

по расстоянию от места ввода частицы до места воспламенения и скорости частицы, которая считалась меняющейся от нуля в месте выдачи до скорости горячей частицы в месте воспламенения. Результаты измерений приведены в табл. 2.

Указанные в таблице значения объемной концентрации водяного пара в среде оставались практически постоянными в течение всего времени жизни частицы. Температура менялась сравнительно мало, только в течение периода задержки воспламенения. Процесс горения проходил при переменной температуре среды. Последняя менялась от значений, указанных в таблице, до  $800\text{--}1000^\circ\text{C}$ . Нет оснований ожидать, что время горения существенно зависит от температуры среды.

Интересно, что время индукции заметно меньше времени горения. Зависимость того и другого времени от начального диаметра слабее квадратичной.

*Поступила в редакцию  
12/VIII 1968*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Friedman, A. Масек. Combustion and Flame. 1962, 6.
2. М. А. Гуревич, Б. И. Сотниченко. Тр. ЛПИ, вып. 280, 1967.
3. Д. А. Гордон. Сб. «Исследование ракетных двигателей на твердом топливе», М., 1963.
4. Т. Бржустовский, И. Глассмен. Сб. «Гетерогенное горение». М., «Мир», 1967.

УДК 536.46+532.517.2

#### НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ГОРЕНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА

*Л. Ю. Артюх, Л. А. Вулис, В. П. Кашкарор*

*(Алма-Ата)*

1. При гетерогенном горении, каталитических реакциях, взаимодействии высокоскоростных потоков с твердыми телами значения температуры и концентрации на поверхности устанавливаются в результате сложного взаимодействия процессов переноса импульса энергии и вещества. Использование уравнений теплового режима горения [1] в качестве граничных условий для уравнений пограничного слоя не только позволяет найти значения температуры и концентрации на поверхности, где протекает с конечной скоростью химическая реакция, но и установить пределы устойчивого режима гетерогенного горения [2, 3] при изменении параметров потока. Сочетание уравнений теплового режима с аналитическим решением уравнений пограничного слоя оказывается весьма полезным и в том отношении, что дает возможность получения обзримых результатов во всей области изменения этих параметров. В исследованиях по гетерогенному горению [4, 5] не рассматривается

температурная зависимость константы скорости химической реакции  $k$  в связи с этим предполагается, что процесс лимитируется диффузией. Однако сильная зависимость кинетических свойств от температуры весьма существенно влияет на тепловой режим процесса.

Ниже приводится графоаналитическое решение двух задач: а) о гетерогенной экзотермической реакции на диске, вращающемся в свободном пространстве, б) о гетерогенном горении пластины в случае плоского течения Куэтта. Как и в [2, 3] основное внимание в настоящем сообщении уделяется тепловому режиму гетерогенной реакции. Исследование проводится при следующих основных допущениях, которые, не имея принципиального значения, значительно упрощают решение: а) процесс во времени считается установившимся, б) скорость распространения фронта горения в теле и изменение свойств поверхности с образованием шлаков не учитываются, в) термодиффузия не рассматривается.

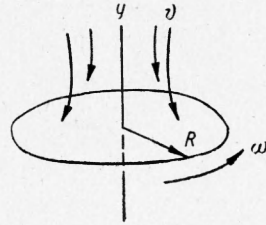


Рис. 1. Система координат для вращающегося диска;  $\omega$  — угловая скорость вращения диска.

2. Задача о химической реакции на вращающемся диске (рис. 1) представляет интерес, например, в связи с исследованием кинетики химических реакций с помощью дискового электрода. Решения точных уравнений движения, энергии и диффузии в предположении о постоянстве температуры и концентрации на поверхности, позволяющие найти распределение скорости температуры и концентрации во всем объеме вязкой несжимаемой жидкости, хорошо известны [6, 7]:

$$\frac{\Gamma(\zeta) - \Gamma(0)}{1 - \Gamma(0)} = \frac{I_1(\zeta)}{I_1(\infty)}, \quad (1)$$

$$\frac{z_i(\zeta) - z_i(0)}{1 - z_i(0)} = \frac{I_2(\zeta)}{I_2(\infty)}, \quad (2)$$

здесь 
$$I_1(\zeta) = \int_0^\zeta \left\{ \exp \left[ \text{Pr} \int_0^\zeta H(\zeta) d\zeta - \sum_i \text{Le}_i c_{i\infty} z_i \right] \right\} d\zeta;$$

$$I_2(\zeta) = \int_0^\zeta \left\{ \exp \left[ \text{Sc} \int_0^\zeta H(\zeta) d\zeta \right] \right\} d\zeta;$$

$\zeta = y \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  — безразмерная координата;  $H = \frac{v}{\sqrt{\omega \nu}}$  — безразмерная осевая скорость;  $\Gamma = \frac{T}{T_\infty}$ ,  $z_i = \frac{c_i}{c_{i\infty}}$  — соответственно безразмерные температура и концентрации;  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Для определения температуры и концентрации на поверхности диска  $\Gamma(0)$  и  $z_i(0)$  воспользуемся этими решениями и уравнением теплового режима на поверхности

$$\left( \lambda \frac{dT}{dy} \right)_w + \left[ \sum_i \rho C_{p_i} \left( T - \frac{h_i^0}{C_{p_i}} \right) D_i \frac{dc_i}{dy} \right]_w = q, \quad (3)$$

$$\left( \rho D_i \frac{dc_i}{dy} \right)_w = (\rho c_i)^m K_i(T_w).$$

Здесь  $q$  — тепло, отводимое с поверхности, например, в тело, а также излучением;  $h_i^0$  — энтальпия образования  $i$ -го элемента;  $m$  — порядок

реакции по концентрации;  $K_i(T_w)$  — константа скорости реакции, зависящая от температуры по закону Аррениуса,

$$K_i(T_w) = k_{i0} \exp(-E/RT). \quad (4)$$

Уравнения (3) отвечают течению без потока вещества с поверхности, например, в случае каталитической гетерогенной реакции.

Подставляя в новых переменных решения (1) и (2) в уравнения (3), получим уравнение теплового режима на поверхности в виде:

$$\frac{1 - \Gamma(0)}{I_1} + \sum_i c_i \text{Le}_i \frac{1 - z_i(0)}{I_2} \left[ \Gamma(0) - \frac{h_i^0}{C_{p_i} T_\infty} \right] = \frac{q \text{Pr}}{\rho C_{p_i} T_\infty \sqrt{\omega \nu}},$$

$$\frac{1 - z_i(0)}{I_2} = \frac{\text{Sc}_i}{\sqrt{\omega \nu}} (\rho c_{i\infty})^{m-1} z_i(0) k_{i0} \exp \left[ -\frac{E_i}{RT_\infty} - \frac{1}{\Gamma(0)} \right].$$

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать двухкомпонентную систему.

Введем, как это сделано в [1], безразмерные параметры, сохранив за каждым название основной физической величины

$$\varphi = 1 - z(0) \quad (5)$$

— полнота сгорания,

$$\tau = \frac{k_0 \text{Sc} I_2 (\rho c_\infty)^{m-1}}{\sqrt{\omega \nu}} \quad (6)$$

— отношение физического времени (пребывания) ко времени химического процесса,

$$\vartheta = \frac{(-h^0) I_1 \text{Rc}_\infty \text{Le}}{E C_p I_2} \quad (7)$$

— теплотворная способность реакции,  $\Theta = \frac{RT}{E}$  — безразмерная температура, отнесенная к энергии активации  $E$ ,

$$Q = \sigma \tau \Theta^4(0) \quad (8)$$

— отвод тепла с поверхности излучением,  $\sigma$  — безразмерный коэффициент теплоотдачи излучением. Окончательно система двух последних уравнений сведется к виду:

$$\frac{\varphi}{\varphi + (1 - \varphi)^m} = \frac{\tau}{\tau + \exp\left(\frac{1}{\Theta(0)}\right)}, \quad (9a)$$

$$\varphi = \frac{\Theta(0) - \Theta(\infty) + Q}{\vartheta - c_\infty \text{Le} \Theta(0) \frac{I_1}{I_2}}. \quad (9b)$$

Второй член в знаменателе выражения (9b) учитывает диффузионный отвод тепла с поверхности, который несколько уменьшает значение эффективной теплотворной способности реакции.

Решение системы (9) в плоскости  $\varphi - \Theta$  можно найти графически. Учитывая области изменения параметров:  $0 \leq \varphi \leq 1$ ;  $0 < \Theta$ ,  $\Theta < 0,25$ ;  $\tau \sim 10^n$ ,  $n > 1$ , проведем качественный анализ результатов решения в зависимости от значения этих параметров. На рис. 2, а, б представле-

на зависимость  $\varphi(\Theta)$ , рассчитанная по (9а) при различных значениях  $m$  и  $\tau$ . Из графиков видно, что с ростом порядка реакции  $m$  полнота выгорания при одних и тех же условиях реакции повышается. Увеличение параметра  $\tau$  (увеличение времени диффузии или возрастание константы скорости реакции) смещает процесс в область меньших температур. Кривые  $\varphi(\Theta)$  на рис. 2, в, построенные по (9б), представляют собой параболы, пересекающие ось  $\varphi=0$  в точке  $\Theta = \Theta_{\infty}$ .

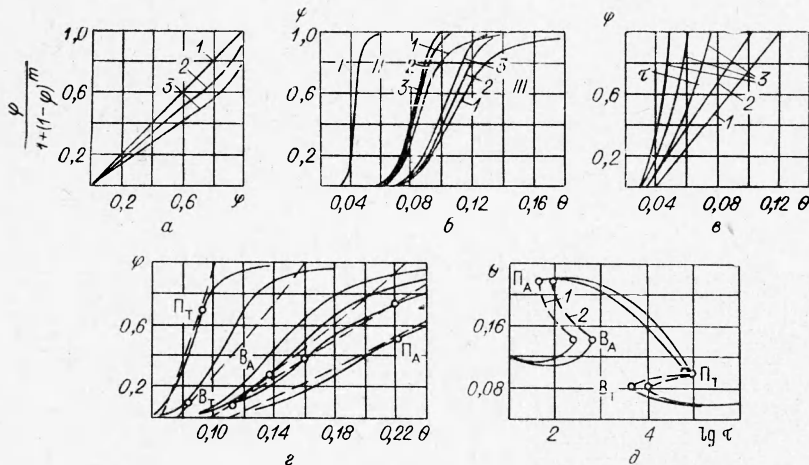


Рис. 2. Пример решения уравнений теплового режима на поверхности реагирующего диска.

а — влияние порядка реакции на полноту выгорания; 1 —  $m=1$ , 2 —  $m=1/2$ , 3 —  $m=1/4$ ; б — кривые зависимости  $\varphi(\Theta)$  (уравнение (9а)): I —  $\tau=10^{10}$ , II —  $\tau=10^5$ ; III —  $\tau=10^4$ ; 1 —  $m=1$ , 2 —  $m=1/2$ , 3 —  $m=1/4$ ; в — линии теплового баланса (уравнение (9б)): 1 — без теплоотвода ( $Q=0$ ) и диффузионного потока тепла, 2 — с учетом диффузионного потока тепла с поверхности, 3 — с учетом излучения с поверхности (при  $\tau=10^4, 10^5$  и  $10^{10}$  соответственно); г — графическое решение уравнений (9) при изменении параметра  $\tau$ ,  $B_A$  и  $B_T$  — адiabатная и теплообменная точки воспламенения соответственно,  $P_A$  и  $P_T$  — точки потухания;

д — зависимость температуры поверхности реагирующего диска от времени  $\tau \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}$  (скорости вращения): 1 —  $m < 1$ , 2 —  $m = 1$ .

Пересечения кривых (9а) и (9б) определяют возможные стационарные решения задачи. Как известно [1], возможны три решения; одно из них, соответствующее средней точке пересечения, неустойчиво. В области низких температур каждому значению  $\Theta_{\infty}$  при заданных  $\vartheta$  и  $\tau$  отвечает только одно пересечение кривых (9а) и (9б), что соответствует нижнему стационарному режиму — окислению. При постепенном возрастании температуры  $\Theta_{\infty}$  точка пересечения будет вначале плавно перемещаться по кривой (9а) вплоть до точки «В» (воспламенение), а затем скачком перейдет на верхний режим с большим значением  $\varphi$  и  $\Theta$ . Если же теперь плавно уменьшать температуру  $\Theta_{\infty}$ , то точка пересечения по кривой (9а) будет снижаться вплоть до некоторой точки «П» (потухание), при этом проявляется некоторая инерционность процесса:  $\Theta_{\infty П} < \Theta_{\infty В}$ , тогда как  $\Theta_{0 П} > \Theta_{0 В}$ ,  $\varphi_{0 П} > \varphi_{0 В}$ .

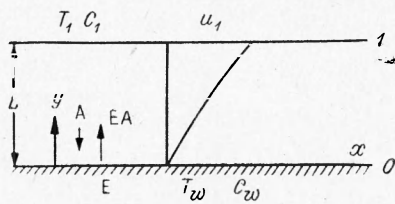
Решение уравнений (9) зависит от параметров  $\tau$ ,  $\vartheta$  и  $Q$ , которые могут изменяться при изменении скорости вращения диска  $\omega$ , температуры окружающей среды  $\Theta_{\infty}$ , свойств среды.

Рассмотрим тепловой режим поверхности вращающегося диска с учетом излучения при различных значениях  $\omega$  (уравн. (8)). В этом

случае [1] возможны две пары критических точек «воспламенение — потухание». Если на поверхности диска уже протекает реакция в диффузионной области, то уменьшение скорости вращения вызывает уменьшение конвективного подвода вещества, что приведет к снижению скорости реакции и к уменьшению при этом выделяющегося тепла. Начиная с некоторого  $\omega_{\text{ПТ}}$ , теплоотвод излучением превысит тепловыделение за счет реакции и произойдет потухание. Если же увеличивать скорость вращения диска, на котором протекает интенсивная реакция, то возрастание конвективного подвода вещества, начиная с некоторого значения  $\omega_{\text{ПА}}$ , приведет к увеличению конвективного отвода тепла, что также вызовет срыв реакции (точка  $\text{П}_A$  рис. 2, б).

Заметим, что в приближении теории пограничного слоя решение можно обобщить на течение сжимаемого газа у вращающегося диска или конуса [8]. Если учесть при этом аэродинамический нагрев поверхности при большой скорости вращения, то появляется третья пара критических точек «воспламенение — потухание», вызванная нагревом поверхности вследствие теплоты трения.

Рис. 3. Течение Куэтта. Система координат.



3. Течение Куэтта — один из немногих численных примеров, допускающих точное решение уравнений Навье-Стокса.

Неизменность параметров в направлении течения приводит к значительным упрощениям. Однако в этом простом случае воспроизводятся многие характеристики пограничного слоя. Так, течение в ламинарном подслое турбулентного пограничного слоя подобно течению Куэтта.

Пусть на неподвижной поверхности происходит гетерогенная экзотермическая реакция, сопровождаемая уносом вещества с поверхности (рис. 3). Уравнения, описывающие поля скорости, температуры и концентрации (для химически замороженного в объеме течения), в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho v \frac{du}{dy} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \rho v \frac{dv}{dy} &= -\frac{1}{\text{Re}} \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{dv}{dy} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ &\frac{d}{dy} (\rho v) = 0, \\ \rho v \frac{d\Gamma}{dy} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{d}{dy} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{d\Gamma}{dy} \right) + (\alpha - 1) M_1^2 \text{Re Pr} \times \\ &\times \left[ \frac{\mu}{\text{Pr}} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right], \\ \rho v \frac{dc_i}{dy} &= \frac{d}{dy} \left( \frac{\mu}{\text{Sc}} \frac{dc_i}{dy} \right). \end{aligned}$$

Здесь все переменные отнесены к их значениям на внешней поверхности. Для простоты рассмотрим случай несжимаемого газа, состоящего из двух компонент. Решение этих уравнений легко найти интегрированием:

$$u = \frac{\exp(qy) - 1}{\exp(q) - 1} \left\{ 1 + \frac{\Phi}{q^2} [\exp(q) - 1 - q] \right\} - \frac{\Phi}{q^2} [\exp(qy) - 1 - qy], \quad (10)$$

$$v \operatorname{Re} = q = \text{const}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_w + \frac{\exp(\operatorname{Pr} qy) - 1}{\exp(\operatorname{Pr} q) - 1} \left\{ 1 - \Gamma_w + \frac{1}{\operatorname{Pr} q} \left[ \exp(\operatorname{Pr} q) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^1 F(y) \exp(-\operatorname{Pr} qy) dy - \int_0^1 F(y) dy \right] \right\} - \\ - \frac{1}{\operatorname{Pr} q} \left[ \exp(\operatorname{Pr} qy) \int_0^y \exp(-\operatorname{Pr} qy) dy - \int_0^y F(y) dy \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$z = z_w + \frac{\exp(\operatorname{Sc} qy) - 1}{\exp(\operatorname{Sc} q) - 1} (1 - z_w). \quad (13)$$

Здесь дополнительно введены следующие обозначения:  $\Pi = \frac{p}{\rho_1 u_1^2}$ ,

$$\Phi = -\operatorname{Re} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F = (x-1) M_1^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \Phi \right].$$

Для определения значений  $\Gamma_w$ ,  $z_w$  и  $q$  воспользуемся уравнениями сохранения тепла и вещества на поверхности.

Пусть элемент вещества А подходит к поверхности, состоящей из вещества Е, и образующийся в результате гетерогенной реакции продукт ЕА отходит от нее. Если для химического элемента А поверхность является непроницаемой, то его поток во всех соединениях равен нулю:

$$\rho v (z_A + n_1 z_{EA})_w - \rho D \left( -\frac{dz_A}{dy} + n_1 \frac{dz_{EA}}{dy} \right)_w = 0, \quad (14)$$

Здесь  $n_1$  — масса элемента А, приходящаяся на 1 г, соединения ЕА. Суммарный поток элемента Е (во внешнем течении он отсутствует) равен результирующему массовому потоку с поверхности

$$\rho v = \rho v (z_{EA}) n_2 - \rho D \left( \frac{dz_E}{dy} \right) n_2. \quad (15)$$

Здесь  $n_2$  — масса элемента Е в 1 г соединения ЕА.

Исключая  $z_{EA}$  из уравнений (14) и (15), получим выражение массового потока на поверхности через концентрацию компонента А

$$\rho \vartheta = \frac{\rho D}{n + z_w} \left( \frac{dz}{dy} \right)_w \quad (16)$$

(в дальнейшем значок А у концентрации  $z_A$  опускается)  $n = \frac{n_1}{n_2}$  — доля элемента А, расходуемая на образование соединения ЕА.

Запишем теперь условие сохранения компонента А

$$-\rho D \left( \frac{dz}{dy} \right)_w + K(z_w, T_w) + \rho v z_w = 0, \quad (17)$$

где

$$K(z_w, T_w) = k_0 z_w \exp(-E/RT_w).$$

Заменив в (17) значение  $\rho v$  из (16)

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_w \frac{n}{n+z_w} = k_0 z_w \exp(-E/RT_w).$$

Введем, как и в предыдущей задаче безразмерные величины  $\varphi = 1 - \frac{z_w}{z_1}$ ,  $\Theta = \frac{RT}{E}$ ,  $\tau_0 = \frac{k_0 L Sc}{\mu}$  и подставим их в последнее уравнение вместе с решением (13). Тогда получим

$$\varphi = \frac{\tau}{\tau + \exp\left(\frac{1}{\Theta_w}\right)}, \quad (18)$$

где

$$\tau = \frac{\tau_0}{q Sc} [\exp(q Sc) - 1].$$

Безразмерный массовый поток на поверхности

$$q = \frac{v L}{\nu} = -\frac{1}{Sc} \ln\left(1 - \frac{z_1}{z_1 + n} \varphi\right), \quad (19)$$

как нетрудно показать, меньше единицы.

Рассмотрим уравнение теплового баланса на адиабатической поверхности, учитывая, что химическая реакция протекает с конечной скоростью

$$\left(\lambda \frac{dT}{dy}\right)_w + \frac{1}{n} h^0 K(T_w, z_w) - \rho v h_w = 0. \quad (20)$$

Перейдем в последнем уравнении к безразмерным величинам. Подставляя сюда выражение (12) для  $\Gamma$ , получаем после преобразований

$$\varphi = \frac{\Theta_w - \Theta_e}{\vartheta}. \quad (21)$$

Для удобства анализа здесь введены следующие обозначения:

$$\vartheta = \frac{\exp(\text{Pr } q) - 1}{\exp(Sc q) - 1} \frac{1}{\left[1 + \frac{z_1}{n} (1 - \varphi)\right]} \left(\vartheta_0 - \frac{z_1}{n} \Theta_w\right); \quad (22)$$

$$\vartheta_0 = \frac{-h^0 z_1 R}{n C_p E}$$

безразмерная теплотворность реакции,  $\Theta_e$  — температура торможения внешнего потока, которая при  $\Phi=0$  равна

$$\Theta_e = \Theta_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right). \quad (23)$$

Кривые, рассчитанные по уравнению (21), в координатах  $\varphi = \Theta$  имеют вид парабол, наклон которых и пересечение с осью  $\varphi=0$  зависят от значений параметров  $\vartheta$ ,  $\Theta_e$ , определяемых, в свою очередь, как это видно из (22) и (23), температурой поверхности  $\Theta_w$  и полнотой выгорания  $\varphi$ . Как можно заметить из (21) и (23), с ростом скорости потока  $M_1$  температура поверхности вследствие аэродинамического нагрева повышается.

На рис. 4 в качестве примера приводится решение уравнений (18) и (21) для химической реакции горения на поверхности графита. Во внимание принималось только горение до СО; другие реакции, в том числе диссоциация и рекомбинация, не учитывались. Кинетические свойства графита взяты из [1, 9]. На рис. 4, б прямая 1 показывает изменение

температуры негорящей поверхности с увеличением температуры торможения в набегающем потоке, а линия 2 характеризует влияние выделяющегося тепла при горении на температуру поверхности, когда массовый поток с поверхности не учитывается. В области относительно низких температур горение лимитируется кинетическими свойствами реакции, наблюдаются явления воспламенения и потухания, связанные с аэродинамическим нагревом поверхности. Массовый поток, обусловленный горением, несколько снижает температуру поверхности, затрудняет воспламенение и способствует потуханию (линия 3). Отметим, что при определенных условиях течения, например при другом давлении, возможно бескризисное изменение температуры поверхности с ростом скорости потока.

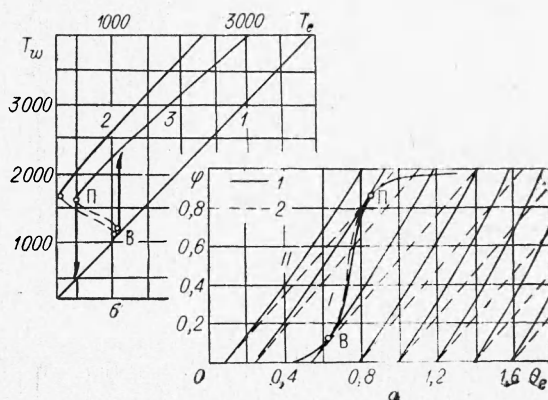


Рис. 4. Течение Куэтта на горячей углеродной пластинке.

а — решение уравнений теплового режима горения: 1 — уравнение (18),  $1g \tau = 5,87$ , II — уравнение (21),  $v = 0,85$ ,  $1 - v_w > 0$ , 2 —  $v_w = 0$  (B — воспламенение, П — потухание);

б — зависимость температуры горячей графитовой пластины от температуры торможения потока:

1 —  $\theta_{wm} = \theta_e$ , 2 —  $\theta_{wm} = \theta_e + \vartheta$  (без уноса вещества

с поверхности), 3 —  $v_w > 0$ ,  $\theta_{wm} = \frac{\theta_e + \vartheta}{1 + \frac{z_1}{n}}$  (с учетом

массового потока с поверхности).

Поступила в редакцию  
12/VIII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вулис. Тепловой режим горения. М.—Л., Госэнергоиздат, 1954.
2. Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров. Сб. «Третье Всесоюзное совещание по теории горения». Т. II. М., изд. АН СССР, 1960.
3. Л. Ю. Артюх, Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров. Инж.-физ. ж., 1961, IV, 3.
4. Ф. С. Завелевич. Механика жидкости и газа, 1961, 1.
5. В. В. Щенников. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, 5.
6. Л. А. Дорфман. Гидродинамическое сопротивление и теплопередача вращающихся тел. Физматгиз, 1960.
7. В. Г. Левич. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
8. Л. Ю. Артюх. В сб. «Математика и физика», т. 2. Алма-Ата, 1966.
9. Сб. «Процессы горения». М., Физматгиз, 1961.