ПМТФ, № 4, 1962

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ СОЗДАНИЯ ТЯГОВОЙ СИЛЫ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ

М. А. Лаврентьев, М. М. Лаврентьев

(Новосибирск)

В настоящей статье рассматривается один возможный принцип создания тяговой силы для движения тела в сплошной среде. Этот принцип позволяет объяснить движение некоторых типов живых организмов на земле и в воде.

§ 1. Общие уравнения движения. Будем рассматривать плоскую задачу движения в случае, когда движущееся тело является несжимаемой материальной кривой, определенной уравнением

$$x = x(s, t), \qquad y = y(s, t) \tag{1.1}$$

где s — длина дуги кривой $0 \leqslant s \leqslant l$ с постоянной плотностью ρ на единицу длины.

Как известно, уравнения движения кривой (1.1) в общем случае имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(s, t) = F_x(s, t) \qquad \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(s, t) = F_y(s, t) \tag{1.2}$$

где вектор-функция $F(s, t)$ с компонентами $F_x(s, t)$, $F_y(s, t)$ есть полная сила, действующая на кривую.

Полная сила $F(s, t)$ является суммой трех сил

$$F(s, t) = F^e(s, t) + F^i(s, t) + F^c(s, t)$$

где $F^e(s, t)$ — сумма внешних сил, $F^i(s, t)$ — сумма внутренних сил, $F^c(s, t)$ — сумма сил связи.

Из условия несжимаемости следует, что кривая (1.1) удовлетворяет уравнению связи

$$x_s'^2(s, t) + y_s'^2(s, t) = 1 \tag{1.3}$$

Сформулируем теперь предположение относительно характера внутренних сил $F^i(s,t)$, которое будет определяющим для типа движений, рассматриваемых в настоящей работе.

Пусть сила $F^i(s, t)$ имеет потенциал. Как известно, потенциал силы $F^i(s, t)$ при фиксированном t является функционалом от функций $x(s, t)$, $y(s, t)$ переменной s, определенных на отрезке $[0, l]$.

Пусть указанный функционал имеет вид

$$\int_0^l \psi\,[K(s, t), s, t]\,ds \tag{1.4}$$

где

$$K(s, t) = x_s'(s, t)\,y_{ss}''(s, t) - y_s'(s, t)\,x_{ss}''(s, t)$$

есть кривизна кривой (1.1).

Сформулированное предположение относительно характера внутренних сил является, по нашему мнению, естественным при изучении движения многих материальных объектов рассматриваемого типа. Например, при движении тонкой упругой пластинки внутренние силы имеют потенциал вида (1.4), а функция $\psi(K, s, t)$ равняется

$$\psi(K, s, t) = \mu K^2 \qquad (\mu \text{ — некоторая константа})$$

При движении живых организмов функция ψ определяется напряжением мышц, создающих изгибающие усилия корпуса.

§ 2. Движение в твердом канале. Пусть кривая (1.1) перемещается в твердом канале, определенном уравнениями

$$x = u(\xi), \qquad y = v(\xi) \tag{2.1}$$

где ξ — длина дуги канала.

Тогда, кроме условия связи (1.3), кривая (1.1) удовлетворяет следующим условиям связи:

$$x(s, t) = u[\xi(t) + s], \qquad y(s, t) = v[\xi(t) + s] \tag{2.2}$$

Функция $\xi(t)$ в (2.2) определяет положение в канале «начала» кривой (1.1). Очевидно, что в рассматриваемом случае движение кривой полностью определяется функцией $\xi(t)$.

Для дальнейшего введем некоторые обозначения.

Обозначим проекции сил $F(s, t)$, $F^i(s, t)$, $F^e(s, t)$, $F^c(s, t)$ на касательную к кривой (2.1) в точке $\xi(t) + s$ соответственно через $F_s(s, t)$, $F_s^i(s, t)$, $F_s^e(s, t)$, $F_s^c(s, t)$ и через $F(t)$, $F^i(t)$, $F^e(t)$, $F^c(t)$ интегралы

$$F(t) = \int_0^l F_s(s, t)\, ds$$

Очевидно

$$F^c(t) = 0$$

Уравнения движения (1.2) в силу (2.2) и введенных обозначений примут вид

$$M\xi''(t) = F^l(t) + F^i(t) \qquad (M = \rho l) \tag{2.3}$$

Из (1.4) получим

$$F^i(t) = \int_0^l \chi_1 \{K[\xi(t) + s], s, t\} K'[\xi(t) + s]\, ds \tag{2.4}$$

где

$$K(\xi) = u''(\xi) v'(\xi) - v''(\xi) u'(\xi), \qquad \psi_1(K, s, t) = \frac{\partial}{\partial K} \psi(K, s, t)$$

Тяговая сила в твердом канале, обусловленная внутренними усилиями, определяется равенством (2.4).

Как уже было отмечено выше, если рассматривается живой организм, функция ψ, а значит и ψ_1 определяется напряжением мышц и может быть в определенных пределах любой заданной функцией переменных s, t. Таким образом, функцию $\psi_1(k, s, t)$ можно рассматривать как функцию, не зависящую от положения кривой (1.1) в канале (2.2) и, следовательно, не зависящую от кривизны K. Иначе говоря можно положить

$$\psi_1(K, s, t) = \psi(s, t) \qquad \psi(s, t) \text{ — заданная функция.} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим

$$F^i(t) = \int_0^l \psi(s, t) K'[\xi(t) + s]\, ds \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь вопрос об оптимальном распределении усилий для получения наибольшей тяговой силы $F^i(t)$.

Представляется естественным считать, что при несильно искривленном канале значение функции $\psi(s, t)$ определяется только напряжением мышц организма в точке s в момент времени t. Предположим теперь, что общее усилие организма, затрачиваемое на создание тяговой силы, равно сумме усилий его отдельных элементов, т. е. общее усилие J равно

$$J = \int_0^l \omega[\psi(s, t)]\, ds \tag{2.7}$$

где $\omega(\tau)$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция, определяющая зависимость изгибающего усилия от напряжения мышц организма.

В силу сделанных предположений решение вопроса об оптимальном распределении усилий сводится к решению следующей вариационной задачи.

Определить функцию $\psi(s, t)$, для которой функционал $F^i(t)$ из (2.6) достигает максимума при условии $J = \mathrm{const}$.

На основании известных теорем вариационного исчисления получим, что оптимальное распределение изгибающих усилий $\bar\psi(s, t)$ имеет вид

$$\bar\psi(s, t) = \alpha\{\lambda(t) K'[\xi(t) + s]\} \tag{2.8}$$

где функция $\alpha(\tau)$ определяется равенством

$$\omega'[\alpha(\tau)] = \tau$$

и $\lambda(t)$ — некоторая функция t, определяемая величиной усилия J.

Если $u(\xi)$, $v(\xi)$ есть периодические функции с периодом l и внешняя сила $F^e(t)$ является силой трения, зависящей лишь от скорости движения $\xi'(t)$

$$F^e(t) = -\beta[\xi'(t)]\, l$$

то общее усилие J, затрачиваемое организмом для передвижения с заданной скоростью V, определится соотношениями

$$J = \int_0^l \omega\{\alpha[\lambda K'(s)]\}\, ds, \qquad \beta(V)\, l = \int_0^l \alpha[\lambda K'(s)]\, K'(s)\, ds \tag{2.9}$$

По нашему мнению, в ряде случаев движения живых организмов по твердой поверхности и в жидкости изложенный принцип позволяет объяснить возникновение тяговой силы: передняя часть корпуса создает канал, а тяговая сила получается за счет изгибающих усилий задней части корпуса.

§ 3. Движение в идеальной жидкости. При движении кривой (1.1) в идеальной жидкости на элементы кривой, кроме внутренних сил, обусловленных потенциалом (1.4) и сил связи, обусловленных (1.3), действуют силы гидродинамического давления и силы трения.

Сила гидродинамического давления направлена по нормали к кривой и зависит от поля скоростей, возникающего в жидкости вследствие движения кривой. Сила трения направлена по касательной и определяется разностью касательных составляющих скоростей элементов жидкости и кривой.

Общая задача о движении кривой в жидкости является весьма сложной. Ограничимся рассмотрением двух примеров движения кривой (1.1) в определенном направлении с преодолением сил трения.

Пусть, как в предыдущем параграфе, потенциал внутренних сил имеет вид

$$\int_0^l \psi(s, t) K(s, t)\, ds$$

и пусть

$$x_s'(s, t) \geqslant \delta > 0 \qquad (\delta = \text{const})$$

Пусть, далее, движение элементов жидкости, не соприкасавшихся в процессе движения с кривой, является безвихревым и пусть на бесконечности жидкость находится в покое. Обозначим через $\varphi(x, y, t)$ потенциал скоростей жидкости и через $p(x, y, t)$ — гидродинамическое давление.

Как известно, функции $\varphi(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ определяются следующей системой дифференциальных уравнений и краевых условий:

$$- p(x, y, t) = \varphi_t'(x, y, t) + \frac{1}{2}[\operatorname{grad} \varphi(x, y, t)]^2$$

$$\triangle \varphi(x, y, t) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi[x(s, t), y(s, t), t]\, y_s'(s,t) - \frac{\partial}{\partial y} \varphi[x(s, t), y(s, t), t]\, x_s'(s, t) =$$
$$= x_t'(s, t)\, y_s'(s, t) - y_t'(s, t) x_s'(s, t)$$

В силу введенных предположений внешняя сила $F^e(s, t)$, действующая на кривую, имеет вид

$$\begin{aligned} F_x^e(s, t) &= - p(s, t)\, y_s'(s, t) + Q(s, t)\, x_s'(s, t) \\ F_y^e(s, t) &= p(s, t)\, x_s'(s, t) + Q(s, t)\, y_s'(s, t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$p(s, t) = \lim_{h \to 0} \{ p[x(s, t) - h y_s'(s, t) + h x_s'(s, t), t] -$$
$$- p[x(s, t) + h y_s'(s, t), y(s, t) - h x_s'(s, t), t] \}$$

$Q(s, t)$ — некоторая функция от разности касательных составляющих скоростей кривой и жидкости.

Внутренняя сила $F^i(s, t)$ и сила связи $F^c(s, t)$ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} F_x^i(s, t) &= - \frac{\partial}{\partial s} \{ 2\psi(s, t)\, y_{ss}''(s, t) + \psi_s'(s, t)\, y_s'(s, t) \} \\ F_y^i(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} \{ 2\psi(s, t)\, x_{ss}''(s, t) + \psi_s'(s, t)\, x_s'(s, t) \} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$F_x^c(s, t) = \frac{\partial}{\partial s}[\lambda(s, t)\, x_s'(s, t)], \qquad F_y^c(s, t) = \frac{\partial}{\partial s}[\lambda(s, t)\, y_s'(s, t)]$$

где $\lambda(s, t)$ — произвольная функция.

Соотношения (3.3) имеют место при $0 < s < l$. На концах кривой, т. е. при $s = 0$, $s = l$, внутренние силы и силы связи имеют другой вид.

Таким образом, в уравнения движения (1.2) входят две функции: $\psi(s, t)$, $\lambda(s, t)$. Рассмотрим вопрос о том, в каком случае для двух произвольных функций $x(s, t)$, $y(s, t)$, удовлетворяющих (1.3), можно подобрать функции $\psi(s, t)$, $\lambda(s, t)$ так, чтобы функции $x(s, t)$, $y(s, t)$, $\psi(s, t)$, $\lambda(s, t)$ удовлетворяли системе (1.2).

Легко видеть, что для того чтобы функции $x(s, t)$, $y(s, t)$ удовлетворяли указанному условию, необходимо и достаточно, чтобы при любом t функции $x(s, t)$, $y(s, t)$ удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} &\int_0^l \{ -\rho x_{tt}''(s, t) - p(s, t)\, y_s'(s, t) + Q(s, t)\, x_s'(s, t) \}\, ds = 0 \\ &\int_0^l \{ -\rho y_{tt}''(s, t) + p(s, t)\, x_s'(s, t) + Q(s, t)\, y_s'(s, t) \}\, ds = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

При этом предполагается, что при движении жидкости на концах кривой (1.1) не возникает бесконечных скоростей и давлений.

Необходимость (3.4) следует из того, что равнодействующая всех внутренних сил, действующих на кривую, всегда равна нулю.

Если же (3.4) выполняется, то при

$$\psi(s, t) = \int [\beta(s, t)\, x_s'(s, t) - \alpha(s, t)\, y_s'(s, t)]\, ds \tag{3.5}$$

$$\lambda(s, t) = \alpha(s, t)\, x_s'(s, t) + \beta(s, t)\, y_s'(s, t) + 2\psi(s, t) K(s, t)$$

где

$$\alpha(s, t) = \int [-\rho x_{tt}''(s, t) - p(s, t)\, y_s'(s, t) + Q(s, t)\, x_s'(s,t)]\, ds$$

$$\beta(s, t) = \int [-\rho y_{tt}''(s, t) + p(s, t)\, x_s'(s, t) + Q(s, t)\, y_s'(s, t)]\, ds$$

функции x, y, ψ, λ удовлетворяют системе (1.2).

Перейдем к рассмотрению первого примера движения. Пусть плотность кривой пренебрежимо мала, так что влиянием инерционных членов в системе (1.2) можно пренебречь, и пусть кривая (1.1) при движении мало уклоняется от некоторого «неподвижного» канала и движется вдоль этого канала с постоянной скоростью V, т. е. пусть

$$x(s, t) = u(s + Vt) + x_1(s, t), \qquad y(s, t) = v(s + Vt) + y_1(s, t) \tag{3.6}$$

$$u(s) = s + u_1(s), \qquad |u_1'(s)| < 1$$

где $v(s)$, $u_1(s)$ — периодические функции с периодом l, функции $x_1(s, t)$, $y_1(s, t)$ — малы вместе с производными до второго порядка включительно.

В силу принятых предположений скорости жидкости, обусловленные движением кривой (1.1), будут величины малые того же порядка, что и функции $x_1(s, t)$, $y_1(s, t)$ и сила трения $Q(s, t)$ с точностью до малых высшего порядка может считаться постоянной, т. е. можно положить

$$Q(s, t) = q$$

Отбрасывая в условиях (3.4) члены высшего порядка малости, получим

$$\int_0^l p(s, t)\, v'(s - Vt)\, ds = qL, \qquad \int_0^l p(s, t)\, u'(s - Vt)\, ds = 0 \tag{3.7}$$

Здесь

$$L = \int_0^l u_s'(s)\, ds = u(l) - u(0)$$

Пренебрегая в (3.1) членами высшего порядка малости, получим

$$p(s, t) = -\frac{\partial}{\partial t} A_{st} [y_{1t}'(s, t)\, u'(s - Vt) - x_{1t}'(s, t)\, v'(s - Vt)]$$

где A_{st} — интегральный оператор, определяемый следующим образом.

Пусть $\omega(s)$ — некоторая функция, определенная на отрезке $[0, l]$ и пусть $w(x, y, t)$ — гармоническая функция переменных x, y, регулярная вне кривой

$$x = u(s - Vt), \qquad y = v(s - Vt) \qquad (s \leqslant l) \tag{3.8}$$

и удовлетворяющая на (3.8) краевому условию

$$\frac{\partial}{\partial n} w(x, y, t) = \omega(s)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по нормали к кривой (3.8). Тогда

$$A_{st}\omega(s) = w^+(s, t) - w^-(s, t)$$

где w^+, w^- — предельные значения функции $w(x, y, t)$ при стремлении точки x, y к точке $u(s-Vt)$, $v(s-Vt)$ соответственно «сверху» и «снизу» кривой (3.8).

Пренебрегая в уравнении связи (1.3) членами высших порядков малости, получим, что (1.3) эквивалентно уравнению

$$u'(s-Vt)\, x_{1s}'(s, t) + v'(s-Vt)\, y_{1s}'(s, t) = 0 \tag{3.9}$$

Предположим теперь, что скорость V является малой, так что производными функций от аргумента $s - Vt$ по времени t можно пренебречь, и предположим, что функции $u(s)$, $v(s)$ таковы, что оператор A_{st} мало меняется при изменении времени t. Отметим, что второе предположение справедливо, например, в случае, когда функции $u(s)$, $v(s)$ имеют период l/n и число n велико.

Пренебрегая в (3.7) членами высших порядков малости, получим, что (3.7) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\int_0^l [y_{1tt}''(s, t)\, u'(s-Vt) - x_{1tt}''(s, t) v'(s-Vt)]\, A_s^* v'(s-Vt)\, ds = qL \\ \int_0^l [y_{1tt}'(s, t)\, u'(s-Vt) - x_{1tt}''(s, t)\, v'(s-Vt)]\, A_s^* u'(s-Vt)\, ds = 0\end{gathered} \tag{3.10}$$

где A_s^* — оператор, сопряженный с оператором A_{st}.

Нетрудно привести ряд примеров функций $x_1(s, t)$, $y_1(s, t)$, удовлетворяющих соотношениям (3.9), (3.8).

Пусть, например, функции $x_1(s, t)$, $y_1(s, t)$ имеют вид

$$x_1(s,t) = \sum_1^3 \alpha_k(t)\, x_k(s-Vt), \qquad y_1(s, t) = \sum_1^3 \alpha_k(t)\, y_k(s-Vt)$$

Тогда, для того чтобы функции $x_1(s, t)$, $y_1(s, t)$ удовлетворяли соотношениям (3.9), (3.8), достаточно, чтобы функции $\alpha_k(t)$, $x_k(s)$, $y_k(s)$ удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}u'(s)\, x_k'(s) + v'(s)\, y_k'(s) = 0 \\ \sum_1^3 \alpha_k''(t)\, J_{1k}(t) = qL, \qquad \sum_1^3 \alpha_k''(t) J_{2k}(t) = 0\end{gathered} \tag{3.11}$$

Здесь

$$J_{1k}(t) = \int_0^l [y_k(s-Vt)\, u'(s-Vt) - x_k(s-Vt) v'(s-Vt)] A_s^*\, v'(s-Vt)\, ds$$

$$J_{2k}(t) = \int_0^l [y_k(s-Vt)\, u'(s-Vt) - x_k(s-Vt)\, v'(s-Vt)]\, A_s^* u'(s-Vt)\, ds$$

Существование же функций $\alpha_k(t)$, $x_k(s)$, $y_k(s)$, удовлетворяющих (3.11), очевидно. (При дифференцировании функций $x_1(s, t)$, $y_1(s, t)$ мы пренебрегли производными функций $x_k(s-Vt)$, $y_k(s-Vt)$ по переменной t.)

Перейдем к построению второго примера движения. Пусть в начальный момент кривая (1.1) прямолинейна (почти прямолинейна) и имеет скорость V. Фиксируем на (1.1) четыре точки s_j, $j = 1, \ldots, 4$, попарно симметричные относительно середины кривой

$$s_{j+1} = l - s \qquad (j = 1, 3)$$

Около каждой из точек создадим изгибающее усилие следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi(s,t) &= \lambda_1 \cos^2 r_1(s-s_1)\,|s-s_1| \leqslant \frac{\pi}{2r_1}\\
&= -\lambda_1 \cos^2 r_1(s-s_2)\,|s-s_2| \leqslant \frac{\pi}{2r_1}\\
&= -\lambda_2 \cos^2 r_2(s-s_3)\,|s-s_3| \leqslant \frac{\pi}{2r_2}\\
&= \lambda_2 \cos^2 r_2(s-s_4)\,|s-s_4| \leqslant \frac{\pi}{2r_2}\\
\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi(s,t) &= 0 \qquad (0 \leqslant t < \delta)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

вне отмеченных интервалов отрезка $[0, l]$. Числа λ_j, δ считаем достаточно малыми, а числа r_j — достаточно большими.

В силу (3.3) в результате этих изгибающих усилий кривая (1.1) и жидкость получат импульс в направлении оси y с распределением, пропорциональным правым частям в (3.12); кривая (1.1) и жидкость получат некоторое дополнительное движение. При произвольных значениях постоянных λ_j, r_j полученное движение жидкости будет иметь особенности в концах кривой, однако эти постоянные можно подобрать так, чтобы поток был всюду регулярным. Кроме того, в силу симметрии созданный импульс не изменит общей скорости движения кривой в направлении оси X.

Будем считать, что при $t = \delta$ изгибающие напряжения исчезли, т. е.

$$\psi(s,t) = 0 \qquad (t > \delta)$$

и проследим за совокупностью движений кривой и жидкости. Кривая наряду с поступательным движением начнет изгибаться по закону, близкому к

$$y(s,t) = f(s-Vt)\varphi(t), \qquad x(s,t) = s - Vt \tag{3.13}$$

где $\varphi(t)$ — некоторая функция времени t и

$$f(s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi(s, t_1) \qquad (0 \leqslant t_1 < \delta)$$

Образовавшаяся на кривой (1.1) волна (3.13) будет скользить вдоль кривой к задней кромке. При этом с задней кромки будет сбегать система вихрей. Дождемся того момента $t = \tau$, когда точка перегиба главной волны придет в конец кривой и в этот момент создадим в интервале от конца кривой до точки ее наибольшей кривизны $s_{\max}$ изгибающее усилие, выпрямляющее кривую

$$\psi(s,t) > 0 \quad (0 < s < s_{\max} < l), \qquad \psi(s,t) = 0 \quad (s_{\max} \leqslant s \leqslant l) \tag{3.14}$$

В силу принципа, изложенного в § 1, в результате кривая получит импульс в направлении оси x. (Этот факт, принципиально ясный, был проверен нами экспериментально.) Если теперь напряжение снова снять и предоставить кривой двигаться по инерции, то кривая будет автоматически выпрямляться, ее искривление будет падать по закону $1 / V^2t^2$. Этим самым проделанный цикл с двумя изгибающими импульсами привел к движению почти прямолинейного отрезка с почти постоянной скоростью, так как потери скорости в результате силы трения можно считать компенсированными приращением скорости в результате второго импульса.

Как было отмечено выше, в приведенном цикле с задней кромки, вообще говоря, должны непрерывно сбегать вихри.

Поступила 29 V 1962