система регулирования (сама по себе устойчивая) обладает малой (теоретически бесконечно малой) степенью остаточной неравномерности (астатическое регулирование).

Сказанное в пп. 2, 3 выясняет условия, когда исходная система дифференциальных уравнений может быть разделена на более простые системы. Этому разделению уравнений соответствует расчленение совокупного переходного процесса в энергосистеме на составляющие различной физической природы. Тем самым выявляются и обосновываются условия независимого одно от другого рассмотрения устойчивости гидравлических процессов в напорной части ГЭС, устойчивости электромеханических качаний роторов агрегатов и устойчивости регулирования турбин. Ниже приводятся результаты глобального рассмотрения электромеханических и гидравлических процессов в некоторых простейших динамических системах, которые являются звеньями расчлененной энергосистемы. Изучение этих динамических систем с помощью исследования их фазового пространства было предпринято по инициативе А. А. Андропова.

Если устойчивость стационарных режимов напорных гидравлических систем и устойчивость регулирования турбин сразу стали исследоваться методами теории устойчивости в малом, то в электромеханических процессах долгое время господствовали критерии, основанные на оценке знака одного лишь последнего члена характеристического уравнения малых колебаний системы. Такие критерии на первых порах устраивали инженерную практику, так как при тогдашних параметрах энергетических систем нарушения статической устойчивости носили обычно апериодический характер. Полный анализ устойчивости в малом и широкое использование линейных методов теории колебаний для анализа электромеханических процессов начались лишь после работы Жданова [29].

Задачи устойчивости в большом практика решала и решает численным интегрированием уравнений переходных режимов. Первым аналитическим исследованием в этой области была книга Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [30], в которой даются критерии устойчивости в большом по отношению к ступенчатому приращению нагрузки и возмущению в виде дельта-функции.

4. Электромеханические процессы. Первое применение качественных методов к исследованию нелинейных электромеханических процессов было осуществлено Н. П. Власовым и Л. Н. Белюстиной при изучении режимов работы синхронных машин в системе бесконечной мощности. В этих условиях дифференциальные уравнения движения ротора синхронной машины имеют вид

$$\frac{ds}{dt} = D - \sin \delta - f(\delta)s, \quad \frac{d\delta}{dt} = s \quad (4.1)$$

Здесь δ — угол между ротором машины и синхронным вектором, s — скольжение ротора по отношению к синхронному вектору, D — постоянный момент нагрузки в относительных единицах, $f(\delta)$ — коэффициент, характеризующий асинхронный момент.

Фазовым пространством системы (4.1) будет поверхность кругового цилиндра с осью, параллельной оси s .

Качественную структуру разбиения фазового цилиндра на траектории определяют особые траектории: состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы.

Вообще говоря, для системы (4.1) устойчивому состоянию равновесия соответствует синхронное движение ротора, устойчивому предельному циклу I рода (охватывающему состояние равновесия) — автоколебания около синхронного режима, а устойчивому циклу II рода (охватывающему цилиндр) — асинхронный ход; сепаратрисы седел разделяют траектории различного предельного поведения, соответствующие переходу к синхронному, асинхронному ходу или автоколебаниям.

Н. П. Власов [31] исходит из следующего уравнения интегральных кривых задачи:

$$\frac{ds}{d\delta} = \frac{D - \sin \delta}{s} + \mu j(\delta)$$

где $f(\delta)$ — функция вида

$$f(\delta) = a + b \sin \delta + c \sin^2 \delta$$

При этом он ограничивается случаем неконсервативным ($\mu = 0$) и близким к консервативному (μ мало), тем не менее, рассмотрение случая, близкого к консервативному, позволяет выяснить возможные режимы работы машины.

Решение задачи о синхронном моторе в неконсервативном и не близком к консервативному случае дано одним из авторов [32, 33]. Это решение так же, как и работа [31], охватывает и задачу о синхронном генераторе, подключенном к системе бесконечной мощности через импеданс, без регулятора возбуждения, без учета постоянной времени цепи возбуждения и при постоянном вращающем моменте турбины. В работах [31, 32, 33] объяснена причина и указана связь с демпферными моментами двух весьма важных для практики явлений: устойчивого асинхронного хода синхронной машины (устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр) и так называемого восстановления синхронизма после асинхронного хода (изображающая точка приходит к состоянию равновесия после нескольких оборотов вокруг фазового цилиндра).

Если учесть вторую гармонику вращающего момента и изменение затухания в зависимости от угла, то задача о движении ротора явнополусной синхронной машины приводит к исследованию системы уравнений [34]

$$\frac{ds}{dt} = D - \sin \delta - r \sin 2\delta - k(1 - b \cos 2\delta)s, \quad \frac{d\delta}{dt} = s \quad (4.2)$$

квивалентной уравнению

$$\frac{ds}{d\delta} = \frac{D - \sin \delta - r \sin 2\delta}{s} - k(1 - b \cos 2\delta) \quad (4.3)$$

Эти уравнения исследованы в [32, 33].

Параметр b для явнополюсной синхронной машины не превосходит единицы. В более общем случае, когда $f(\delta)$ может изменять знак ($b > 1$), могут быть применены результаты работы [35]. Возможность смены знака у функции $f(\delta)$ приводит к появлению автоколебаний I рода и других качественных особенностей системы.

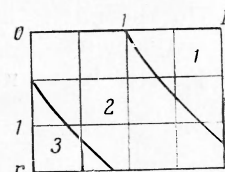
При $k = 0$ имеет место консервативный случай системы (4.2) и уравнение (4.3) имеет общий интеграл

$$s^2 = 2D\delta + 2 \cos \delta + r \cos 2\delta + c$$

Состояния равновесия суть либо центры, либо седла.

При $k \neq 0$ координаты состояний равновесия системы (4.2) не зависят от k : они определяются, как и в случае $k = 0$, равенствами

$$D - \sin \delta - r \sin 2\delta - k(1 - b \cos 2\delta)s = 0, \quad s = 0$$



Фиг. 1

Пространство параметров k, r, D, b разбивается на области 1, 2, 3 (фиг. 1), для точек которых система (4.2) имеет соответственно 0, 2, 4 состояний равновесия $\delta = \delta_i, s = 0$. Эти области определяются неравенствами

$$(1) \quad D > D_1(r) = \frac{\sqrt{32r^2 - 2 + 2\sqrt{1 + 32r^2}} [3 + \sqrt{1 + 32r^2}]}{32r}$$

$$(2) \quad D_1 \geq D > D_2(r) = \frac{\sqrt{32r^2 - 2 - 2\sqrt{1 + 32r^2}} [-3 + \sqrt{1 + 32r^2}]}{32r}$$

$$(3) \quad D \leq D_2(r)$$

Характер состояний равновесия определяется корнями соответствующих характеристических уравнений

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2}(1 - b \cos 2\delta_i) \pm \sqrt{\frac{k^2}{4}(1 - b \cos 2\delta_i)^2 - \cos \delta_i - 2r \cos 2\delta_i} \quad (4.5)$$

Состояния равновесия $(\delta_1, 0)$ и $(\delta_3, 0)$, для которых $\alpha = -(\cos \delta_i + 2r \cos 2\delta_i) > 0$ — седла, состояния равновесия $(\delta_2, 0)$ и $(\delta_4, 0)$, для которых $\alpha < 0$ при $k = 0$ — центры, при $k > 0$ — узлы или фокусы.

При $D < D_2(r)$ существуют два устойчивых состояния равновесия: $(\delta_2, 0)$ и $(\delta_4, 0)$.

Возможные бифуркации состояний равновесия. Фокусы $(\delta_2, 0)$ и $(\delta_4, 0)$ не могут быть сложными, так как в силу неравенства

$$R = -\frac{k}{2}(1 - b \cos 2\delta_i) \neq 0 \quad \text{при } k > 0, \quad 0 < b < 1$$

они не меняют устойчивости. Бифуркации состояний равновесия могут быть только от слияния двух состояний равновесия: седла $(\delta_1, 0)$ и узла $(\delta_2, 0)$ при $D = D_1(r)$ и седла $(\delta_3, 0)$ и узла $(\delta_4, 0)$ при $D = D_2(r)$. При $D > D_1(r)$ и при $D > D_2(r)$ сложные состояния равновесия $(\delta_{12}, 0)$ и $(\delta_{34}, 0)$ исчезают.

Сепаратрисы седел. Направления κ касательных к сепаратрисам в седле определяются равенствами, совпадающими с (4.5) при $i = 1, 3$.

При возрастании параметра k касательные к сепаратрисам в седле поворачиваются по часовой стрелке, так как

$$\partial \kappa_{12} / \partial k < 0 \quad (4.6)$$

Разность направлений векторных полей уравнения (4.3) при $k = k_2$ и $k = k_1$ ($k_2 > k_1$) отрицательна

$$R = \left(\frac{ds}{d\delta}\right)_{k=k_2} - \left(\frac{ds}{d\delta}\right)_{k=k_1} = -(k_2 - k_1)(1 - b \cos 2\delta) < 0 \quad (4.7)$$

Из сравнения векторных полей уравнения (4.3) при $k \neq 0$ и $k = 0$ и неравенства (4.6) следует расположение сепаратрис седел для $k \neq 0$, но достаточно малого. На фиг. 2 для точек области $3 (D < D_2(r))$, фиг. 1) пунктирными линиями представлены сепаратрисы консервативного случая, сплошными — случая $k \neq 0$, но достаточно малого. Для $k \neq 0$ и (немалого) расположение сепаратрис седел может быть установлено при помощи оценок для частей сепаратрис.

Построение кривых без контакта для частей сепаратрис приводит к следующему.

1°. При условиях

$$D_2(r) < D \leq D_1(r)$$

$$k \leq \frac{1}{2\pi(1+b)} [V\sqrt{4\pi D + \rho(\delta_2) - \rho(\delta_1)} - V\sqrt{\rho(\delta_2) - \rho(\delta_1)}] \quad (4.8)$$

или

$$0 < D < D_2(r), \quad k \leq \min(m_1, m_2)$$

$$\rho(\delta) = 2\delta D + 2 \cos \delta + r \cos 2\delta$$

$$m_1 = \frac{V\sqrt{\rho(\delta_2) - \rho(\delta_3)} - V\sqrt{\rho(\delta_2) - \rho(\delta_1)}}{(1+b)(\delta_1 - \delta_3)}$$

$$m_2 = \frac{V\sqrt{\rho(\delta_4) - \rho(\delta_1 - 2\pi)} - V\sqrt{\rho(\delta_4) - \rho(\delta_3)}}{(1+b)(\delta_3 - \delta_1 + 2\pi)}$$

сепаратрисы седел расположены так же, как и при малых k .

При условиях (4.8) сепаратрисы седел, имеющие положительный наклон в полуплоскости $s > 0$, удовлетворяют неравенству

$$s(\delta + 2\pi) > s(\delta) \quad (4.9)$$

2°. При условиях же

$$0 \leq D \leq D_1(r), \quad k \geq \frac{2\sqrt{\pi D}}{(1-b)(\delta_1 - \delta_2)} \quad (4.10)$$

ни для одной из сепаратрис седел не выполняется неравенство (4.9).

Согласно (4.6) и (4.7) для $0 \leq D \leq D_1(r)$ при переходе от значений k , удовлетворяющих условиям (4.8), к значениям k , удовлетворяющим условиям (4.10), система (4.2) обязательно и притом единственный раз при $k = k_0(D, b, r)$ проходит через бифуркационное состояние, при котором сепаратрисы совпадают, образуя замкнутый контур II рода (охватывающий цилиндр). †

На фиг. 3 представлено изменение расположения сепаратрис седел с ростом параметра k при условиях $D_2 \leq D \leq D_1$.

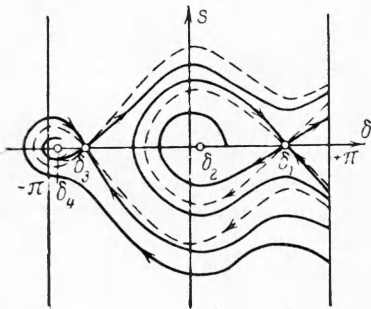
«Седловые величины» [5] σ_i для седел δ_1 и δ_3 отрицательны

$$\sigma_i = P_s'(\delta_i, 0) + Q_s'(\delta_i, 0) = -k(1 - b \cos 2\delta_i) < 0$$

Следовательно, замкнутый контур II рода, составленный из сепаратрис седел, устойчив и из него может появиться лишь единственный устойчивый предельный цикл II рода.

Предельные циклы. Для решения вопроса о существовании предельных циклов применяется критерий Бендиксона — Дюляка на цилиндре [5].

Так как функция Бендиксона для системы (4.2) $B = -k(1 - b \cos 2\delta)$ при $k > 0$ и $b \leq 1$ не меняет знака на всей фазовой плоскости, то система



Фиг. 2

(4.2) при $k > 0$ не имеет предельных циклов I рода, не может иметь более одного цикла II рода, не может иметь полуустойчивого предельного цикла II рода, не имеет цикла II рода в полуплоскости $s < 0$, имеет или не имеет цикл II рода в полуплоскости $s > 0$, в зависимости от расположения сепаратрис седла.

При $k > 0$ и $D > D_1$ для траектории, проходящей через точку $s = 0$ и $\delta = \pi/2$, выполняется неравенство (4.9), а для траекторий, проходящих в части $s > M$, где M — максимальная ордината изоклины (4.4), выполняется неравенство $s(\delta + 2\pi) < s(\delta)$. Следовательно, при $k > 0$ и $D > D_1$ система (4.2) имеет цикл II рода.

Итак, система уравнений (4.2) имеет единственный устойчивый предельный цикл II рода при $D > D_1(r)$ и при $k \leq k_0$, $0 \leq D \leq D_1$, и не имеет циклов при $k > k_0$, $0 \leq D \leq D_1$. Оценки для величины k_0 могут быть уточнены при помощи численных методов [36].

Разбиение пространства параметров. Пространство параметров k, r, D, b разбивается на следующие пять областей, соответствующих различным грубым качественным структурам.

(1) При $D > D_1(r)$ — состояний равновесия нет, существует устойчивый предельный цикл II рода.

(2) При $k \leq k_0, D_2 \leq D \leq D_1$ — одно устойчивое состояние равновесия, одно седло, один цикл II рода.

(3) При $k \leq k_0, 0 \leq D \leq D_2$ — два устойчивых состояния равновесия, два седла, один цикл II рода.

(4) При $k > k_0, D_2 \leq D \leq D_1$ — одно устойчивое состояние равновесия, одно седло, циклов нет.

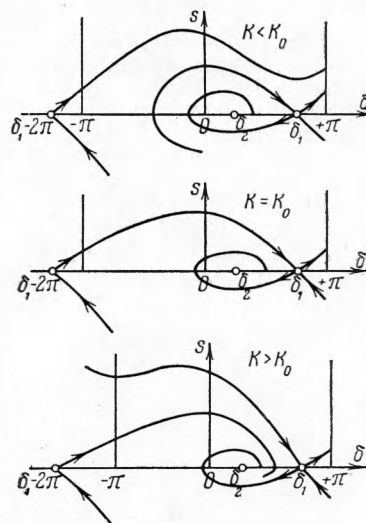
(5) При $k > k_0, 0 \leq D \leq D_2$ — два устойчивых состояния равновесия, два седла, циклов нет.

Заметим, что в рассмотренных работах зависимость демпферного момента от скольжения принимается линейной. Вопрос о зависимостях, определяющих синхронные моменты, был изучен позже Л. Г. Мамиконяцем [37, 38] и И. А. Сыромятниковым [39]. При этом оказалось, что зависимость демпферного момента от скольжения существенно нелинейна и из-за магнитной инерции контуров машины асинхронный момент при изменяющемся скольжении может в определенных случаях ощутимо отличаться от того значения, которое он имел бы при том же скольжении, если бы оно оставалось постоянным. В этих случаях момент зависит еще и от производных скольжения, т. е. система будет иметь больше двух обобщенных координат и возникает необходимость переходить к фазовому пространству трех и более измерений.

Прямой метод Ляпунова использовали в исследовании электромеханических процессов синхронных машин в 1957—58 годах А. А. Янко — Триницкий [27] и В. А. Андреюк [40, 41] в очень схожих работах, но, по-видимому, независимо один от другого. За функцию Ляпунова берется первый интеграл уравнений переходного процесса в консервативном случае, имеющий (для двух параллельно работающих машин) вид

$$V = A_1 s_1^2 + A_2 s_2^2 + f(\delta_1, \delta_2)$$

к которому в неконсервативных случаях добавляются знакоопределенные квадратичные формы от тех или иных переменных (изменений э. д. с., токов и т. п.). Хотя область, ограниченная замкнутой поверхностью $V = \text{const}$, внутри которой $V \geq 0$ и $dV/dt \leq 0$ (условно назовем ее областью



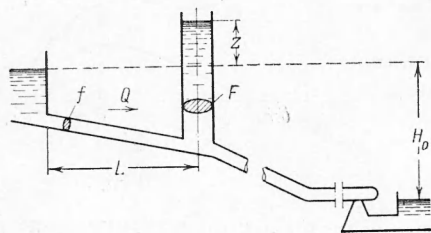
Фиг. 3

устойчивости) при таком построении функции Ляпунова и получается достаточно широкой, но она все же не настолько широка, чтобы по ее построению можно было судить о возможности восстановления синхронизма после асинхронного хода.

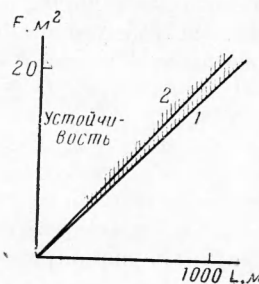
К сожалению, этим же недостатком страдают и другие приемы построения функций Ляпунова: способ Айзермана, использованный в [24], и способ, предложенный одним из авторов [42]. Поэтому отыскание способа построения функций Ляпунова, дающих менее вырожденные условия устойчивости в большом, является весьма важной для практики задачей.

Все сказанное еще раз указывает на необходимость развития методов для полного качественного исследования систем с различным числом степеней свободы, подобно тому, как это может быть сделано теперь для систем с фазовой поверхностью.

5. Гидравлические процессы. а) *Гидроэлектростанция с цилиндрическим уравнивающим резервуаром* (фиг. 4). Здесь и во всех последующих



Фиг. 4



Фиг. 5

случаях предполагается, что турбины снабжены идеальными регуляторами, и не учитывается инерция масс воды в уравнительном резервуаре и в турбинном трубопроводе.

Обоснование дискретной идеализации гидравлических процессов дано в работе [43], где рассматривается устойчивость гидравлической системы в малом при учете волновых явлений в напорной деривации в случае, когда к. п. д. турбины η зависит от напора H и когда он постоянен. [Характеристическое] уравнение задачи имеет вид

$$-\alpha p + \beta + (\varepsilon p - \delta)e^{-\tau p} = 0$$

($\alpha, \beta, \varepsilon, \delta, \tau$ — параметры гидравлической системы).

При помощи метода D -разбиения получается обобщение известного критерия устойчивости Тома, относящегося к случаю дискретной идеализации. На фиг. 5 приведена диаграмма области устойчивости системы по параметрам F и L , построенная для случая $\eta = \text{const}$, при фиксированных значениях других параметров (граница 1 — по критерию Тома, граница 2 — согласно обобщенному критерию). Из диаграммы видна возможность пренебрегать волновыми процессами в деривации, что и делается всюду ниже.

Задача об устойчивости в большом решена для случая, когда η есть линейная функция H и для случая $\eta = \text{const}$. В последнем случае уравнения задачи в безразмерных переменных суть [43]

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon(x + y|y|), \quad \frac{dx}{dt} = y - \frac{1-\beta}{1+\beta x} \quad (5.1)$$

Здесь, кроме обозначений на фиг. 4

$$x = \frac{z}{h_0}, \quad y = \frac{Q}{Q_0}, \quad t = \frac{Q_0 \tau}{F h_0}, \quad \beta = \frac{h_0}{H_0}, \quad \varepsilon = \frac{g f F h_0^2}{L Q_0^2}$$

При этом Q_0 — расход ГЭС при установившемся режиме, h_0 — потеря напора в деривации при расходе Q_0 , τ — время.

Условия устойчивости Тома, получаемые из уравнений линейного приближения, суть

$$\beta < \frac{1}{3}, \quad \varepsilon > \frac{\beta}{2(1-\beta)} \quad (5.2)$$

В [43], а также в работах, упоминаемых ниже, исследование устойчивых режимов и переходных гидравлических процессов проводится при помощи изучения фазового пространства динамической системы.

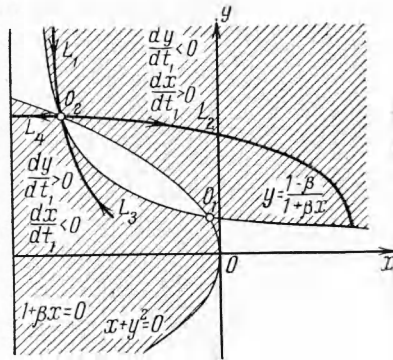
Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(x+y|y|)}{(1-\beta)/(1+\beta x) - y} \quad (5.3)$$

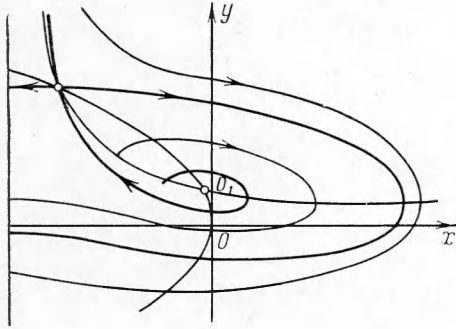
эквивалентное системе (5.1), исследуется методами качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости.

Система (5.1) при $y > 0$, $0 < \beta < 1/3$, $\varepsilon > 0$, $1 + \beta x > 0$ имеет два состояния равновесия O_1 (фокус или узел, устойчивый или неустойчивый) и O_2 (седло). Поведение сепаратрис седла при $y > 0$ указано на фиг. 6.

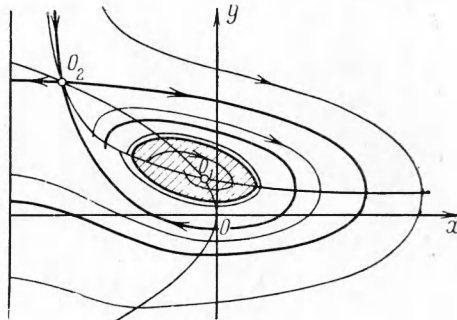
Граница области устойчивости опасная. На границе этой области из фокуса, меняющего устойчивость с ростом ε , появляется единственный неустойчивый предельный цикл, внутренность которого будет областью устойчивости в большом для рассматриваемого состояния равновесия



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

При некотором ε этот неустойчивый предельный цикл влипает в петлю сепаратрисы, идущей из седла в седло. На фиг. 7—11 приведены разбиение фазовой плоскости на траектории и разбиение пространства параметров. На фиг. 11 кривая $R = \beta / 2(1 - \beta) - \varepsilon = 0$ соответствует границе устойчивости в малом, пунктирная кривая $R_1 = 0$ (полученная графическим интегрированием) соответствует случаю сепаратрисы, идущей из седла в седло.

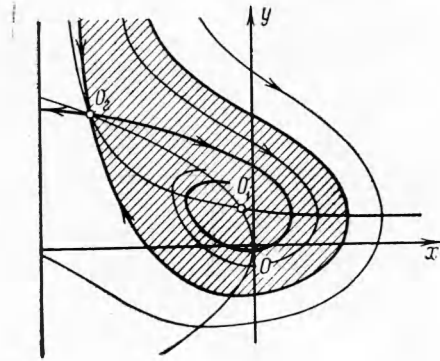
Замечание. При помощи критерия Дюляка и кривых без контакта доказываются две леммы, определяющие значения параметров, при которых система заведомо не имеет предельных циклов (для области 3 на фиг. 11 система устойчива в большом, для области 1 — неустойчива).

Для случая $y \leq 0$ рассмотрена «склеенная» система и выяснено, что она имеет либо предельный цикл (по размерам больший, чем предельный цикл при $y > 0$, или равный ему), либо устойчивость в большом без предельных циклов, либо неустойчивость. В плоскости коэффициентов для склеенной системы имеет место уменьшение области значений параметров,

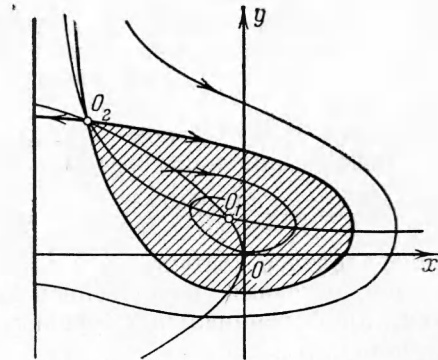
для которых цикл существует, и увеличение области параметров, соответствующих устойчивости в большом без предельных циклов.

Когда η — линейная функция напора, качественные картины аналогичны тем, которые имеют место при $\eta = \text{const}$.

Количественная оценка устойчивости в большом, выполненная в [44] для цилиндрического и так называемого пневматического резервуаров при

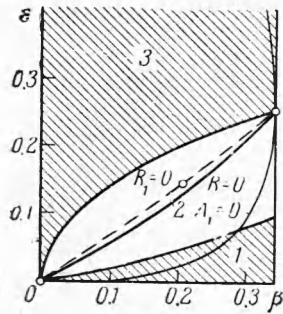


Фиг. 9



Фиг. 10

помощи прямого метода Ляпунова, показывает, что если левая часть второго из неравенств (5.2) превосходит правую, хотя бы на 3—5%, то область устойчивости в большом перекрывает всю область практически возможных начальных отклонений от стационарного режима.



Фиг. 11

б) Резервуар с сопротивлением [45]. Уравнения задачи пишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon \left(x + y|y| + \alpha \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| \right) \\ \frac{dx}{dt} &= y - \frac{1 - \beta}{1 + \beta x + \beta \alpha \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right|} \quad \left(\alpha = \frac{h_g}{h_0} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\alpha = h_g / h_0$, h_g — потеря напора в сопротивлении резервуара при протекании через него расхода Q_0 . Физически реальны только случаи

$$1 + \beta x + \beta \alpha \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| > 0$$

Условия устойчивости в малом совпадают с условиями Тома для простого цилиндрического резервуара.

Введением новых переменных

$$z = \frac{1 + \beta x}{(1 - \beta)^{2/3} (\alpha \beta)^{1/2}}, \quad u = \left(\frac{\alpha \beta}{1 - \beta} \right)^{1/3} \frac{dx}{d\tau}$$

задача приводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dz} = \frac{u - A \{(z - B \pm u^2)(z \pm u^2) \pm C [u(z \pm u^2) + 1]^2\}}{u [(z \pm u^2)^2 \mp 2u]} \quad (5.5)$$

где

$$A = \frac{\varepsilon \alpha}{\beta} (\alpha \beta)^{1/3} (1 - \beta)^{2/3}, \quad B = \frac{1}{(\alpha \beta)^{1/3} (1 - \beta)^{2/3}}, \quad C = \frac{1}{\alpha}$$

а правило знаков определяется из системы (5.4).

Уравнение (5.5) в интересующей нас области фазовой плоскости имеет две особые точки, лежащие на линии склейки: $O_1(z_1, u_1)$ — устойчивый или неустойчивый узел или фокус и $O_2(z_2, u_2)$ — седло. Решение задачи требует выяснения качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории в окрестности особой точки O_1 , в зависимости от параметров системы. В связи с тем, что точка O_1 лежит на линии склейки $u = 0$, обычный алгоритм подсчета первой ляпуновской величины [46], определяющей характер области устойчивости, здесь недействителен. Но путем обобщения метода Н. Н. Баутина определения характера границ области устойчивости на случай динамических систем, описываемых «склеенными» дифференциальными уравнениями [47], показано, что в данном случае граница области устойчивости будет опасной.

Так как правая часть (5.5) содержит отношение «склеенного» полинома шестой степени к «склеенному» полиному пятой степени, то общее число особых точек непосредственно определить трудно; для этого используются номограммы (для $u > 0$, $u < 0$, $u = 0$). Число особых точек оказывается равным максимум семи, причем только две из них (O_1 и O_2) соответствуют состояниям равновесия.

Для выяснения структуры грубых случаев, определяющих устойчивость системы, построены логически возможные простейшие бифуркационные картины, появляющиеся с ростом параметра $A(\epsilon)$ при фиксированных B и C . Рассмотрение не охватывает случаи с более высокой степенью негрубости. Отбор возможных логических случаев облегчен тем, что «седловая величина» [5], определяющая в бифуркационном случае устойчивость петли сепаратрисы, идущей из седла в седло, для особой точки O_2 всегда отрицательна. В результате такого логического рассмотрения показано, что в окрестности состояния равновесия O_1 может иметь место неустойчивость в большом, один предельный цикл (неустойчивый или устойчивый), два предельных цикла (неустойчивый внутри устойчивого) и устойчивость в большом.

в) *Дифференциальный резервуар* [48, 49]. Ограничимся случаем, когда уровень воды в центральном стояке находится все время между отверстиями, соединяющими стояк с баком (ω — площадь отверстий, μ — коэффициент расхода) и гребнем водослива стояка (фиг. 12). В этом случае уравнения задачи будут

$$\frac{dy}{dt} = -\epsilon(x_2 + y|y|) \quad (5.6)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = k\sqrt{|x_2 - x_1|} \operatorname{sign}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = y - \frac{1 - \beta}{1 + \beta x_2} - \alpha k\sqrt{|x_2 - x_1|} \operatorname{sign}(x_2 - x_1)$$

где

$$\epsilon = \frac{gF_2 h_0^2}{LQ_0^2}, \quad \alpha = \frac{F_1}{F_2}, \quad k = \frac{\mu\omega\sqrt{2gh_0}}{Q_0}$$

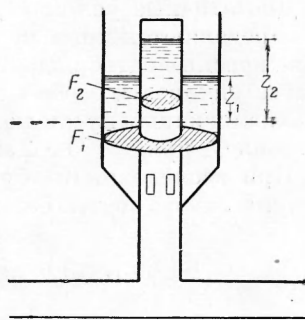
Случай $\alpha = \infty$ соответствует резервуару с сопротивлением, а случай $\alpha = 0$, $\omega = 0$ ($k = 0$) — обычному цилиндрическому резервуару.

В области прямого течения ($y > 0$) система (5.6) имеет две особые точки

$$O_1(y = 1, x_1 = x_2 = -1)$$

$$O_2\left(y = -\frac{\beta + \sqrt{\beta(4-\beta)}}{2\beta}, x_1 = x_2 = \frac{2-\beta - \sqrt{\beta(4-3\beta)}}{2\beta}\right)$$

которым соответствуют стационарные режимы в напорной части ГЭС.



Фиг. 12

Так как в правые части дифференциальных уравнений (5.9) входит нелинеаризуемая нелинейность

$$\sqrt{|x_2 - x_1|} \operatorname{sign}(x_2 - x_1),$$

то обычный способ оценки устойчивости особой точки по корням характеристического уравнения здесь неприменим. Сделав замену $x_2 - x_1 = z|z|$ и вводя новое время по формуле $d\tau = dt / 2|z(t)|$, исследуем состояние равновесия O_1 , полагая для этого $u = y - 1$, $s = x_1 + 1$, после чего (5.6) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} &= 2kz|z| \\ \frac{du}{d\tau} &= -2\varepsilon|z|(2u + s + u^2 + z|z|) \\ \frac{dz}{dt} &= -k(1 + \alpha)z + cs + u + cz|z| - c^2s^2 - 2c^2sz|z| + c^3s^3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Характеристическое уравнение системы (5.7) имеет два нулевых и один отрицательный действительный корень. На основании теоремы И. Г. Малкина [50] характер невозмущенного движения системы (5.7) целиком определяется поведением решения «укороченной» системы, состоящей из двух уравнений

$$\frac{ds}{dt} = k \left[\frac{cs + u}{k(1 + \alpha)} + X(s, u) \right], \quad \frac{du}{dt} = -\varepsilon [s + 2u + Y(s, u)] \quad (5.8)$$

Здесь в $X(s, u)$, $Y(s, u)$ включены члены второго и более высоких порядков относительно s , u . При этом из-за склейки системы (5.7) $X(s, u)$ и $Y(s, u)$ будут разными при $z > 0$ и $z < 0$.

Невозмущенное движение $s = u = 0$ системы (5.8), а значит, и (5.7) устойчиво при

$$c < \frac{1}{2}, \quad \varepsilon > \frac{c}{2(1 + \alpha)} \quad (\text{условия Тома})$$

и неустойчиво при обратных знаках в неравенстве. Граница области устойчивости $\varepsilon = c / 2(1 + \alpha)$ «опасная».

Достаточные условия устойчивости в большом стационарного режима O_1 определяются прямым методом Ляпунова, в процессе чего еще раз автоматически подтверждается необходимость и достаточность условий Тома для устойчивости особой точки O_1 .

Аналогичным путем может быть доказана неустойчивость состояния равновесия O_2 при $c < 1/2$ и любых значениях других параметров.

При исследовании обратного течения $y < 0$ эффективно используется система поверхностей без контакта

$$V(y, x_1, x_2) = \frac{\beta^2}{2\varepsilon} y^2 + \frac{1}{2}(1 + \beta x_1)^2 + \frac{\alpha}{2}(1 + \beta x_2)^2 = C$$

стягивающаяся при $C = 0$ в точку с координатами $y = 0$, $x_1 = x_2 = -1/\beta$.

Изображающая точка в области $y < 0$ движется так, что переходит с поверхности с большим C на поверхность с меньшим C и попадает либо в область $y > 0$, либо уходит из области задания системы (5.6)

$$(1 + \beta x_1 > 0, \quad 1 + \beta x_2 < 0).$$

Применение поверхностей $V = C$ позволяет также показать, что «бесконечность» неустойчива и выделить в фазовом пространстве область «абсолютной» неустойчивости. Попав в нее изображающая точка при любых значениях параметров выйдет из области задания системы (5.6). Наличие области «абсолютной» неустойчивости позволяет оценить наибольшую возможную область устойчивости основного стационарного режима при выполнении условий Тома.

г) ГЭС с n последовательно расположенными резервуарами, имеющими (кроме последнего) сосредоточенные сопротивления (фиг. 13). Дифференциальные уравнения в возмущениях, описывающие процессы в такой системе в случае прямого течения в безразмерных переменных, после униформизации записываются так:

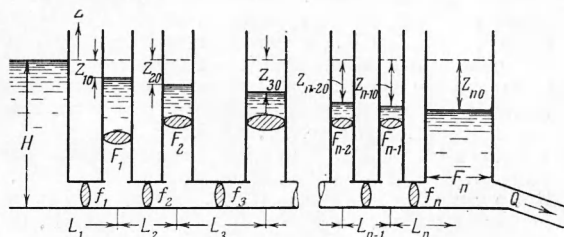
$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\varepsilon b_1 [u_{n+1} + 2c_1 y_{10} u_1 + c_1 u_1^2 \pm k_2' (c_{n+1} u_1 - c_{n+2} u_2)^2] \\ \dot{u}_i &= -\varepsilon b_i [u_{n+i} - u_{n+i-1} + 2c_i y_{i0} u_i + c_i u_i^2 \pm k_i' (c_{n+i} u_i - c_{n+i+1} u_{i+1})^2 \mp \\ &\quad \mp k_{i-1}' (c_{n+i-1} u_{i-1} - c_{n+i} u_i)^2] \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ \dot{u}_i &= b_i (c_i u_{i-n} - c_{i+1} u_{i-n+1}) \quad (i = n+1, n+2, \dots, 2n-1) \\ \dot{u}_{2n} &= b_{2n} \left(c_{2n} u_n + \frac{c u_{2n}}{1 + c u_{2n}} \right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{g h_0^2 F_1}{L_1 f_1 v_0^2}, \quad b_i = \frac{L_1}{L_i}, \quad b_{n+i} = \frac{F_1}{F_i}, \quad c_i = \frac{h_i}{h_1}, \quad c_{n+i} = \frac{f_i}{f_1} \\ c &= \frac{h_0}{H + h_0 v_{n0}}, \quad y_{i0} = \frac{1}{c_{n+i}}, \quad x_{i0} = - \sum_{j=1}^n c_j y_{j0}^2 \quad (i = 1, \dots, n), \quad h_n' = 0 \end{aligned}$$

а k_i' зависит от сопротивления i -й диафрагмы. Верхние знаки в уравнениях берутся при $c_{n+i} u_i - c_{n+i+1} u_{i+1} > 0$.

Нахождение условий устойчивости в малом невозмущенного движения в данном случае значительно упрощается благодаря тому, что характеристическое уравнение системы (5.9) может быть записано в виде цепной дроби, к которой удобно применять метод D разбегания [51]. Отметим, что данная задача рассматривалась еще Фогтом [52] при $n = 2$ в предположении малости сечения первого резервуара, а в [53] был рассмотрен случай $n = 2$, но при учете площадей сечения обоих резервуаров.



Фиг. 13

Для выявления условий, достаточных для устойчивости в большом стационарного режима [54], строится функция Ляпунова в виде квадратичной формы V переменных u_i . При выполнении некоторых ограничений (требований теоремы Сильвестра, условий устойчивости в малом и т. д.) она будет иметь определенно отрицательную производную dV / dt . Общее число ограничений, которым должны удовлетворять $2n^2 + 5n - 2$ параметров системы и коэффициентов квадратичной формы V , составляет $2n^2 + 3n$. Чтобы выделить область устойчивости в большом стационарного режима, строится семейство гиперповерхностей $V = C$ и гиперповерхность $dV / dt = 0$, касающаяся гиперповерхности $V = C_0$ семейства. Область $2n$ -мерного фазового пространства внутри гиперповерхности $V = C_0$ будет целиком заключена в области устойчивости в большом стационарного режима. Для вычисления C_0 эффективно могут быть применены современные быстродействующие электронные вычислительные машины.

Применяя теорему Ляпунова о неустойчивости невозмущенного движения, можно аналогичным образом найти область заведомой неустойчивости стационарного режима.

Используя прямой метод Ляпунова, можно показать, что при отсутствии дополнительного каптажа через уравнительные резервуары обрат-

ное течение в рассматриваемой задаче неустойчиво. При наличии же дополнительного притока жидкости в первые $n-1$ уравнительных резервуаров условия устойчивости невозмущенного движения не изменяются, хотя область устойчивости в фазовом пространстве уменьшается. При дополнительном каптаже, на некоторых начальных участках напорной системы могут существовать устойчивые обратные течения.

В заключение отметим, что задача об устойчивости стационарного режима ГЭС с дифференциальным уравнительным резервуаром есть частный случай задачи об устойчивости стационарного режима ГЭС с n уравнительными резервуарами при $n = 2$, $b_2 \rightarrow \infty$ и $c_2 \rightarrow \infty$, причем первый резервуар должен иметь сосредоточенное сопротивление (это объясняет учет в первых $n-1$ резервуарах сосредоточенных сопротивлений).

Поступила
22 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Тафт В. А. Электрические цепи с периодически изменяющимися параметрами и переходные процессы в синхронных машинах. Изд-во АН СССР, 1958.
2. Жданов П. С. Устойчивость электрических систем. Госэнергоиздат, 1948.
3. Картвелишвили Н. А. Влияние взаимодействия гидравлических, механических и электрических процессов на устойчивость работы электростанций. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 2.
4. Аронович Г. В., Любимцев Я. К. Влияние инерции воды в турбинном трубопроводе на устойчивость работы ГЭС с уравнительными резервуарами. Изв. вузов, Радиофизика, 1960, № 3.
5. Андронов А. А., Витт, А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
6. Железцов Н. А., Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора. ДАН СССР, 1951, 81, № 3.
7. Градштейн И. С. Нелинейные дифференциальные уравнения с малыми множителями при некоторых производных. ДАН СССР, 1949, т. 66.
8. Градштейн И. С. Дифференциальные уравнения, в которые множителями входят различные степени малого параметра. ДАН СССР, 1952, т. 82, № 1.
9. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР, серия матем., 1957, т. 21, № 5.
10. Тихонов А. М. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем., сб., 1952, № 31/73.
11. Картвелишвили Н. А. Устойчивость в малом динамических систем, содержащих малые параметры. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 9.
12. Андреева И. П. Некоторые вопросы устойчивости стационарных режимов гидроэлектростанций и энергетических систем. Тр. МЭИ, 1956, вып. 19.
13. Картвелишвили Н. А. Влияние взаимодействия гидравлических, механических и электрических процессов на устойчивость работы электростанций. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 2.
14. Витек В. Влияние параметров регулятора скорости гидротурбины на критическую площадь уравнительного резервуара. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 3.
15. Vítěk V. Vliv regulace turbin na hydraulické přechodové jevy ve vyrovnávacích komorách vodních elektráren. Práce výzkumného ústavu energetického, 1, 1960 (Praha).
16. Витек В. Устойчивость в малом регулирования турбин в условиях параллельной работы электростанций. Науч. докл. высш. школы, Энергетика, 1958, № 2.
17. Картвелишвили Н. А. Методы исследования статической устойчивости энергетических систем при сильном регулировании. Тр. ВНИИЭ, 1959, т. 9.
18. Матюхин В. М. О статической устойчивости электропередачи в связи с наличием нескольких генераторов на передающей станции. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
19. Матюхин В. М. Об устойчивости сложных энергосистем. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 11.
20. Михневич Г. В., Козловский Г. Ф. Устойчивость и качество переходных процессов системы регулирования возбуждения многоагрегатной электростанции. Изд-во АН СССР, 1960.
21. Морозовский В. Т. Об устойчивости параллельной работы однотипных синхронных генераторов. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 2.
22. Цукерник Л. В. Устойчивость связанной системы автоматического регулирования при внутригрупповой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 4.

23. А р о н о в и ч Г. В. К определению достаточных условий устойчивости «в большом» стационарных режимов одной простейшей энергосистемы. Изв. вузов, Радиофизика, 1959, № 1.
24. А р о н о в и ч Г. В. К определению достаточных условий динамической устойчивости энергетических систем. Тр. ВНИИЭ, 1959, т. 9.
25. А р о н о в и ч Г. В. К определению достаточных условий динамической устойчивости сложной энергосистемы при переменных э. д. с. Изв. вузов. Радиофизика, 1959, № 3.
26. Б о г о л ю б о в Н. Н., З у б а р е в Д. Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле. Укр. матем. журнал, 1955, № 7.
27. Я н к о - Т р о и ц к и й А. А. Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резко переменных нагрузках. Госэнергоиздат, 1958.
28. А р о н о в и ч Г. В. К определению устойчивости «в большом» стационарных режимов ГЭС с уравнительными резервуарами. Изв. вузов. Радиофизика, 1961, № 4.
29. Л е б е д е в С. А., Ж д а н о в П. С., Г о р о д с к и й Д. А., К а н т о р Р. М. Устойчивость электрических систем. Тр. ВЭИ, 1940, вып. 40.
30. К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н. О колебаниях синхронных машин. Об устойчивости параллельной работы синхронных машин. Харьков — Киев, 1932.
31. В л а с о в Н. П. Автоколебания синхронного мотора. Уч. зап. Горьковского ун-та, 1939, вып. 13.
32. Б е л ю с т и н а Л. Н. Об устойчивости режима работы явнополюсного синхронного двигателя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 10.
33. Б е л ю с т и н а Л. Н. Об одном уравнении из теории электрических машин. Сб. Памяти А. А. Андропова, Изд-во АН СССР, 1955.
34. E d g e r t o n H., F o u r m a r i e r P. The pulling into step of a salient — pole synchronous motor. IEEE, Trans., 50, 1931.
35. Б е л ю с т и н а Л. Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты. Изв. вузов, Радиофизика, 1959, № 2.
36. Б е л ю с т и н а Л. Н. Определение качественной структуры «грубой» динамической системы путем приближенного построения особых траекторий. Изв. вузов, Радиофизика, 1959, № 4.
37. М а м и к о н я н ц Л. Г. Токи и моменты вращения, возникающие в синхронной машине при включении ее способом самосинхронизации. Тр. ЦНИЭЛ, 1956, т. 4.
38. М а м и к о н я н ц Л. Г. Токи и моменты асинхронных и синхронных машин при изменении скорости их вращения. Электричество, 1958, № 8.
39. С ы р о м я т н и к о в И. А. Режимы работы синхронных генераторов. Госэнергоиздат, 1952.
40. А н д р е ю к В. А. Вывод достаточных условий устойчивости в «большом» системы синхронных машин. Изв. НИИ постоянного тока, 1957, вып. 2.
41. А н д р е ю к В. А. Вывод достаточного условия устойчивости в «большом» синхронной машины. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, вып. 195.
42. К а р т в е л и ш в и л и Н. А. Переходные процессы в энергетических системах как задача общей теории колебаний. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 2.
43. А р о н о в и ч Г. В., Б е л ю с т и н а Л. Н. Об устойчивости колебаний горизонта в уравнительной башне. Инж. сб., 1952, № 13.
44. К а р т в е л и ш в и л и Н. А. Устойчивость в большом стационарных режимов гидроэлектростанций с уравнительными резервуарами. Инж. сб., 1954, т. 20.
45. А р о н о в и ч Г. В. Устойчивость колебаний горизонта в уравнительном резервуаре с сопротивлением. Сб. Памяти А. А. Андропова, Изд-во АН СССР, 1955.
46. Б а у т и н Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Гостехиздат, 1949.
47. А р о н о в и ч Г. В. Определение опасных и безопасных границ области устойчивости динамической системы в случае фокуса, лежащего на линии склейки. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, № 2.
48. Л ю б и м ц е в Я. К. Устойчивость стационарных режимов ГЭС с дифференциальным уравнительным резервуаром. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 1.
49. Л ю б и м ц е в Я. К. К вопросу об устойчивости стационарных режимов гидроэлектростанций с дифференциальными резервуарами. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, № 2.
50. М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
51. А р о н о в и ч Г. В., Л ю б и м ц е в Я. К. Определение устойчивости системы гидравлических резервуаров методом D -разбиения. Инж. сб., 1955, т. 21.
52. V o g t F. Berechnung und Konstruktion des Wasserschlosses. Stuttgart, 1923.
53. К а р т в е л и ш в и л и Н. А. Гидравлическая устойчивость уравнительных башен. Изв. ВНИИГ, 1940, т. 26.
54. Л ю б и м ц е в Я. К. Достаточные условия устойчивости в «большом» системы из n гидравлических резервуаров. Изв. вузов, Радиофизика, 1958, № 1.