

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГОГО, УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО
И ЗАПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЙ МАССИВА ПОРОД
ВБЛИЗИ ВЫРАБОТОК ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ НА ИХ ГРАНИЦАХ**

А. И. Чанышев^{1,2}, И. М. Абдулин¹

¹*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,*

E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

²*Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская, 56, 630099, г. Новосибирск, Россия*

Решена задача об определении напряженно-деформированного состояния окрестности контура выработки произвольной формы по данным измерений на нем вектора напряжений Коши и вектора перемещений. Рассмотрены состояния упругости, пластичности, запредельного деформирования. Полученные результаты позволяют устанавливать в экспрессном режиме ресурсные возможности сопротивления массива пород разрушению на контуре как в заглубленной выработке, так и в условиях открытых горных работ.

Напряжения, деформации, смещения, упругость, пластичность, запредельное деформирование

DOI: 10.15372/FTPRPI20190404

Все деформируемые материалы подчиняются при нагружениях определенным законам, например, закону Гука в упругости [1–3], уравнениям Прандтля–Рейсса [4–6] в пластичности (также существуют закономерности поведения материалов при запредельном деформировании [7, 8]). При этом неважно где находится материал — он во всех случаях удовлетворяет этим уравнениям. Далее, в законах деформирования и разрушения материалов выделяются паспортные зависимости — характеристические кривые (прямые), не зависящие от вида нагружения и истории нагружения (одной из них является “единая” кривая [9]). Эти кривые отвечают за ресурс прочности материала, т. е. находясь в какой-либо точке характеристической кривой, возможно ответить на вопрос сколько осталось существовать данному материалу при заданном нагружении до полного разрушения. Будем считать, что уравнения вышеуказанных состояний для взятой горной породы известны.

Еще один вопрос, волнующий исследователей, возможно ли, не решая задачи, ответить, в каком состоянии находится массив пород вблизи контура выработки. Это важно в связи с безопасным проведением горных работ и оптимизацией разрушения горных пород. Уместно отметить экспериментально-аналитический метод, развиваемый в Институте горного дела СО РАН с 70–80 гг. XX в. и связанный с определением смещений на контуре выработок. В [10–13] по измеряемым смещениям определялось напряженно-деформированное состояние массива пород на основе решения 2-й или 3-й краевой задачи механики деформируемого твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-05-00757).

Исследуем ситуацию, когда на одном и том же контуре задаются одновременно вектор напряжений Коши и вектор перемещений, т. е. когда кроме заданных перемещений на границе учитываются заданные напряжения. В [14] граничная задача подобного типа рассматривалась при отыскании упругопластической границы в массиве горных пород вокруг кругового отверстия по данным о напряжениях, приложенных к его контуру, и радиальной компоненте вектора смещений без отыскания напряженно-деформированного состояния в упругой области.

Цель настоящей работы — определение напряженно-деформированного состояния массива пород вблизи контура выработки по указанным переопределенным данным на ее границе в случае упругости, пластичности и запредельного деформирования.

Отметим, что задачи подобного вида для определения напряженно-деформированного состояния всего массива пород решались в [15–20] на основе решения обратных задач для упругой и вязкоупругой моделей с анализом устойчивости полученных решений, где смещения измерялись не на всем контуре выработки, а на его части, и не все смещения, а только их часть. Известно, что в подземной выработке можно измерить: конвергенции стенок (реперные станции); приращения смещений (лазерный дальномер или аналогичное устройство), вызванные какими-либо воздействиями на породный массив. Казалось бы, не существует технической возможности получить абсолютные смещения и, тем более, напряжения на контуре скважины, если не иметь ввиду метод разгрузки [11] (разгружать можно скважину с наперед заданной геометрией ее границы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНТУРА ВЫРАБОТКИ

Пусть контур горной выработки L в системе координат xOy имеет параметрические уравнения $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s — длина дуги. На рис. 1 показаны дуга L , нормаль \vec{n} и касательная \vec{t} . Положительное направление на L принимается от A к B [3].

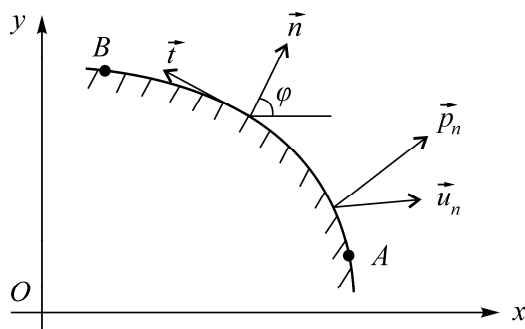


Рис. 1. На дуге AB , представляющей собой часть контура L горной выработки, заданы одновременно вектор напряжений \vec{p}_n и вектор смещений \vec{u}_n

Из рис. 1 следует, что направляющие косинусы нормали \vec{n} и касательной \vec{t} связаны соотношениями:

$$\cos(n, x) = \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\cos(t, x) = -\frac{dx}{ds},$$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, t — положительное направление касательной [3, 4].

На границе L предполагаются одновременно заданными вектор смещений $\vec{u}_n = (u, v)$ и напряжений $\vec{p}_n = (\sigma_n, \tau_n)$. Рассматривая дифференциалы смещений u, v , имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (1)$$

Поделив (1) на ds , найдем производные u'_s, v'_s , представленные известными функциями s , а также зависимости:

$$\begin{aligned} u'_s &= -\varepsilon_x \sin \varphi + (\varepsilon_{xy} - \omega_z) \cos \varphi, \\ v'_s &= -(\varepsilon_{xy} + \omega_z) \sin \varphi + \varepsilon_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\cos \varphi = dy / ds$, $\sin \varphi = -dx / ds$.

К системе (2) добавим соотношения [4, 5]:

$$\begin{aligned} \vec{p}_n \cdot \vec{n} &= \sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \vec{p}_n \cdot \vec{t} &= \tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений для нахождения деформаций $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$, $(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2$, ε_{xy} и компоненты вектора поворота ω_z , используем систему уравнений теории упругости. Для плоской деформации

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2k}, \quad \varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\mu}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2\mu}, \quad (4)$$

где $2\mu = E / (1 + \nu)$, $2k = E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Подставляя (4) в (3), имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y)k + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\mu \cos 2\varphi + 2\mu\varepsilon_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_n &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\mu \sin 2\varphi + 2\mu\varepsilon_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (3), (5) является полной для определения на контуре L всех деформаций и компоненты вектора поворота ω_z . Приведем ее решение. Определитель системы (3), (5) равен

$$\Delta = \mu(k + \mu). \quad (6)$$

Из (6) следует, что система (3), (5) имеет всегда единственное решение ($\Delta \neq 0$), при этом

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} &= \frac{1}{k + \mu} \left[\mu(v'_s \cos \varphi - u'_s \sin \varphi) - \frac{\sigma_n}{2} \right], \\ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} &= \frac{\sigma_n \cos 2\varphi}{2(k + \mu)} - \frac{\tau_n \sin 2\varphi}{2\mu} + \frac{(u'_s \sin \varphi - v'_s \cos \varphi)k\mu \cos 2\varphi}{\mu(k + \mu)}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_n \sin 2\varphi}{2(k + \mu)} + \frac{\tau_n \cos 2\varphi}{2\mu} + \frac{(u'_s \sin \varphi - v'_s \cos \varphi)k\mu \sin 2\varphi}{\mu(k + \mu)}, \\ \omega_z &= \frac{\tau_n}{2\mu} - (u'_s \cos \varphi + v'_s \sin \varphi). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

В приведенном решении от смещений u, v в прямоугольной декартовой системе координат xOy перейдем к смещениям u_n, u_t , связанным с базисом \vec{n}, \vec{t} : $u_n = u \cos \varphi + v \sin \varphi$, $u_t = -u \sin \varphi + v \cos \varphi$ (рис. 1). Тогда решение (7) упрощается:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{k + \mu} \left[\mu u'_t - \frac{\sigma_n}{2} \right], \\ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = -\frac{u'_t k \cos \varphi}{k + \mu} + \frac{\sigma_n \cos 2\varphi}{2(k + \mu)} - \frac{\tau_n \sin 2\varphi}{2\mu}, \\ \varepsilon_{xy} = -\frac{u'_t k \sin \varphi}{k + \mu} + \frac{\sigma_n \sin 2\varphi}{2(k + \mu)} + \frac{\tau_n \cos 2\varphi}{2\mu}, \quad \omega_z = \frac{\tau_n}{2\mu} - u'_n. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) следует, что для выработки, свободной от напряжений ($\sigma_n = \tau_n = 0$), максимальная сдвиговая деформация равна

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \frac{|u'_t|k}{k + \mu}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНТУРА ВЫРАБОТКИ

Рассмотрим более сложную ситуацию. На рис. 2 показана область упругого состояния массива пород, примыкающая к дуге *AB*, и область идеально-пластического состояния, — к дуге *BC* (упругопластическая задача с неполным охватом пластической зоной контура цилиндрической выработки решалась в [21]). На границе *AB* материал деформируется упруго, на *BC* — пластически. Для обозначения упругости и пластичности введем характеристическую функцию, не зависящую от вида и характера нагружения, т. е. кривую “жизни” материала. Для определенности примем ее в виде зависимости $\tau_{\max} \sim \gamma_{\max}$, исходя из которой на дуге *AB* контура L $0 \leq \Gamma < \Gamma_s$, на дуге *BC* $\Gamma = \Gamma_s$, $\Gamma \geq \Gamma_s$ (рис. 3). По данным смещений на дуге *BC* требуется найти ее состояние.

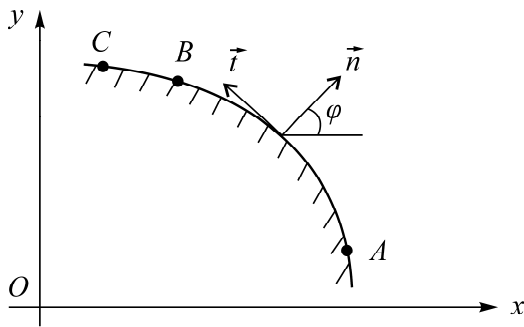


Рис. 2. На границе *AB* контура выработки *L* материал деформируются упруго, на участке *BC* находится в идеально-пластическом состоянии

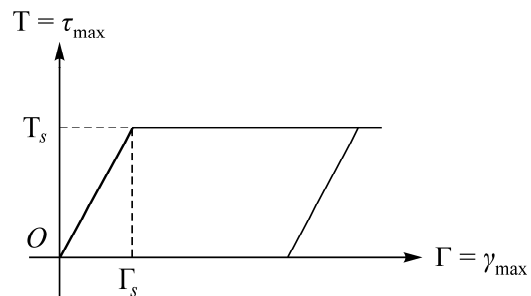


Рис. 3. Диаграмма деформирования материала $\tau_{\max} \sim \gamma_{\max}$ в состоянии упругости $\Gamma < \Gamma_s$ и идеальной пластичности $\Gamma = \Gamma_s$, $\Gamma \geq \Gamma_s$

Для решения задачи имеем смещения $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, где $(x, y) \in BC$. Далее следуют соотношения (1), (2) и к ним добавляются (3). Теперь осталось привести соотношения идеальной пластичности [4, 5]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2k}, & \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \Gamma \cos 2\theta, & \varepsilon_{xy} = \Gamma \sin 2\theta, \\ \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \operatorname{tg} 2\theta, & \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = T_s \cos 2\theta, & \tau_{xy} = T_s \sin 2\theta. \end{cases} \quad (9)$$

Подстановка (9) в (2), (3) приводит к системе уравнений для определения неизвестных величин $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$, Γ , ω_z , θ :

$$\begin{cases} \sigma_n = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)k + T_s \cos 2(\theta - \varphi), \\ \tau_n = -T_s \sin 2(\theta - \varphi), \\ u'_s = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \sin \varphi + \Gamma \sin(2\theta - \varphi) - \omega_z \cos \varphi, \\ v'_s = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \cos \varphi - \Gamma \cos(2\theta - \varphi) - \omega_z \sin \varphi. \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы (10) находится следующим образом. Комбинируя третье и четвертое уравнения (10), находим

$$\begin{cases} \omega_z = \Gamma \sin 2(\theta - \varphi) - u'_s \cos \varphi - v'_s \sin \varphi = \Gamma \sin 2(\theta - \varphi) - u'_n, \\ \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = v'_s \cos \varphi - u'_s \sin \varphi + \Gamma \cos 2(\theta - \varphi) = \Gamma \cos 2(\theta - \varphi) + u'_t. \end{cases} \quad (11)$$

Рассматривая второе уравнение (10), вычислим

$$\sin 2(\theta - \varphi) = -\frac{\tau_n}{T_s}, \quad (12)$$

откуда получим угол θ , совпадающий с углом между первым направлением для тензора напряжений T_σ и осью x . Из (12) восстанавливается значение

$$\cos 2(\theta - \varphi) = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2(\theta - \varphi)} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_n}{T_s}\right)^2}. \quad (13)$$

Выражения для $\varepsilon_x + \varepsilon_y$ из (12) и $\cos 2(\theta - \varphi)$ из (13) подставляются в первое уравнение (10), откуда

$$\Gamma = \frac{\left[\frac{\sigma_n}{2} - k u'_t - \frac{T_s}{2} \cos 2(\theta - \varphi) \right]}{k \cos 2(\theta - \varphi)}. \quad (14)$$

Отметим, что решения (11)–(14) справедливы, если $T = T_s$ и $\Gamma > \Gamma_s$ (рис. 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ КОНТУРА ВЫРАБОТКИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ

Обобщим ситуацию, приведенную на рис. 1, на учет пластического деформирования при линейном упругом деформировании. Пусть контур выработки состоит из двух участков (рис. 2). На участке AB материал деформируется упруго, на BC — пластически. Диаграмма деформирования материала показана на рис. 4.

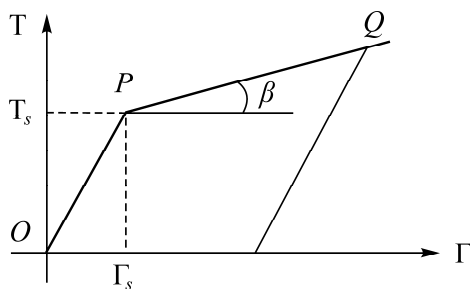


Рис. 4. Диаграмма деформирования материала, состоящая из звеньев OP и PQ . На OP происходит упругость, на PQ — пластичность (линейное упрочнение)

Требуется определить состояние массива пород вблизи участка BC по измеряемым на этой границе смещениям u и v . Для решения задачи имеем уравнения (1)–(3). Состояние линейного упрочнения на рис. 4 определим как $\operatorname{tg}\beta = (T - T_s) / (\Gamma - \Gamma_s) = 2\mu_p$, где $2\mu_p$ — модуль линейного упрочнения. Тогда

$$T = 2\mu_p\Gamma + (T_s - 2\mu_p\Gamma_s). \tag{15}$$

Запишем закон упругого изменения объема при плоской деформации $\varepsilon_x + \varepsilon_y = (\sigma_x + \sigma_y) / 2k$ и связи

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} &= 2\mu_p\Gamma \cos 2\theta + (T_s - 2\mu_p\Gamma_s) \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= 2\mu_p\Gamma \sin 2\theta + (T_s - 2\mu_p\Gamma_s) \sin 2\theta, \end{aligned} \tag{16}$$

вытекающие из (15) и зависимостей $(\sigma_x - \sigma_y) / 2 = T \cos 2\theta$, $\tau_{xy} = T \sin 2\theta$. Подстановка (16) в (3) приводит к следующей системе уравнений для вычисления $(\varepsilon_x + \varepsilon_y) / 2$, Γ , ω_z , θ :

$$\begin{cases} u'_s = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \sin \varphi - \Gamma \sin(2\theta - \varphi) - \omega_z \cos \varphi, \\ v'_s = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \cos \varphi - \Gamma \cos(2\theta - \varphi) - \omega_z \sin \varphi, \\ \sigma_n = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu_p\Gamma \cos 2(\theta - \varphi) + (T_s - 2\mu_p\Gamma_s) \cos 2(\theta - \varphi), \\ \tau_n = 2\mu_p\Gamma \sin 2(\theta - \varphi) + (T_s - 2\mu_p\Gamma_s) \sin 2(\theta - \varphi). \end{cases} \tag{17}$$

Комбинируя первое и второе уравнения (17), последовательно находим

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = u'_t + \Gamma \cos 2(\theta - \varphi), \\ \omega_z = -u'_n + \Gamma \sin 2(\theta - \varphi). \end{cases} \tag{18}$$

Для вычисления неизвестных величин Γ и θ с применением (18) третье и четвертое уравнения (17) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_n}{2} - ku'_t = (k + \mu_p)\Gamma \cos 2(\theta - \varphi) + \frac{(T_s - 2\mu_p\Gamma_s)}{2} \cos 2(\theta - \varphi), \\ \frac{\tau_n}{2} = \mu_p\Gamma \sin 2(\theta - \varphi) + \frac{(T_s - 2\mu_p\Gamma_s)}{2} \sin 2(\theta - \varphi). \end{cases} \tag{19}$$

Из второго уравнения (19) находим $\sin 2(\theta - \varphi)$ через Γ по формуле

$$\sin 2(\theta - \varphi) = \frac{\tau_n}{T_s + 2\mu_p(\Gamma - \Gamma_p)} \quad (20)$$

и через $\sin 2(\theta - \varphi)$ — значение $\cos 2(\theta - \varphi) = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2(\theta - \varphi)}$, подставив которое в первое уравнение (21), получим уравнение для нахождения Γ :

$$\sigma_n - 2ku'_t = \cos 2(\theta - \varphi)[2k\Gamma + T_s + (\Gamma - \Gamma_s)2\mu_p]. \quad (21)$$

Из (21) с применением (20) восстанавливается назначение Γ . Из (20) находится θ при известном Γ , далее из (20) — $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$, ω_z . Таким образом устанавливается напряженно-деформированное состояние точки на рассматриваемом участке контура выработки в случае линейного упрочнения. Для выработки, свободной от напряжений ($\sigma_n = \tau_n = 0$), из (20) следует, что

$$\theta = \varphi + \frac{\pi k}{2}, \quad \Gamma = \frac{\mp 2k u'_t - (T_s - 2\mu_p \Gamma_s)}{2(k + 2\mu_p)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА ПОРОД В ОКРЕСТНОСТИ КОНТУРА ВЫРАБОТКИ В СЛУЧАЕ ЗАПРЕДЕЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Пусть контур выработки разбит на участки: на первом материал находится в состоянии упругости, на втором — идеальной пластичности, на третьем — упрочнения, на четвертом — запредельного деформирования. По данным измерений смещений на контуре выработки необходимо определить напряженно-деформированное состояние массива пород в окрестности границы выработки. Первые три участка рассмотрены выше. На рис. 5 показана диаграмма запредельного деформирования $T = T(\Gamma)$, которое характеризуется падением сопротивления T деформированию с ростом максимального сдвига Γ .

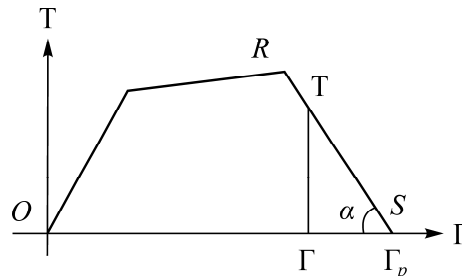


Рис. 5. Диаграмма деформирования материала с падением сопротивления T на участке RS с ростом максимального сдвига Γ

Сформулируем соотношения запредельного деформирования на звене RS диаграммы деформирования $T = T(\Gamma)$. Имея закон упругого изменения объема при плоской деформации

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2k}, \quad (22)$$

примем, что главные оси тензора напряжений и деформаций при разрушении совпадают:

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \quad (23)$$

Из рис. 5 следует, что $\operatorname{tg} \alpha = T / (\Gamma - \Gamma_p) = 2\mu_*$, поэтому в качестве одного из определяющих соотношений запредельного деформирования примем:

$$T = 2\mu_*(\Gamma - \Gamma_p), \quad \Gamma_R \leq \Gamma \leq \Gamma_S = \Gamma_p, \quad (24)$$

где Γ_p — предельная деформация разрушения.

Подстановка условий (22)–(24) в (1)–(3) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} u'_s = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \sin \varphi + \Gamma \sin(2\theta - \varphi) - \omega_z \cos \varphi, \\ v'_s = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \cos \varphi - \Gamma \cos(2\theta - \varphi) - \omega_z \sin \varphi, \\ \frac{\sigma_n}{2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} k + \mu_*(\Gamma_p - \Gamma) \cos 2(\theta - \varphi), \\ \frac{\tau_n}{2} = \mu_*(\Gamma_p - \Gamma) \sin 2(\theta - \varphi). \end{cases} \quad (25)$$

Из первых двух уравнений (25) имеем:

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = v'_s \cos \varphi - u'_s \sin \varphi + \Gamma \cos 2(\theta - \varphi) = u'_t + \Gamma \cos 2(\theta - \varphi), \quad \omega_z = \Gamma \sin 2(\theta - \varphi) - u'_n. \quad (26)$$

Из последнего уравнения (25) выразим

$$\sin 2(\theta - \varphi) = \frac{\tau_n}{2\mu_*(\Gamma_p - \Gamma)},$$

тогда

$$\cos 2(\theta - \varphi) = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2(\theta - \varphi)} = \pm \sqrt{1 - \frac{\tau_n^2}{4\mu_*^2(\Gamma_p - \Gamma)^2}}. \quad (27)$$

Подставляя (26), (27) в предпоследнее уравнение (25), получим уравнение для определения Γ . Зная Γ , по диаграмме $T = T(\Gamma)$ находим оставшийся ресурс прочности материала вблизи контура выработки.

Сделаем следующие замечания.

1. Данный анализ может быть повторен для выработки произвольной формы (необязательно при условии плоской деформации), т.е. на контуре любой выработки по известному вектору напряжений Коши и вектору смещений определяются все напряжения и деформации, включая все компоненты вектора поворота.

2. В вышеприведенных решениях присутствуют производные от смещений. Понятно, что малые изменения этих смещений на границе выработки будут приводить к неустойчивым решениям. Чтобы решение было устойчивым необходимо производить сглаживание входных данных на границе выработки, исключая выбросы отдельных значений входных данных.

3. Возникает вопрос о сложности одновременного измерения смещений и напряжений на одной и той же границе. Наиболее просто этот вопрос решается, когда $\sigma_n = \tau_n = 0$ (выработка свободна от напряжений). Тем не менее представляет интерес, когда эти величины не равны нулю.

Отметим, что в настоящее время не существует технической возможности получить полный набор данных, необходимых для реализации всех рассмотренных в статье случаев. Сформулированные и решенные в статье задачи имеют только фундаментальное значение. Их следует рассматривать как задел на будущее, как руководство к разработке новых технических средств измерений.

ВЫВОДЫ

Предложен способ определения напряженно-деформированного состояния массива пород в окрестности выработки произвольной формы при одновременном измерении на ее контуре вектора напряжений Коши и вектора смещений. Получены выражения всех напряжений, деформаций и компонент вектора поворота через входные данные для случаев упругости, идеальной пластичности, линейного упрочнения и запредельного деформирования. Способ позволяет в экспрессном режиме оценивать ресурсные возможности сопротивления массива пород разрушению как для заглубленной выработки, так и для условий открытых горных пород.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.; Л.: Госиздат технико-теор. лит., 1950. — 299 с.
3. Мухелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
5. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
6. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001. — 704 с.
7. Петухов И. М., Линьков А. М. Механика горных ударов и выбросов. — М.: Недра, 1983. — 280 с.
8. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001. — 344 с.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. — М.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.
10. Грицко Г. И., Власенко Б. В., Мусалимов В. М. Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в угольном пласте // ФТПРПИ. — 1971. — № 1. — С. 3–10.
11. Грицко Г. И., Власенко Б. В., Шемякин Е. И. Экспериментально-аналитический метод определения напряжений в массиве горных пород. — Новосибирск: Наука, 1976. — 190 с.
12. Грицко Г. И., Цыцаркин В. Н. Определение напряженно-деформированного состояния массива вокруг напряженных пластовых выработок экспериментально-аналитическим методом // ФТПРПИ. — 1995. — № 3. — С. 18–21.
13. Миренков В. Е., Шутов В. А., Полуэктов В. А. Экспериментально-аналитическое определение контактных условий // Изв. вузов “Строительство”. — 2010. — № 5 (617). — С. 10–15.
14. Акимов В. С., Цыцаркин В. Н. Определение границы области неупругих деформаций вокруг круговой выработки // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. — Новосибирск, 1979. — С. 84–87.
15. Назаров Л. А., Назарова Л. А., Карчевский А. Л., Панов А. В. Оценка напряжений и деформационных свойств породных массивов на основе решения обратной задачи по данным измерений смещений на свободных границах // СЖИМ. — 2012. — Т. 15. — № 4. — С. 102–109.
16. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. — М.: Физматлит, 2007. — 223 с.
17. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984. — 263 с.
18. Буи Х. Д. Введение в теорию обратных задач механики материалов. — Караганда: КарГУ, 1997. — 378 с.
19. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995. — 311 с.
20. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи: учебное пособие. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008. — 460 с.
21. Имамутдинов Д. И., Чанышев А. И. Решение упругопластической задачи о протяженной цилиндрической выработке // ФТПРПИ. — 1988. — № 5. — С. 24–32.

*Поступила в редакцию 21/VI 2019
После доработки 25/VI 2019
Принята к публикации 03/VII 2019*