

Из динамических условий совместности (1.8), учитывая (2.2) и (2.3), получим

$$\rho G^2 = Q \quad (2.4)$$

Так как $[W] = 0$ и

$$[\varepsilon_{i3}] ([\varepsilon_{i3}] + 2\varepsilon_{i3}^+) = Q^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2z\omega_1 + 2y\omega_2) = 0$$

то термодинамическое условие совместности (1.9) на тангенциальной поверхности сильного разрыва выполняется тождественно.

Таким образом, поперечная волна является вырождающейся ударной волной, так как она подобно звуковым волнам не сопровождается разрывом энтропии. Кроме того, как следует из (2.4), скорость поперечной ударной волны от интенсивности не зависит и определяется упругими модулями A_{lm0} и значениями деформации сдвига перед волной. Интенсивность этой волны может меняться от 0 до $-8d$. При $z = y = 0$ должны выполняться равенства $\omega_1 = \omega_2 = 0$, т. е. при отсутствии деформации сдвига впереди S поперечная ударная волна не может распространяться в упругом теле.

Поступила 1 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. В о а - Т е h С h u. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 1, pp. 1—14.
2. Ч е р н ы х Е. М. Термодинамические соотношения на поверхности сильного разрыва в упругой среде при конечных деформациях. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3.
3. Ч е р н ы ш е в А. Д. О распространении ударных волн в упругом пространстве при конечных деформациях. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. M u r n a g h a n F. D. Finite deformations of an elastic solid. Amer. J. Math., 1937, vol. 59, No. 2, pp. 235—260.
5. T h o m a s T. Y. Plastic flow and fracture in solids. New York — London, Acad. Press., 1961.
(Рус. перев.: Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.)
6. S i n g h M., P i p k i n A. C. Note on Ericksen's problem. Z. angew. Math. und Phys., 1965, Bd 16, fsc. 5, S. 706—709.

УДК 539.31

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГРАДУИРОВОЧНОЙ КРИВОЙ В НАКОВАЛЬНЯХ БРИДЖМЕНА

И. И. Перлин

(Москва)

При проведении экспериментов или осуществлении того или иного технологического процесса в области высоких давлений необходимо достаточно точно знать величины напряжений в той части, где расположено исследуемое или обрабатываемое вещество. Функциональная связь между указанным напряжением и непосредственно определяемой величиной — суммарным усилием, приложенным в установке, — называется градуировочной кривой. Достоверность знания градуировочной кривой и определяет надежность работы любой установки высокого давления, поскольку непосредственные замеры давления практически исключены.

В установках высокого давления, использующих в качестве рабочей среды жидкость, построение градуировочной кривой осуществляется достаточно просто. Иначе обстоит дело в установках, использующих в качестве рабочей среды пластическое вещество (при нынешнем уровне экспериментальной техники в области физики высоких давлений именно указанные установки позволяют получать максимальные давления). В данной работе этот вопрос рассматривается на примере достаточно характерной установки — наковален Бриджмена.

Наковальни Бриджмена схематически можно представить в виде двух упругих полупространств с расположенным между ними тонким диском из пластического материала. В ходе сближения полупространств диск утоньшается, его радиус увеличивается. Из-за наличия трения между пластической средой и полупространствами (смазка отсутствует) возникает градиент давлений, увеличивающийся с уменьшением толщины диска. Для упрощения анализа пренебрегаем влиянием находящегося в пластической среде инородного включения (исследуемое вещество), поскольку, как правило, такого рода включения сравнительно малы. Полагаем также, что рабочая среда является идеально пластическим телом (σ_s — предел текучести).

Таким образом, задача об определении контактных давлений в наковальных Бриджмена может быть сформулирована как задача об осесимметричном течении тонкого слоя пластического материала по деформируемым поверхностям [1].

Введем полярную систему координат r, φ . Через $p(r)$, $\tau(r)$ и $h(r)$ обозначим соответственно контактное давление, напряжение трения и половину толщины пластического диска. Радиус его обозначим через R , половину толщины на кромке, т. е. при $r = R$ — через H .

Поскольку $h(r) \ll R$, имеем согласно [1] уравнение

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\tau(r)}{h(r)} \quad (1)$$

Напряжение трения $-\tau(r)$ — считается заданной функцией. Контактное давление на кромке полагаем равным

$$p(R) = 0.5\sigma_s (1 + \delta + \cos \delta) \quad (\delta = \arcsin \tau(R)/0.5\sigma_s)$$

Указанное значение $p(R)$ определено из точного решения уравнений пластического равновесия в окрестности кромки [2]. Если напряжение трения равно $0.5\sigma_s$, то $p(R) = 1.28\sigma_s$.

Для определения смещения поверхности полупространств $w(r)$ используем формулу Буссинэ (см., например, [3]), которая применительно к осесимметричному случаю записывается следующим образом:

$$w(r) = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{p(r') r' d\varphi dr'}{\sqrt{(r' \cos \varphi - r)^2 + (r' \sin \varphi)^2}} \quad (2)$$

где μ и E — коэффициент Пуассона и модуль упругости. Очевидно равенство

$$h(r) = w(r) - w(R) + H \quad (3)$$

Задача заключается в решении системы уравнений (1), (2) совместно с равенством (3) при заданных полном усилии и объеме пластической среды. Однако с математической точки зрения существенно целесообразней считать заданными размеры R и H . Построив решение, находим интересующие усилие и объем. Окончательный результат можно представить в форме градуировочной кривой.

В работе [4] было проведено исследование системы (1), (2) при условии $\tau(r) = -0.5\sigma_s$. Из предположения о постоянстве знака напряжений трения сразу же на основании уравнения (1), следует, что по абсолютному значению давление растет от кромки к центру, достигая там максимального значения. Однако экспериментальные исследования [5] и др. показали, что при сжатии весьма тонких дисков давление в центральной части становится немаксимальным.

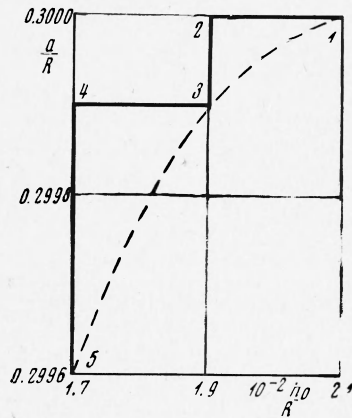
В работе [6] предпринята попытка объяснить этот эффект. Автор пошел по пути достаточно произвольного разбиения пластической среды на наружное кольцо из пластического материала и расположенную внутри область, заполненную сжимаемой жидкостью. Следствием предложенной модели явилось изменение знака напряжений трения на части контактной поверхности.

Переходим к изложению предлагаемой модели. Полагаем, что в каждый момент деформирования существует окружность (назовем ее нейтральной, а радиус обозначим через a), обладающая тем свойством, что пластический материал, расположенный внутри нее, в ходе деформирования перемещается к центру, а расположенный вне — к периферии. Поэтому напряжение трения $\tau(r)$ должно быть положительным при $r < a$ и отрицательным при $r > a$. В расчетной схеме с целью упрощения будем полагать, что напряжение трения постоянно по величине и равно $0.5\sigma_s$.

Система уравнений (1), (2) может быть решена для любого значения радиуса a при заданных H и R . Для определения же действительного значения радиуса a при фиксированных H и R необходимо привлечь дополнительные соображения. Далее с целью

упрощения, а также учитывая более точно форму рабочих поверхностей наковален Бриджмена (штампы представляют собой усеченные конусы с малыми углами конусности), полагаем, что материал, вытекший за пределы рабочих поверхностей, не влияет на дальнейший ход процесса. Полагаем также, что заполнение рабочего объема уже произошло, и поэтому в ходе дальнейшего сближения штампов не происходит изменения величины R .

Допустим, что система (1), (2) решена для заданных значений a , H и R при упомянутых выше условиях (методика



Фиг. 1

решения излагается ниже). Введем в рассмотрение функцию $\Omega(r, H, a)$, равную объему пластического материала, который заключен внутри окружности радиуса r . В том случае, если учитывается сжимаемость пластического материала, функция $\Omega(r, H, a)$ должна определять не объем, а соответствующую массу.

Прежде чем перейти к установлению связи между величинами a и H , рассмотрим вопрос о динамике нейтральной окружности. Пусть есть некоторое решение, определяемое совокупностью значений R , H_1 и a_1 . Придадим величине H_1 некоторое приращение ΔH_1 .

Как определить соответствующее приращение a ? Полагая величину ΔH_1 малой по сравнению с H_1 , на основании определения понятия нейтральной окружности можем написать равенство

$$\Omega(a_1 + \Delta a_1, H_1 + \Delta H_1, a_1) = \Omega(a_1, H_1, a_1) \quad (4)$$

Равенство (4) с точностью до малых высшего порядка можно представить в виде

$$\Delta a_1 \left. \frac{\partial \Omega(r, H_1, a_1)}{\partial r} \right|_{r=a_1} + \Delta H_1 \frac{\partial \Omega(a_1, H_1, a_1)}{\partial H_1} = 0$$

Осуществляя предельный переход, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{da}{dH} = - \frac{\partial \Omega(a, H, a)}{\partial H} \left(\left. \frac{\partial \Omega(r, H, a)}{\partial r} \right|_{r=a} \right)^{-1} \quad (5)$$

Уравнение (5), вообще говоря, позволяет определить зависимость между a и H при наличии непротиворечивых исходных данных. Для разъяснений вернемся к сопоставлению решений, определяемых параметрами a_1, H_1 и $a_1 + \Delta a_1, H_1 + \Delta H_1$. Пусть ΔH_1 — отрицательная величина. Если при уменьшении величины H не происходит увеличения толщины в центре, то, естественно, от совокупности значений a_1 и H_1 следует отказаться. Установленное ограничение может быть записано также и в дифференциальной форме.

Поскольку функцию $\Omega(r, H, a)$ невозможно определить в аналитической форме, предлагается следующая процедура приближенного построения зависимости $a(H)$. На графике фиг. 1 отложим точку 1 с координатами H_1 и a_1 . Придадим H_1 приращение ΔH_1 . Строим решение для параметров $H_1 - \Delta H_1$ и a_1 и подбором определяем то значение r (обозначим его через a_3), для которого выполняется равенство

$$\Omega(a_3, H_1 - \Delta H_1, a_1) = \Omega(a_1, H_1, a_1)$$

Точку с координатами $H_1 - \Delta H_1$ и a_1 обозначаем 2, а с координатами $H_1 - \Delta H_1$ и a_3 — 3. Далее строим решение для параметров $H_1 - \Delta H_1 - \Delta H_3$ и a_3 . Обозначим соответствующую точку 4 и т. д. Плавная пунктирная линия, соединяющая точки с нечетными индексами, приближенно определяет требуемую зависимость.

Ниже приведены результаты расчетов при следующих значениях исходных данных: $\nu = 0,3$, $\sigma_s / E = 0,02$, $a / R = 0,3$, $H_1 / R = 0,02034$, $\Delta H_1 / R = -0,00154$, $\Delta H_3 / R = -0,0012$.

| | Точка 1 | Точка 3 | Точка 5 |
|------------------|---------|---------|---------|
| H | 0.02034 | 0.0188 | 0.0170 |
| $h(0,5 R)$ | 0.09321 | 0.931 | 0.0932 |
| $h(0)$ | 0.11255 | 0.1128 | 0.1133 |
| a/R | 0.3000 | 0.2999 | 0.2996 |
| Ω/R^3 | 0.4244 | 0.4209 | 0.4175 |
| $P/\sigma_s R^2$ | 14.22 | 14.52 | 14.91 |

Здесь через P обозначено полное усилие, а через Ω — объем пластической среды. При переходе от точки 1 к точкам 3 и 5 последовательно увеличивается высота в центре, полное усилие, а уменьшается объем материала из-за его вытекания из рабочего объема.

На фиг. 2 приведены эпюры $p(r)$ и $h(r)$ при параметрах $a = 0.3$ и $H_1 / R = 0.02034$.

Продолжим рассмотрение вопроса об определении начальных значений a и H . Обратимся к случаю сжатия первоначально достаточно толстого диска. Естественно, что весь материал будет перемещаться от центра и предлагаемая схема не реализуется. Значение H , при котором возникнет течение к центру, определяется в этом случае из уравнения

$$\partial \Omega(0, H, 0) / \partial H = 0 \quad (6)$$

Установление соответствующего значения H представляет большой практический интерес, поскольку в этом случае область фактически постоянного давления имеет наибольшую протяженность. Поэтому при проведении экспериментальных исследований представляется возможным размещать сравнительно большие объемы исследуемых веществ, будучи при этом уверенным, что результаты измерений не искажаются неоднородностью поля напряжений.

Если же сдвливается первоначально полый диск, следует проводить исследование согласно [1], вплоть до момента вырождения внутренней полости. Значение радиуса нейтральной окружности берется из решения для полого диска в момент вырождения полости.

Значительно более сложным может представиться рассматриваемый вопрос при сжатии первоначально тонких дисков. Например, может возникнуть следующая ситуация. В ходе сжатия наружная часть диска перешла в пластическое состояние, а в центральной части упругой зоны возник отрыв материала диска от штампов.

Образовавшаяся полость стала причиной пластического течения к центру. Для определения искомых значений a и H оказывается необходимым проследить все этапы описанного выше решения вплоть до момента вырождения упругих зон.

Приведенные выше соображения могут оказаться весьма естественными, если учесть обычно применяемую профилировку рабочих поверхностей.

Приведенный анализ показывает, что понятие «градуировочная кривая» для установок высокого давления, использующих в качестве рабочей среды пластическое тело, имеет смысл лишь при фиксации исходных размеров пластического тела. Следует обратить также внимание и на то обстоятельство, что градуировочная кривая может оказаться не взаимно однозначной функцией.

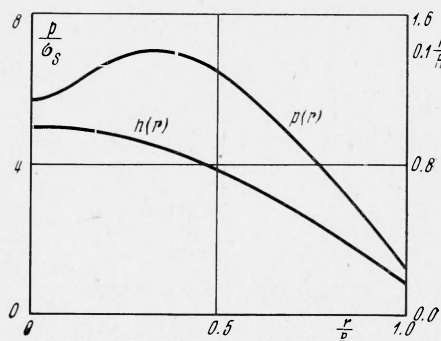
Изложим расчетную схему. Рассмотрим интеграл (2). Разобьем область интегрирования (круг радиуса R) совокупностью l концентрических равноотстоящих окружностей и пучком m прямых, проходящих через центр, на малые криволинейные четырехугольники. Все искомые функции $p(r)$ и $h(r)$ будем определять в точках с радиальной координатой $r_i = (i - 0.5) R / l$, расположенных в центрах этих четырехугольников. Индекс i принимает значения от 1 до l . Краевые условия для функций $p(r)$ и $h(r)$ спосим в точку с координатой r .

Учитывая наличие в ядре подынтегральной функции слабой (интегрируемой) особенности, произведем преобразование

$$w(r) = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{[p(r') - p(r)] r' dr' d\varphi}{\sqrt{(r' \cos \varphi - r)^2 + (r' \sin \varphi)^2}} + \\ + \frac{1 - \mu^2}{\pi E} p(r) \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r' dr' d\varphi}{\sqrt{(r' \cos \varphi - r)^2 + (r' \sin \varphi)^2}}$$

Ядро подынтегрального выражения в первом интеграле является непрерывной функцией, второй же интеграл берется в замкнутом виде [3]. Он оказывается равным

$$2\pi R \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n)^2} \right]$$



Фиг. 2

Элементарные суммы вычисляются как произведение разности $p(r') - p(r)$, взятой в центрах соответствующих четырехугольников, и среднего в вершинах значения выражения

$$\frac{r' R \pi}{l m} \frac{1}{\sqrt{(r' \cos \varphi - r)^2 + (r' \sin \varphi)^2}}$$

Обращаемся далее к уравнению (1) и представляем его приближенно в виде

$$p(r_i) = 1.28 \sigma_s + \sum_{j=i}^{l-1} \frac{\tau(r_j)}{h(r_j)} \Delta r \quad (i=1, 2, \dots, l-1) \quad (7)$$

Полученную систему уравнений решаем методом последовательных приближений. Возьмем в качестве нулевого приближения какое-либо распределение давлений $p(r_i)$, определим соответствующие значения $w(r_i)$ и, следовательно, $h(r_i)$. Из формулы (7) находим первое приближение для давлений $p(r_i)$ и неоднократно повторяем предложенный алгоритм по достижении достаточной сходимости.

В расчетах, результаты которых приводились ранее, за нулевое приближение брались $p(r_i) \equiv 1.28 \sigma_s$, $l = 80$, $m = 40$, число итераций — 10. При этом достигалась точность в пятом знаке.

Автор благодарит Д. С. Миринского и А. Д. Марголина за полезное обсуждение и Л. К. Трохан и И. Б. Дерюгину за составление программы и проведение расчетов.

Поступила 22 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. И л ь ю ш и н А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.
2. С о к о л о в с к и й В. В. Теория пластичности. М., «Вышая школа», 1969.
3. Л у р ь е А. И. Пространственная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
4. К и й к о И. А. О воздействии сжатого пластического тонкого слоя на упругие поверхности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
5. Ш е с т о п а л О. Я., Ш у р и н Я. И. Экспериментальное определение распределения давления в тонкой круговой пластинке, сжатой между круглыми накопальниками. ПМТФ, 1963, № 6.
6. М и р и н с к и й Д. С. К определению градуировочных кривых установок сверхвысокого давления. ПМТФ, 1964, № 2.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Сдано в набор 3/IV-1972 г. Т-08846 Подписано к печати 29/V-1972 г. Тираж 2075 экз.
Зак. 388 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,5

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10