Если в формуле (7) заменить g_1 на g_2 или на

$$g_3 = \frac{g_0}{2\rho_0^3 - 3\rho_0^5 - 2}\left[2\left(1-\rho_0^5\right)\rho_0 - \left(\rho_0^2 - 1\right)\rho_0 + \left(\rho_0^3 + 1\right)4\rho_0^3\right],$$

то внешний вихрь задается формулой (6) или (8), а внутренний — модифицированной формулой (7). Заменив в формулах (4) g_1 на g_3, получим во внешнем вихре вихревое двумерное течение, а во внутреннем соответственно вихревое трехмерное или однородное винтовое.

Аналогично можно решить задачу потенциального обтекания вихревого образования, состоящего из m вихрей, находящихся в зазорах между концентрическими сферами произвольных радиусов с функциями распределения в каждом вихре в виде (1). Если функции заданы в виде (1), то можно ограничиться требованием константы функции тока на поверхностях концентрических сфер, за исключением внешней, тогда азимутальные скорости на этих поверхностях будут отличны от нуля, а $k_i = k$.

Автор выражает благодарность Ю. С. Рязанцеву и Ю. П. Гупало за ценные замечания и обсуждение работы.

Поступила 23 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярмицкий А. Г.** Об одном пространственном аналоге столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла).— ПМТФ, 1974, № 5.
2. **Милн Томсон.** Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
3. **Васильев О. Ф.** Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958.
4. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.

УДК 532.516

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Г. Ярмицкий

(*Жданов*)

1. Уравнение Навье — Стокса в векторной форме имеет следующий вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} = -\nabla H - \nu\nabla \times \Omega, \tag{1.1}$$

где $\Omega = \operatorname{rot}\mathbf{v}$; $H = p/\rho + v^2/2 + \Pi$; $\mathbf{v}$ — вектор скорости; t — время; p — давление; ρ — плотность; Π — потенциал массовых сил; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Будем рассматривать закрученные течения несжимаемой жидкости с осевой симметрией. Направив ось z вдоль оси симметрии потока, выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z и с помощью соотношения

$$\mathbf{v} = \nabla \times (-\mathbf{i}_\varphi\Psi/r) + \mathbf{i}_\varphi\Phi/r, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{i}_\varphi$ — орт в направлении азимутального угла φ, введем в (1.1) функцию тока Ψ и функцию $\Phi = rv_\varphi$, характеризующую распределение окружной скорости течения v_φ. Заметим, что при этом формула для вектора-вихря $\mathbf{\Omega}$ конструктивно похожа на формулу (1.2)

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times (\mathbf{i}_\varphi \Phi/r) + \mathbf{i}_\varphi E^2\Psi/r.$$

Уравнение (1.1) распадается на два:

$$(1.3)\quad r^{-1}\left\{\left[E^2\Psi \frac{\partial\Psi}{r\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{r\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right)\right]\mathbf{i}_z + \left[E^2\Psi\frac{\partial\Psi}{r\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{r\partial r} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right)\right]\mathbf{i}_r\right\} = \nabla H;$$

$$(1.4)\quad \partial\Phi/\partial t + r^{-1}\partial(\Psi,\ \Phi)/\partial(z,\ r) = \nu E^2\Phi.$$

В этих уравнениях E^2 — дифференциальный оператор, выражаемый в цилиндрических координатах в виде

$$E^2 = \partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial r^2 - \partial/r\partial r;$$

$\partial(\Psi,\ \Phi)/\partial(z,\ r)$ — якобиан функций Ψ и Φ.

Таким образом, векторное уравнение Навье — Стокса (1.1) эквивалентно следующей системе трех скалярных уравнений в Φ, Ψ-переменных:

$$(1.5)\quad \begin{cases} E^2\Psi\dfrac{\partial\Psi}{r\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi^2}{r\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right) = r\dfrac{\partial H}{\partial z}, \\ E^2\Psi\dfrac{\partial\Psi}{r\partial r} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Phi^2}{r\partial r} - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right) = r\dfrac{\partial H}{\partial r}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + r^{-1}\partial(\Psi,\ \Phi)/\partial(z,\ r) = \nu E^2\Phi. \end{cases}$$

Совершив над левой и правой частями (1.3) операцию rot, получим

$$(1.6)\quad \frac{\partial}{\partial t}(E^2\Psi) + r\frac{\partial(\Psi,\ r^{-2}E^2\Psi)}{\partial(z,\ r)} - \frac{\partial\Phi^2}{r^2\partial z} = \nu E^4\Psi.$$

Итак, кинематика осесимметричного закрученного потока несжимаемой вязкой жидкости полностью описывается системой уравнений (1.4), (1.6), представляющей следствие векторного уравнения Навье — Стокса.

Эти уравнения приведены в [3] как частный случай соответствующих уравнений в криволинейной ортогональной системе координат.

В случае потока без закрутки ($\Phi = 0$) уравнение (1.6) получено также в [2].

Выведем зависимость, представляющую аналог уравнения Бернулли в дифференциальной форме. Для этого левую и правую части (1.1) умножим скалярно на дифференциал радиуса-вектора $d\mathbf{R} = \mathbf{i}_z dz + \mathbf{i}_r dr + \mathbf{i}_\varphi r d\varphi$. В силу (1.4) после преобразований найдем

$$(1.7)\quad dH = r^{-2}\left\{\left[E^2\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right)\right]dz + \left[E^2\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^2}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right)\right]dr\right\}.$$

2. Рассмотрим класс осесимметричных течений вязкой жидкости, для которых функция Φ пропорциональна функции тока Ψ, т. е.

$$\Phi = k\Psi, \tag{2.1}$$

где k — псевдоскалярная постоянная с размерностью волнового числа.

Подставляя (2.1) в (1.4), получим

$$k\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right) = 0.$$

Выражение, стоящее внутри скобок, определим следующим образом:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi = \begin{cases} 0 & (k \neq 0), \\ -\nu A r^2 & (k = 0) \end{cases} \tag{2.2}$$

(A — постоянная).

Переписав (1.6) в виде

$$E^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \nu E^2\Psi\right) + r\frac{\partial(\Psi, r^{-2}E^2\Psi)}{\partial(z, r)} - 2k^2\Psi\frac{\partial\Psi}{r^2\partial z} = 0$$

и замечая, что

$$E^2 r^2 = 0, \quad -2\Psi\frac{\partial\Psi}{r^2\partial z} = r\frac{\partial(\Psi, r^{-2}\Psi)}{\partial(z, r)},$$

в силу (2.2) будем иметь

$$\frac{\partial(\Psi, r^{-2}(E^2\Psi + k^2\Psi))}{\partial(z, r)} = 0.$$

Следовательно, между выражением $r^{-2}(E^2\Psi + k^2\Psi)$ и функцией тока Ψ существует функциональная зависимость, в которую переменные z и r не входят явным образом.

Удобно положить

$$E^2\Psi + k^2\Psi = r^2F'(\Psi), \tag{2.3}$$

где $F(\Psi)$— произвольная функция Ψ, а штрих означает дифференцирование по аргументу.

Как вытекает из (1.7),

$$F(\Psi) = \begin{cases} H - H_0(t) & (k \neq 0), \\ H + 2A\nu z - C & (k = 0). \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $H_0(t)$ — произвольная функция t, а C — постоянная. Предположим, что

$$F(\Psi) = A\Psi. \tag{2.5}$$

В этом случае (2.2) принимает вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + k^2\nu\Psi = \begin{cases} \nu A r^2 & (k \neq 0), \\ 0 & (k = 0). \end{cases} \tag{2.6}$$

Отсюда вытекает, что при $k = 0$ (течение без закрутки) поток должен быть стационарным, определяющая его функция тока удовлетворяет уравнению для функции тока осесимметричного вихревого течения невязкой жидкости

$$E^2\Psi = Ar^2,$$

а модуль вектора-вихря пропорционален расстоянию точки от оси симметрии течения, т. е.

$$\Omega = Ar. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.4) полной энергии (внешней) единицы массы жидкости для такого течения имеет вид

$$H = A\Psi - 2\nu Az + C.$$

Интересно, что в рассматриваемом потоке запас энергии во всей массе жидкости не остается постоянным на поверхностях тока $\Psi = \mathrm{const}$, а линейно зависит от z. Такие течения подробно исследованы в [2].

Положив в начале координат $\Psi = 0$, найдем, что постоянная C равна полной энергии H_0 единицы массы жидкости в этой точке, так что уравнение (2.7) окончательно может быть записано в виде

$$H = A\Psi - 2\nu Az + H_0.$$

Принципиально новым является случай $k \neq 0$ и $A \neq 0$. Интегрируя в этом случае уравнение (2.6), найдем

$$\Psi = \psi(z, r)\exp(-k^2\nu t) + k^{-2}Ar^2, \tag{2.8}$$

причем в силу (2.3), (2.5) функция $\psi(z, r)$ удовлетворяет уравнению невязкого однородного винтового течения с напряженностью $k = \mathrm{const}$ и окружной скоростью, равной нулю на оси симметрии потока [4]:

$$E^2\psi + k^2\psi = 0. \tag{2.9}$$

Проекции скорости и вектора-вихря выражаются при этом соотношениями

$$v_z = -\frac{\partial\psi}{r\partial r}\exp(-k^2\nu t) - 2k^{-2}A, \tag{2.10}$$

$$v_r = \frac{\partial\psi}{r\partial z}\exp(-k^2\nu t), \quad v_\varphi = \frac{k\psi}{r}\exp(-k^2\nu t) + k^{-1}Ar;$$

$$\Omega_z = -kv_z, \ \Omega_r = -kv_r, \ \Omega_\varphi = -kv_\varphi + Ar. \tag{2.11}$$

Эти выражения показывают, что компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{\Omega}$ в осевой плоскости коллинеарны.

Итак, рассматриваемое течение может быть представлено в виде суперпозиции двух течений: винтового с функцией тока $\psi(z, r)\exp(-k^2\nu t)$ и течения, определяемого функцией тока $k^{-2}Ar^2$. Последнее исследовано ниже.

Уравнение (2.4) в рассматриваемом случае принимает вид

$$H = A\Psi + H_0(t), \tag{2.12}$$

где $H_0(t)$ — полная энергия единицы массы жидкости на поверхности тока $\Psi = 0$. Соотношение (2.12) усматривается и непосредственно из системы (1.5).

Таким образом, на поверхностях тока $\Psi = \mathrm{const}$ полная энергия единицы массы жидкости зависит только от времени.

В частном случае $A = 0$ соотношения (2.1), (2.8) — (2.12) определяют однородное винтовое течение вязкой жидкости с исчезающей на оси симметрии азимутальной скоростью. То, что решение уравнения (2.9), умноженное на $\exp(-k^2\nu t)$, удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, было показано еще в работе [1]. Вывод, что однородный винтовой поток вязкой несжимаемой жидкости, находящейся под действием консервативных внешних сил, может быть только неустановившимся (затухающим), подтвержден в работе [5].

Заметим, что при $t \to \infty$

$$\Psi = k^{-2}Ar^2, \quad \Phi = k^{-1}Ar^2. \tag{2.13}$$

Эти функции определяют однопараметрическое установившееся течение, в котором жидкость имеет постоянную осевую скорость $w = -2k^{-2}A$ и вращается как твердое тело с угловой скоростью $\omega = \frac{1}{2}\Omega_z = k^{-1}A$. Подобного рода течения, определяемые функциями, зависящими только от расстояния точки до оси симметрии, с равной нулю радиальной компонентой скорости называют цилиндрическими [6], так как поверхностями Бернулли для них служат круговые цилиндры. В отечественной литературе [4] такие потоки иногда называют однопараметрическими циркуляционными или винтообразными. Поскольку в рассматриваемом случае [6] $H = \frac{1}{2}w^2 + \omega^2r^2$, из сравнения этого выражения с (2.12) заключаем, что при $t \to \infty$ $H_0(t) \to \frac{1}{2}w^2$.

Параметрам A и k можно придать определенный физический смысл, выразив их через осевую и угловую скорости асимптотически установившегося течения (2.13). Параметр k по абсолютной величине равен отношению модуля вектора-вихря к осевой скорости ($k = -2\omega/w$); значение параметра A определяется удвоенным отношением квадрата угловой скорости к осевой ($A = -2\omega^2/w$).

На первое слагаемое в (2.8) можно смотреть теперь как на функцию, характеризующую отклонение функции тока Ψ от функции тока установившегося цилиндрического течения (2.13). С возрастанием времени благодаря сглаживающим эффектам вязкости это отклонение стремится к нулю и поле течения во всей области асимптотически приближается к установившемуся течению (2.13).

3. Круговой цилиндр бесконечной длины радиуса a, внутри которого протекает закрученный поток вязкой жидкости, движется поступательно в направлении своей оси со скоростью

$$w(1 + (q/wa)\exp(-k^2\nu t))$$

и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. При этом w — осевая скорость асимптотически установившегося движения цилиндра, когда $t \to \infty$, q — действительная постоянная, $k = -2\omega/w$.

Ясно, что в рассматриваемом случае течение цилиндрическое и задача состоит в определении параметров этого течения.

Будем относить движение к неподвижной системе координат. Течение жидкости внутри цилиндра можно описать с помощью функции (2.8), где $k^{-2}A = -\frac{1}{2}w$, а $\psi(r)$ удовлетворяет уравнению (2.9)

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{d\psi}{rdr} + k^2\psi = 0. \tag{3.1}$$

Граничные условия задачи:

$$v_z|_{r=a} = w\left(1 + \frac{q}{wa}\exp(-k^2\nu t)\right),$$

$$v_\varphi|_{r=a} = \omega a.$$

Первое из этих условий равносильно требованию

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right|_{r=a} = -wa - q\exp(-k^2\nu t),$$

а второе — условию

$$\Psi(t, a) = k^{-1}\omega a^2.$$

Таким образом, приходим к краевой задаче: найти решение уравнения (3.1). удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r=a} = -q; \tag{3.2}$$

$$\psi(a) = 0. \tag{3.3}$$

К этим двум требованиям необходимо присоединить еще неявное граничное условие, состоящее в том, что компоненты скорости не имеют особенности на оси цилиндра, т. е. при $r = 0$.

Удовлетворим всем условиям, если в качестве частного решения (3.1) используем функцию

$$\psi = CrJ_1(kr), \tag{3.4}$$

где C — произвольная постоянная; J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Условие (3.3) показывает, что собственными значениями рассматриваемой задачи являются числа $k_1 = \lambda_1/a$, $k_2 = \lambda_2/a$, $\ldots$, $k_n = \lambda_n/a$, $\ldots$, где λ_i — нули бесселевой функции $J_1(\lambda)$, причем, не нарушая общности, можно ограничиться только положительными нулями.

Значит, решение (3.4) описывает течение жидкости в канале не при любых значениях w и ω, а лишь тех, для которых выражение $2\omega a/w$ является одним из нулей функции $J_1(\lambda)$.

Из условия (3.2) находим

$$C = -q/\lambda_n J_0(\lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и, следовательно,

$$\psi = -\frac{q}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} rJ_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right).$$

Таким образом, функция тока для рассматриваемого течения в цилиндрическом канале

$$\Psi = -\frac{1}{2}wr^2 - \frac{q}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} rJ_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right). \tag{3.5}$$

В частном случае, когда поступательное движение цилиндра происходит без начальной скорости, $q = -wa$ и выражение (3.5) принимает вид

$$\Psi = -\frac{1}{2}wr^2\left[1 - \frac{2}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}\frac{a}{r}J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{a^2}\right)\right].$$

При $t \to \infty$ влияние стенки распространяется на всю жидкость, и она движется как твердое тело, совершая винтообразное движение вместе с трубой.

При $w = 0$ ($\lambda_n \to \infty$) получаем известное распределение окружной скорости в установившемся течении внутри равномерно вращающегося кругового цилиндра, $v_\varphi = \omega r$.

Значению $\omega = 0$ ($\lambda_0 = 0$) соответствует полное отсутствие движений как цилиндра, так и жидкости.

4. Умножим функцию тока ψ_-, полученную в [7] для движения невязкой жидкости внутри сферического винтового вихря, на $\exp(-k^2 \nu t)$. Тогда, согласно упомянутой в п. 2 теореме Стеклова [1], найдем функцию тока Ψ_-, описывающую винтовое движение вязкой жидкости внутри сферы. Склеивая это решение с внешним потенциальным течением, приходим к выводу, что набегающий на неподвижный вихрь поток должен иметь скорость $w_0 \exp(-k^2 \nu t)$, а

$$\Psi_- = \frac{3}{2} w_0 \exp(-k^2 \nu t) \frac{a^{3/2}}{b J_{1/2}(b)} R^{1/2} J_{3/2}\left(b \frac{R}{a}\right) \sin^2\theta \quad (R < a),$$

где w_0 — начальная скорость набегающего потока; $J_{1/2}$ и $J_{3/2}$ — бесселевы функции порядка 1/2 и 3/2; R, θ — координаты точки в сферической системе координат; a — радиус вихря; $b = 4{,}4934$ — наименьший положительный корень функции $J_{3/2}(\lambda)$; $k = b/a$.

Компоненты скорости внутреннего движения также получаются из соответствующих компонент скорости невязкого течения [7] путем их умножения на множитель $\exp\left(-b^2 \frac{\nu t}{a^2}\right)$.

Функция тока течения вне вихря

$$\Psi_+ = \frac{1}{2} w_0 \exp(-b^2 \nu t/a^2)(1 - a^3/R^3) R^2 \sin^2\theta \quad (R > a).$$

Множитель $\exp(-b^2 \nu t/a^2)$ отражает влияние вязкого течения внутри вихря на невязкое течение вне его.

Так как жидкость вне вихря невязкая и течение безвихревое нестационарное, то давление на границе вихря извне может быть найдено с помощью интеграла Лагранжа — Коши

$$H_+ = f(t) - \frac{3}{2} b^2 \nu a^{-1} w_0 \exp\left(-b^2 \frac{\nu t}{a^2}\right) \cos\theta,$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

В то же время давление на границе изнутри вихря определяется с помощью уравнения (2.12), которое в данном случае принимает особенно простой вид

$$H_- = H_0(t).$$

Требуя непрерывности полной энергии единицы массы жидкости на поверхности сферы, т. е. выполнения условия

$$H_+ + \partial\varphi/\partial t = H_- \text{ при } R = a,$$

найдем, что

$$H_0(t) = f(t) = H_+^*(t),$$

где H_+^* — значение трехчлена H_+ в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$) вихря.

Вследствие непрерывности скорости давление на границе должно претерпевать разрыв (за исключением точек экватора). Аналогичный эффект имеет место в случае сферического вихря Хилла, несущего вязкую жидкость в невязкой среде [2].

Скачок нормального напряжения приводит к не учитываемой здесь деформации вихря. В случае капли он компенсируется давлением поверхностного натяжения, которое предполагается достаточно большим, чтобы сохранить сферическую форму капли.

Обратив движение, рассмотренное в этом пункте, получим сферический винтовой вихрь, заполненный вязкой жидкостью и движущийся прямолинейно в покоящейся на бесконечности невязкой жидкости со скоростью $w_0 \exp(-b^2\nu t/a^2)$ в направлении оси z.

Реакция жидкости на этот вихрь в проекции на направление его движения

$$R_z = \frac{2}{3} b^2\pi a\mu w_0 \exp(-b^2\nu t/a^2).$$

Эта сила убывает с течением времени, причем тем быстрее, чем меньше радиус вихря и чем больше вязкость жидкости, наполняющей его.

Поступила 23 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стеклов В. А.** Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости.—«Сообщ. Харьк. мат. об-ва». Сер. 2, 1896, т. 5.
2. **Milne-Thomson L. M.** Axisymmetrical isovistive flows with vorticity proportional to distance from the axis.—«Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl.», 1968, t. 13, N 6.
3. **Современное** состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Т. 1. М., ИЛ, 1948.
4. **Васильев О. Ф.** Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.— Л., Госэнергоиздат, 1958.
5. **Алексеев Н. И.** О потоке Громеки для несжимаемой вязкой жидкости.—«Науч. зап. Моск. гидромелиорат. ин-та им. В. Р. Вильямса», 1948, т. 17.
6. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
7. **Ярмицкий А. Г.** Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла).— ПМТФ, 1974, № 5.

УДК 532.526

ДИФФУЗИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А. В. Вдовин, А. В. Смольяков

(*Ленинград*)

За последнее десятилетие достигнут существенный прогресс в экспериментальном исследовании эффекта Томса — явления уменьшения трения в турбулентных потоках, содержащих малые добавки высокомолекулярных соединений (полимеров). Однако подавляющее большинство экспериментов было выполнено при постоянной в потоке концентрации полимерных примесей, например, при протекании заранее приготовленных