ПМТФ, № 5, 1984

УДК 537.311.33

О ЛОКАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, ТОКОВ, ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ И ПЕРЕГРЕВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ У ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Л. Н. Заседка, Л. Л. Назарова, В. Ф. Резцов

(*Николаев*)

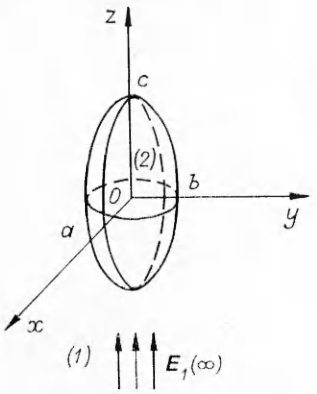
Известно [1], что наличие в нагреваемой жидкости неоднородностей может служить причиной эффективного образования областей ее взрывного вскипания. Согласно [2], такие области могут формироваться в окрестности нитей, нагреваемых электрическим током, или в области сферических включений в жидкости, через которую также пропускается электрический ток [3].

Если окружающая неоднородность жидкость характеризуется нелинейной зависимостью электрической проводимости от температуры, то в этом случае причиной взрывного гетерогенного вскипания жидкости может быть развитие в ней перегревной неустойчивости, которая, согласно [4, 5], приводит к шнурованию тока на поверхности электродов.

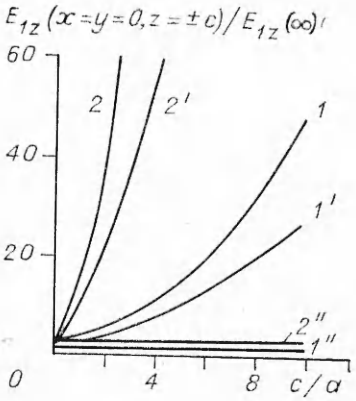
Поскольку макроскопические включения в жидкости можно удерживать в устойчивом состоянии внешними магнитными [6] или электрическими [7] полями (включения могут служить средством инициирования разряда в жидкости [8—10]), то представляется интересным более детально рассмотреть вопросы локализации полей, токов и джоулевой диссипации энергии на поверхности неоднородностей, а также условия развития перегревной неустойчивости на включениях.

Необходимо отметить, что частично эти вопросы рассматривались в работах [3, 11—14], из которых можно сделать следующие выводы: 1) хорошо проводящие неоднородности характеризуются более сильным свойством концентрировать ток и джоулево тепловыделение, чем слабопроводящие; 2) в окрестности хорошо проводящих неоднородностей максимум тока локализуется вблизи точек (полюсов) на границе раздела жидкости и включения, а для слабопроводящих — в зоне экваториальной линии (фиг. 1); увеличение вытянутости проводящих включений вдоль внешнего электрического поля приводит к росту эффекта концентрации поля, тока и джоулевой диссипации энергии в окружающей жидкости.

Если, например, внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}_1(\infty)$ направлено вдоль оси z и величина электрической проводимости включений гораздо больше проводимости жидкости ($\sigma_2 \gg \sigma_1$), то, согласно [11—14], приведенная напряженность электрического поля $E_{1z}(x = y = 0, z = \pm c)/E_{1z}(\infty)$ и приведенная плотность тока $j_{1z}(x = y = 0, z = \pm c)/j_{1z}(\infty)$ в точках жидкости ($x = y = 0$, $z = \pm c$) обратно пропор-



Фиг. 1



Фиг. 2

циональны коэффициенту деполяризации $n^{(z)}$ включения вдоль оси z (кривая *1* на фиг. 2), а приведенное значение плотности джоулевой диссипации энергии $q_v(x = y = 0,\ z = \pm c)/q_{v1}(\infty)$ обратно пропорционально величине параметра $n^{(z)^2}$ (кривая *2* на фиг. 2). Указанные зависимости представлены для сфероидальной формы неоднородностей ($a = b$).

Уменьшение относительной проводимости включений σ_2/σ_1, как видно из выражения для относительной напряженности электрического поля в точках ($x = y = 0,\ z = +c$)

$$E_{1z}(x = y = 0,\ z = \pm c)/E_{1z}(\infty) = \frac{1}{n^{(z)} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(1 - n^{(z)})}, \tag{1}$$

приводит к уменьшению скорости роста относительных значений плотности тока и плотности джоулевой диссипации энергии с увеличением c/a (на фиг. 2 кривые *1'*, *2'* для $\sigma_2/\sigma_1 = 5$, *1''*, *2''* для $\sigma_2/\sigma_1 = 1$).

Повышенные значения плотности объемного тепловыделения, которая, с одной стороны, согласно [4, 5], имеет определяющее значение для инициирования взрывного вскипания жидкости, а с другой — неоднородно распределена по поверхности неоднородностей [11—14], ставят задачу анализа условий развития перегревной неустойчивости жидкости в окрестности неоднородностей.

Для определения инкрементов перегревной неустойчивости будем исходить из системы уравнений переноса тепла и тока в жидкости:

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - Q_n(T); \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j} = 0,\ \nabla\times\mathbf{E} = 0,\ \mathbf{j} = \sigma(T)\mathbf{E}, \tag{3}$$

где ρ, c_V, $\sigma(T)$, λ — плотность, удельная теплоемкость, электрическая проводимость и теплопроводность жидкости; T — температура жидкости; $Q_n(T)$ — объемные потери тепла в пограничном слое жидкости на теплообмен с материалом включений, которые известным образом [4] могут быть введены в виде объемного члена в уравнение (2).

Предположим, что существует некоторое равновесное состояние среды, которое определяется системой стационарных уравнений

$$-\lambda_0 \Delta T_0 = \mathbf{j}_0\cdot\mathbf{E}_0 - Q_n(T_0); \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j}_0 = 0,\ \nabla\times\mathbf{E}_0 = 0,\ \mathbf{j}_0 = \sigma(T_0)\mathbf{E}_0, \tag{5}$$

и представим возмущения температуры δT и поля $\delta\mathbf{E}$ в виде

$$\delta T = \delta T_a \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t),\ \delta T = T - T_0,\ i^2 = -1; \tag{6}$$

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}_a \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t),\ \delta\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0, \tag{7}$$

где δT_a, $\delta\mathbf{E}_a$ — амплитудные значения возмущений, зависящие от пространственных координат; ω — частота возмущений; $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

Подставляя выражения (6), (7) в уравнения (2), (3), получаем следующую систему уравнений, связывающую возмущения температуры и поля:

$$\rho c_V\left[\frac{\delta T}{\delta T_a}\frac{\partial T_a}{\partial t} - i\omega\delta T\right] - \lambda\nabla\cdot\left[\frac{\delta T}{\delta T_a}\nabla(\delta T_a) + i\mathbf{k}\delta T\right] = \tag{8}$$

$$= 2\sigma|_{T=T_0}\cdot\mathbf{E}_0\cdot\delta\mathbf{E} + \frac{\partial\sigma}{\partial T}\Big|_{T=T_0}\mathbf{E}_0^2\delta T - \frac{\partial Q_n}{\partial T}\Big|_{T=T_0}\delta T,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T}\Big|_{T-T_0}\left[\frac{\nabla(\delta T_a)}{\delta T_a}\delta T + i\mathbf{k}\delta T\right]\cdot\mathbf{E}_0 + \sigma|_{T=T_0}[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} -$$

$$- i\omega t)\nabla\cdot(\delta\mathbf{E}_a) + \delta\mathbf{E}\cdot i\mathbf{k}] = 0,$$

$$\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)\nabla\times(\delta\mathbf{E}_a) + i\mathbf{k}\times\delta\mathbf{E}.$$

Система уравнений (8) является чрезвычайно сложной для анализа, поскольку содержит члены, пропорциональные производным амплитуд флуктуаций по координатам и времени. Если же воспользоваться предположением о слабой зависимости амплитуд флуктуаций поля и температуры от координат и времени, которое математически соответствует выполнению неравенств

$$\frac{1}{\delta T_a}\frac{\partial T_a}{\partial t} \ll \omega, \quad \frac{|\nabla(\delta T_a)|}{\delta T_a} \ll |\mathbf{k}|, \quad \frac{|\nabla\cdot(\delta \mathbf{E}_a)|}{|\delta \mathbf{E}|} \ll |\mathbf{k}|, \tag{9}$$

а физически представляет собой ограничение на частоту и период флуктуаций, то система (8) может быть представлена в более простой форме

$$i\omega\rho c_V - \lambda\mathbf{k}^2 + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}\mathbf{E}_0^2 - \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0} + 2\sigma|_{T=T_0}\mathbf{E}_0\cdot\delta\mathbf{E}/\delta T = 0, \tag{10}$$

$$\sigma|_{T=T_0}\delta\mathbf{E}\cdot\mathbf{k} + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}\delta T\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{k} = 0, \quad i\mathbf{k}\times\delta\mathbf{E} = 0.$$

Выразив из последнего уравнения системы (10) возмущения поля δE_x, δE_y через δE_z

$$\delta E_x = \frac{k_x}{k_z}\delta E_z, \quad \delta E_y = \frac{k_y}{k_z}\delta E_z,$$

а из второго уравнения системы (10) δT через δE_z

$$\delta T = \frac{\sigma|_{T=T_0}\delta E_z\dfrac{\mathbf{k}^2}{k_z}}{\left.\dfrac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}(k_xE_{0x} + k_yE_{0y} + k_zE_{0z})}$$

и подставив их в первое из уравнений (10), приходим к дисперсионному уравнению

$$i\omega\rho c_V - \lambda\mathbf{k}^2 + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}\mathbf{E}_0^2 - \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0} - 2\left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}\frac{(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2} = 0. \tag{11}$$

Так как при ориентации внешнего электрического поля вдоль оси z x-я и y-я компоненты поля в жидкости в окрестности точки ($x = y = 0$, $z = \pm c$) равны нулю, то уравнение (11) упрощается и принимает вид

$$i\omega\rho c_V - \lambda\mathbf{k}^2 + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}E_{1z}^2(x = y = 0,\ z = \pm c) - \tag{12}$$

$$- \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0} - 2\left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}\frac{E_{1z}^2(x = y = 0,\ z = \pm c)\,k_z^2}{\mathbf{k}^2} = 0.$$

Рассмотрим возмущения, поперечные к полю $\mathbf{E}_1(\infty) = \mathbf{E}_{1z}(\infty)\mathbf{k}$, соответствующие шнурованию температуры и тока в среде вдоль поля, когда $k_z = 0$, $k_x = k_y = 1$, а уравнение (12) принимает вид

$$i\omega\rho c_V - 2\lambda k_\perp^2 + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}E_{1z}^2(x = y = 0,\ z = \pm c) - \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0} = 0. \tag{13}$$

Из уравнения (13) можно видеть, что при выполнении неравенства

$$\left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}E_{1z}^2(x = y = 0,\ z = \pm c) > 2\lambda k_\perp^2 - \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0} \tag{14}$$

имеет место неустойчивость с инкрементом

$$\varepsilon(k_\perp) = \frac{\left.\dfrac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0}E_{1z}^2(x = y = 0,\ z = \pm c) - 2\lambda k_\perp^2 - \left.\dfrac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0}}{\rho c_V}. \tag{15}$$

Пороговое значение волнового вектора $k_\perp^*$, которое определяется соотношением

$$k_\perp^* = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}\left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0} E_{1z}^2(x=y=0,\ z=\pm c) - \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0}}, \tag{16}$$

с ростом параметров c/a и σ_2/σ_1 сдвигается в область больших значений волновых векторов.

В области неустойчивости величина инкремента $\varepsilon(k_\perp)$ достигает максимума

$$\varepsilon(k_\perp)_{\max} = \frac{\left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0} E_{1z}^2(x=y=0,\ z=\pm c) - \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0}}{\rho c_V} \tag{17}$$

в точке $k_\perp = 0$.

Для возмущений, соответствующих расслоению в окрестности точек ($x = y = 0$, $z = \pm c$), когда $k_x = k_y = 0$, $k_z \neq 0$, дисперсионное уравнение принимает вид

$$i\omega\rho c_V - \lambda k_z^2 = \left.\frac{\partial Q_n}{\partial T}\right|_{T=T_0} - \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0} E_{1z}^2(x=y=0,\ z=\pm c), \tag{18}$$

откуда следует вывод об устойчивости распределения температуры и тока в среде относительно расслаивания вдоль оси z.

Примерно такую же структуру, как и (18), имеет дисперсионное уравнение для флуктуаций, связанных со шнурованием тока и температуры в точках ($x = y = 0$, $z = \pm c$) вблизи неоднородностей с малой относительно жидкости электрической проводимостью

$$i\omega\rho c_V - 2\lambda k_\perp^2 + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right|_{T=T_0} E_{1z}^2(x=y=0,\ z=\pm c), \tag{19}$$

где

$$E_{1z}(x=y=0,\ z=\pm c) \to 0 \text{ при } \sigma_2/\sigma_1 \ll 1.$$

Из уравнения (19) следует вывод о том, что в случае слабопроводящих включений наиболее вероятным следствием нагрева среды в окрестности точек ($x = y = 0$, $z = \pm c$) будет стабилизация возмущений, а для хорошо проводящих неоднородностей — шнурование поля, тока и температуры в направлении приложения внешнего поля.

Если далее рассмотреть окрестность точек ($z = 0$) на поверхности эллипсоидальной неоднородности, то во внешнем поле, направленном вдоль оси z, величина напряженности поля в этих точках, согласно [11, 12], определяется выражением

$$E_{1z}(z=0) = \frac{E_{1z}(\infty)\,\sigma_1/\sigma_2}{n^{(z)} + (1-n^{(z)})\,\sigma_1/\sigma_2}. \tag{20}$$

Если проанализировать получающиеся из общего дисперсионного уравнения (11) предельные по параметру σ_2/σ_1 случаи для поперечных и продольных относительно внешнего поля возмущений с учетом выражения (20), то оказывается, что в окрестности точек ($z = 0$) для хорошо проводящих неоднородностей наиболее вероятным следствием нелинейной зависимости проводимости от температуры будет стабилизация флуктуаций, а для слабопроводящих — формирование токовых шнуров вдоль оси z.

Сравнительный анализ величины инкрементов перегревной неустойчивости при одинаковой форме частиц показывает, что эффективность образования шнуров тока на проводящих частицах в точках ($x = y = 0$, $z = \pm c$) выше, чем на диэлектрических в точках ($z = 0$). Поэтому для инициирования электрического разряда в жидкостях с возрастающей зависимостью электрической проводимости от температуры (например,

водопроводная или морская [15] вода) предпочтительно использовать хорошо проводящие частицы, вытянутые вдоль электрического поля.

В заключение отметим, что с ростом вытянутости частиц вдоль поля, т. е. параметра c/a, согласно (16), увеличивается величина порогового значения волнового вектора. С другой стороны, величина $1/k_{\perp}^{*}$ ограничена характерным размером неоднородностей. Примем, что для сфероидальных включений $1/k_{\perp}^{*} \leqslant 0{,}1a$. Тогда с учетом зависимости поля $E_{1z}(x = y = 0,\ z = +c)$ от c/a в окрестности идеально проводящих включений $(E_{1z}(x = y = 0,\ z = +c) \approx 3E_{1z}(\infty)(c/a)^{5/4}$ при $1 \leqslant c/a \leqslant 10)$ условие ограничения на величину диаметра включений a принимает вид

$$a \geqslant \frac{10}{3E_{1z}(\infty)\,(c/a)^{5/4}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial T}\Big|_{T=T_0}}}. \tag{21}$$

В случае воды, для которой величина $\lambda \approx 0{,}6$ Вт/(м·К), а $\partial\sigma/\partial T\,|_{T=T_0}$ при $T_0 = 293$ К, согласно [15], составляет 0,02 $\text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$, оценка для a при $c/a = 1$, $E_{1z}(\infty) = 1$кВ/см соответствует $\approx 2{,}6\cdot10^{-4}$ м и имеет, согласно (21), тенденцию к уменьшению при росте $E_{1z}(\infty)$, c/a и уменьшении λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скринов В. П.** Метастабильная жидкость. М.: Наука, 1972.
2. **Спирин Г. Г., Черезов А. Н.** Ударное вскипание жидкости около импульсного источника.— ТВТ, 1981, т. 19, № 2.
3. **Шейхалиев Ш. М.** Определение температуры перегрева жидкого металла, содержащего включение.— ТВТ, 1982, т. 20, № 3.
4. **Раковский Г. Б.** Математическая модель формирования пробоя в проводящих жидкостях.— В кн.: Физико-механические процессы при высоковольтном разряде в жидкости. Киев: Наукова думка, 1980.
5. **Раковский Г. Б.** Развитие неустойчивостей в начальной стадии формирования электрического разряда в проводящей жидкости.— В кн.: Электрические устройства и аппаратура электрогидроимпульсных установок. Киев: Наукова думка, 1982.
6. **Филиппов М. В.** Взвешенный слой ферромагнитных частиц и действие на него магнитного поля.— В кн.: Прикладная магнитогидродинамика. Рига: Изд-во АН ЛатвССР, 1961, № 12.
7. **Волков В. Н., Митькин Ю. А.** Образование мостиков в жидкости, помещенной в электрическое поле.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1973, № 3.
8. **Игнатов В. В., Малышев Ю. А., Чумак Г. М.** Об использовании структурированных магнитным полем ферросуспензий в электрогидравлике.— В кн.: Тез. докл. II Всесоюз. конф. по электрическому разряду в жидкости. Киев: Наукова думка, 1980.
9. **Тонконогов М. П., Ким С. В., Ушаков В. Я.** Особенности импульсного электрического пробоя суспензий. I. Поляризационный механизм пробоя.— ЭОМ, 1970, № 5.
10. **Тонконогов М. П., Ким С. В., Ушаков В. Я.** Особенности импульсного электрического пробоя суспензий. II. Влияние параметров волны напряжения, крупности и распределения твердой фазы.— ЭОМ, 1970, № 6.
11. **Резцов В. Ф.** Об эффекте неоднородной локализации электрического поля и тока на неоднородностях в скрещенных E и H полях.— ЖТФ, 1981, т. 51, № 4.
12. **Резцов В. Ф.** О локализации джоулева тепловыделения и температуры на неоднородностях в изотропных и анизотропных средах.— ТВТ, 1980, т. 18, № 2.
13. **Резцов В. Ф.** О локализации джоулева тепловыделения на неоднородностях в скрещенных электрических и магнитных полях.— ТВТ, 1981, т. 19, № 6.
14. **Ковалевский А. Ф.** О влиянии относительной проводимости и формы неоднородностей на характер концентрации поля, тока и джоулева тепловыделения в гетерогенных проводящих средах.— ЖТФ, 1983, т. 53, № 6.
15. **Крутецкий И. В.** Электромагнитные поля и волны в морской среде. Л.: Судостроение, 1982.

Поступила 26/IX 1983 г.