ПМТФ, № 6, 1972

УДК 536.24

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЕЕ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ НЕВЯЗКОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Н. Н. Пилюгин

(Москва)

В данной работе в ньютоновском приближении [1] получено аналитическое решение задачи об обтекании сферы установившимся равномерным гиперзвуковым, невязким, излучающим потоком газа. Используется приближение объемного высвечивания. Найдено распределение газодинамических параметров в ударном слое, отход ударной волны и лучистый тепловой поток к поверхности сферы.

Ньютоновское приближение ранее использовалось в работах [2,3] для анализа течения газа с излучением в окрестности критической линии. В работе [2] поле излучения рассматривается в дифференциальном приближении, оптический коэффициент поглощения считается постоянным. В работе [3] интегро-дифференциальное уравнение энергии с учетом излучения для серого газа решалось численно.

В работах [4–7] задача о течении невязкого, нетеплопроводного газа за ударной волной с учетом излучения решалась численно. При вычислении поля излучения в работах [4,7] используется приближение объемного высвечивания, в [5, 6] учитывается самопоглощение газа.

Сравнение полученных в данной работе формул для лучистого потока от излучающего воздуха к сфере с численными расчетами [4–7] показывает их удовлетворительную точность.

1. Рассматривается обтекание сферического тела радиуса R гиперзвуковым потоком невязкого, нетеплопроводного излучающего газа. Система уравнений, описывающих течение газа между отошедшей ударной волной и сферой, записанная в сферической системе координат, связанной с телом, приведена в работе [5]. Эта система уравнений решается с граничными условиями на косом скачке и с условием непротекания на теле. Далее предполагается, что газ совершенный, ударный слой тонкий и выполняются условия гиперзвукового приближения, так что

$$p_\infty \ll \rho_\infty V_\infty^2, \qquad h_\infty \ll V_\infty^2/2$$

где p_∞ — давление, ρ_∞ — плотность, h_∞ — энтальпия, V_∞ — скорость набегающего потока.

Газ подчиняется уравнению состояния

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{1.1}$$

где γ — эффективное отношение теплоемкостей за скачком уплотнения, p — давление, h — энтальпия, ρ — плотность.

Для решения задачи производится разложение величин по малому параметру ε, равному отношению плотностей газа до и после ударной волны (ньютоновское приближение) [1]

$$(r-R)/R = \varepsilon y_0 + \ldots, \qquad u = V_\infty[u_0 + O(\varepsilon)], \qquad v = V_\infty[\varepsilon v_0 + O(\varepsilon^2)] \tag{1.2}$$

$$p = \rho_\infty V_\infty^2 [p_0 + O(\varepsilon)], \qquad \rho = \frac{\rho_\infty}{\varepsilon}[\rho_0 + O(\varepsilon)], \qquad h = \frac{V_\infty^2}{2}[h_0 + O(\varepsilon)]$$

$$Q = \frac{\sigma}{\varepsilon R}\left(\frac{V_\infty^2}{2C_p}\right)^4 [Q_0 + O(\varepsilon)]$$

Здесь r — радиальная координата, u — касательная, v — нормальная составляющая скорости, p — давление, h — энтальпия, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана — Больцмана, R — радиус тела, $Q = \operatorname{div} q_R$ — дивергенция лучистого потока, $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$, C_p — эффективная теплоемкость при постоянном давлении.

Индекс ∞ отмечает величины в набегающем потоке, индекс s — величины на ударной волне, индекс о — безразмерные величины.

Соотношения (1.2) подставляются в уравнения газодинамики, после чего получим для первых членов разложения (индекс о опускаем)

$$\frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\rho u) = 0, \qquad \rho u^2 = \frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.3}$$

$$\rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho u\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0, \qquad \rho v\frac{\partial h}{\partial y} + \rho u\frac{\partial h}{\partial\theta} = -\Gamma Q$$

$$h = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \qquad \Gamma = \frac{2\sigma}{\rho_\infty V_\infty^3}\left(\frac{V_\infty^2}{2C_p}\right)^4$$

Здесь Γ — параметр излучения [5], θ — угловая координата.

В том же приближении соотношения на ударной волне примут вид

$$u_S - \sin\theta, \qquad v_S = -\cos\theta, \qquad p_S = \cos^2\theta, \qquad h_S = \cos^2\theta \tag{1.4}$$

Условие непротекания тела примет вид

$$v\,(y = 0) = 0 \tag{1.5}$$

Определим безразмерную функцию тока

$$d\,\psi = \rho u \sin\theta\, dy - \rho v \sin\theta\, d\theta \tag{1.6}$$

Далее в системе (1.3) перейдем к переменным Ψ, θ. Тогда в этих переменных система (1.3) запишется следующим образом:

$$\partial u/\partial\,\theta = 0 \tag{1.7}$$

$$\partial p/\partial\Psi = u/\sin\theta \tag{1.8}$$

$$\partial y/\partial\Psi = 1/\rho u \sin\theta \tag{1.9}$$

$$v = u\,\partial y/\partial\theta \tag{1.10}$$

$$\rho u\,\partial h/\partial\theta = -\Gamma\, Q \tag{1.11}$$

На теле полагаем безразмерную функцию тока $\Psi = 0$, на ударной волне $\Psi = \Psi_S(\theta) = {}^1/_2 \sin^2\theta$.

Граничные условия (1.4) в новых переменных имеют тот же вид, но нужно брать их при $\Psi = \Psi_S(\theta)$.

2. Решение уравнения (1.7) с граничными условиями (1.4) имеет вид

$$u = \sqrt{2\Psi} \tag{2.1}$$

С учетом этого решения выражение для давления из уравнения (1.8) с учетом (1.4) примет вид

$$p(\Psi, \theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{3}\sin^2\theta + \frac{(2\Psi)^{3/2}}{3\sin\theta} \tag{2.2}$$

Для геометрической координаты получим выражение

$$y(\Psi, \theta) = \frac{1}{\sin\theta}\int_0^\Psi \frac{d\Psi}{\rho\sqrt{2\Psi}} \tag{2.3}$$

Соотношение (1.10) определяет нормальную составляющую скорости, которая удовлетворяет граничному условию (1.4). Для окончательного решения газодинамической задачи необходимо решить уравнение (1.11) с граничным условием (1.4).

В приближении объемного высвечивания дивергенция лучистого потока имеет вид (в размерном виде) [7-9]

$$Q = 2\mu\sigma T^4 \tag{2.4}$$

Здесь μ — среднепланковский коэффициент поглощения. Анализ табличных данных [8-10] для воздуха показывает, что в определенном интервале давлений и температур коэффициент Планка можно аппроксимировать следующим образом:

$$\mu(p, T) = ApT^n \tag{2.5}$$

где A, n — константы аппроксимации, p — давление, T — температура.

Используя соотношения (2.4), (2.5), получим уравнение для энтальпии

$$u\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\frac{bh^{n+5}}{(n+4)} \tag{2.6}$$

с граничным условием

$$h(\Psi = \Psi_S(\theta)) = \cos^2\theta \tag{2.7}$$

где безразмерный параметр b является произведением характерной оптической толщины ударного слоя на параметр излучения Γ

$$b = 2A\rho_\infty V_\infty^2\left(\frac{V_\infty^2}{2C_p}\right)^n \varepsilon R\,\frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\Gamma(n+4) \tag{2.8}$$

В работе [4] этот параметр называется параметром потерь энергии на излучение. Решение для энтальпии имеет вид

$$h(\Psi, \theta) = \left\{\frac{1}{(1-2\Psi)^{n+4}} + \frac{b\theta}{\sqrt{2\Psi}} - \frac{b\arcsin\sqrt{2\Psi}}{\sqrt{2\Psi}}\right\}^\alpha, \quad \alpha = (n+4)^{-1} \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) позволяет найти плотность ρ, далее геометрическую координату $y(\Psi, \theta)$ по соотношению (2.3) и нормальную составляющую скорости $v(\Psi, \theta)$ по соотношению (1.10).

Таким образом, определены все параметры течения газа в ударном слое.

3. В большинстве работ при вычислении лучистого теплового потока на тело в предположении о малой толщине ударного слоя по сравнению с радиусом тела используют формулу для плоского слоя с толщиной, равной отходу ударной волны. Если предположить, что степень черноты тела равна единице, а собственным излучением сравнительно холодной поверхности тела можно пренебречь, то лучистый поток на тело от слоя газа любой конфигурации выражается формулой работы [10]. Из этого общего выражения в предположении, что ударный слой тонкий и происходит объемное высвечивание, можно получить следующее выражение для радиального лучистого потока (в размерном виде) в точки, определяемые координатой θ на поверхности тела

$$q_R(\theta) = \varepsilon R\int_0^{y_s(\theta)} dy\,\mu(p, T)\,\sigma T^4 \tag{3.1}$$

где θ — угол, определяющий точку наблюдения на теле, $y_S(\theta)$ — отход ударной волны.

Выражение (3.1) можно переписать в безразмерном виде, а также использовать (2.8), (2.9)

$$\frac{2q_R(\theta)}{\rho_\infty V_\infty{}^3} = \frac{b}{2(n+4)}\int\limits_0^1 \left\{(1-t^2\sin^2\theta)^{-(n+4)} + \frac{b(\theta-\arcsin(t\sin\theta))}{t\sin\theta}\right\}^m dt$$

$$m = -(n+5)/n+4 \qquad (3.2)$$

Из этого выражения вытекает ряд частных случаев. При $b \ll 1$, когда излучение можно рассматривать как возмущение, наложенное на адиабатическое течение газа, формула (3.2) дает

$$\frac{2q_R(\theta)}{\rho_\infty V_\infty{}^3} = \frac{b}{2(n+4)}\int\limits_0^1 dt\,[1-t^2\sin^2\theta]^{n+5} \qquad (3.3)$$

При углах, подчиняющихся условию

$$\sin\theta < \sqrt{3/(n+5)}$$

интеграл в (3.3) вычисляется, удерживая два члена в биномиальном разложении подынтегральной функции. Аппроксимируя полученный результат с той же точностью, получим

$$\frac{2q_R(\theta)}{\rho_\infty V_\infty{}^3} = \frac{b}{2(n+4)}(\cos\theta)^{2/3\,(n+5)} \qquad (3.4)$$

Из этой формулы видно, что лучистый поток растет пропорционально радиусу тела (или толщине сжатого слоя) и довольно быстро убывает с увеличением угла. Отношение потока (3.4) к потоку в критическую точку ($\theta = 0$) не зависит от параметра b и, следовательно, от радиуса тела. Эти выводы подтверждаются численными расчетами [4–6]. Аппроксимация табличных данных для воздуха [9, 10] при $0.1 \leqslant p \leqslant 1$ *атм*, $4000°\ \mathrm{K} \leqslant T \leqslant 11000°\ \mathrm{K}$ дает значение $n \approx 8.0$. Формула (3.4) при $n = 8$ приводит к зависимости от угла

$$q_R(\theta) \sim (\cos\theta)^{8.67}$$

Численные расчеты лучистого потока для воздуха при скорости набегающего потока $V_\infty = 10$ *км/сек*, когда газ можно считать слабо излучающим, приводят к зависимости

$$q_R(\theta) \sim (\cos\theta)^{10.7}$$

В другом предельном случае, когда газ является сильно излучающим $b \gg 1$, асимптотическое вычисление интеграла в (3.2) приводит к следующей формуле для потока:

$$2q_R(\theta)/\rho_\infty V_\infty{}^3 = \cos^3\theta/2 \qquad (3.5)$$

Из этой формулы видно, что в случае сильно излучающего газа предельный лучистый поток на тело равен половине кинетического потока набегающего газа (другая половина высвечивается в сторону ударной волны).

Численные расчеты [6] для $V_\infty = 16$ *км/сек* приводят к зависимости $q_R(\theta) \sim \cos^{3.05}\theta$, что близко к предельному выражению (3.5).

Из (3.5) следует, что при сильном высвечивании лучистый поток не зависит от радиуса тела. Этот результат подтверждается численным расчетом [5] для критической точки, где показано, что отношение $q_R(R)\,/\,q_R(R = 3\ \textit{м})$ стремится к постоянному пределу при $R > 1$ *м*.

В обоих предельных случаях (3.4), (3.5) отношение лучистого потока при $\theta \neq 0$ к потоку в критическую точку не зависит от параметра b и, следовательно, радиуса тела. Независимость этого отношения от радиуса подтверждается численными расчетами [4, 6].

4. Из приведенных выше соотношений (2.3) и (2.9) можно получить безразмерный отход ударной волны $y_s(\theta)$ в зависимости от угла θ и параметра b

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\int\limits_0^1 dt\left[\cos^2\theta - \frac{1}{3}\sin^2\theta + \frac{t^3}{3}\sin^2\theta\right]^{-1} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(1-t^2\sin^2\theta)^{n+4}} + \frac{b\,(\theta - \arcsin(t\sin\theta))}{t\sin\theta}\right\}^{-1/(n+4)} \tag{4.1}$$

Для слабо излучающего газа при $b \ll 1$ из (4.1) следует:

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\int\limits_0^1 \frac{dt\,(1-t^2\sin^2\theta)}{[\cos^2\theta - {}^1/_3\sin^2\theta\,(1-t^3)]} \tag{4.2}$$

Вычисление входящего в (4.2) интеграла дает

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\left\{\frac{3}{a^2\sin^2\theta}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(a+1)^2}{a^2-a+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2-a}{a\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] - \ln\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta - {}^1/_3\sin^2\theta}\right\} \tag{4.3}$$

где $a^3 = 3\operatorname{ctg}^2\theta - 1$.

Для углов $\theta < \pi/6$ выражение (4.2) дает с точностью до 12%

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{4.4}$$

Таким образом, для слабо излучающего газа отход естественным образом не зависит от параметра b, т. е. от излучения и увеличивается с увеличением угла θ.

В случае сильно излучающегося газа при $b \gg 1$ асимптотическое вычисление интеграла в (4.1) для углов $\theta < \pi / 6$ дает

$$y_S(\theta) = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{n+4}{n+3}\frac{b^\alpha}{\cos^2\theta} \tag{4.5}$$

Отход ударной волны в размерном виде

$$r_S(\theta) - R = \varepsilon R y_S(\theta) \tag{4.6}$$

где $r_S = r_S(\theta)$ — уравнение, описывающее форму ударной волны. Из формул (4.3), (4.5), (4.6) следует, что для слабо излучающего газа отход растет $\sim R$, а для сильно излучающего $\sim R^{(n+3)/(n+4)}$ и уменьшается с ростом скорости V_∞. Это подтверждается анализом численных работ [5, 7]. Интересно отметить, что из формул (4.4) и (4.5) следует одинаковая зависимость отхода от угла θ по крайней мере для углов $\theta < \pi / 6$ для сильно и слабо излучающего газа. Отношение отхода при $\theta \neq 0$ к отходу на критической линии $\theta = 0$ в обоих предельных случаях не зависит от параметра b, связанного с излучением.

Из формул (4.1), (4.5) следует, что отход ударной волны уменьшается с ростом параметра потерь энергии на излучение b. Такое уменьшение отхода ударной волны при объемном высвечивании отмечено при расчетах [7].

В заключение автор благодарит Г. А. Тирского и Э. А. Гершбейна за обсуждение и ценные замечания.

Поступила 20 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Конвективный теплообмен в излучающем газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
3. Chisnell R. F. Radiation effects in the stagnation region. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 10.
4. Wilson K. H., Hoshizaki H. Inviscid, nonadiabatic flow about blunt bodies. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1.
5. Елькин Ю. Г. Гиперзвуковые течения невязкого селективно излучающего газа около тупоносого тела. Тр. ЦАГИ, 1970, вып. 1258.
6. Стулов В. П., Шапиро Е. Г. Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
7. Фомин В. Н. Обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком газа с учетом излучения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 4.
8. Бай Ши-и. Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.
9. Коньков А. А., Нейланд В. Я., Николаев В. М., Пластинин Ю. А. Проблемы лучистого теплообмена в гиперзвуковой аэродинамике. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, вып. 1.
10. Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С., Замалин В. М., Кобзев Г. А., Лагарьков А. Н., Мнацаканян А. Х., Норман Г. Э. Оптические свойства горячего воздуха. М., «Наука», 1970.