

Рис. 5

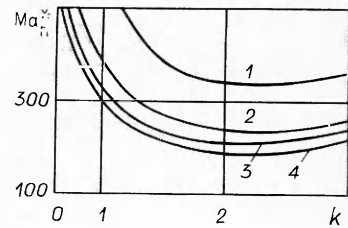


Рис. 6

сводится к равновесию плоского слоя (3.1). Поэтому представляется целесообразным сравнить отвечающие им критические числа Марангони. Для этого необходимо положить

$$(3.8) \quad Ma_{\pi}^* = 2(1 - d^3) Ma$$

и учесть, что  $\alpha = kd/(1 - d)$  ( $m = kd/(1 - d)$ ),  $Bi = Bi_{\pi}/(1 - d)$ ,  $We = We_{\pi}/(1 - d)$ .

Подставляя в (3.8)  $Ma$  по формуле (2.6) или (2.7) и устремляя к единице, получим в пределе число Марангони (3.7), т. е.  $\lim_{d \rightarrow 1} Ma_{\pi}^* = Ma_{\pi}$

На рис. 6 приведены кривые  $Ma_{\pi}^*$ , рассчитанные по формуле (3.8) при  $Bi_{\pi} = 2$ ,  $We_{\pi} = \infty$ . Для кривой 1  $d = 0,1$  и минимум  $Ma_{\pi}^* = 333$ ,  $k = 2,23$ , для 2  $d = 0,5$ ,  $Ma_{\pi}^* = 237,2$ ,  $k = 2,18$ , а для 3  $d = 0,9$ ,  $Ma_{\pi}^* = 209,2$ ,  $k = 1,98$ . Кривая 4 отвечает плоскому слою, когда  $d = 1$ . Как видно из рис. 6, минимумы кривых для цилиндрического слоя выше минимумов кривых для плоского слоя. Таким образом, равновесное состояние цилиндрического слоя является более устойчивым по отношению к осевым метрическим возмущениям, чем равновесное состояние плоского слоя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. K. A. On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958.— V. 4, N 5.
2. Антимиров М. Я., Лиениня В. Р. Возникновение термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое жидкости в условиях невесомости // Изв. АН ЛатвССР. Сб. физ. и техн. наук.— 1978.— № 3.
3. Бадрагинова Л. Г. Термокапиллярная неустойчивость равновесия жидкого слоя ограниченного свободными поверхностями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1980.— Вып. 46.
4. Бабский В. Г., Скловская И. А. Гидродинамика в слабых силовых полях. Возникновение стационарной термокапиллярной конвекции в шаровом слое жидкости в условиях невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1969.— № 3.
5. Андреев В. К., Рябицкий Е. А. Малые возмущения термокапиллярного движения в случае цилиндра.— М., 1984.— Деп. в ВИНТИ 27.11.84, № 7788—84.
6. Хашель Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.

Поступила 19/XI 1987 г.,  
в окончательном варианте — 18/II 1988 г.

УДК 532.5

### К НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

Изучается проблема обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике. Суть этой проблемы — доказательство неустойчивости положения равновесия (покоя) механической системы при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии [1—4]. Рассмотрены линейные задачи устойчивости равновесия идеальных несжимаемой и сжимаемой жидкостей. Учтены такие факторы, как капиллярность, плотностная и энтропийная стратификация и вращение. Результат состоит в получении априори

денков решений этих задач, свидетельствующих о росте со временем функционала  $\Gamma$  — среднего квадрата лагранжевых смещений жидких частиц. Характер нарастания  $M$  экспоненциальный с инкрементом, просто вычисляющимся по начальным данным задачи. Для иллюстрации степени общности используемого подхода дана аналогичная оценка нарастания  $M$  в задаче устойчивости равновесия анизотропного упругого тела.

Предлагаемый способ получения результатов о неустойчивости является вариантом прямого метода Ляпунова, главная трудность которого — нахождение конкретного вида функционала Ляпунова, растущего в силу уравнений движения системы. Функционал  $M$ , использованный в настоящей работе, введен для задач устойчивости тел с полостями, содержащими жидкость, в [4] и для упругих тел в [5, 6]. Авторы [4—6] получили оценку  $dM/dt > ct$  с постоянной  $c > 0$ .

**1. Идеальная несжимаемая стратифицированная капиллярная жидкость.** Рассматриваются трехмерные движения идеальной несжимаемой однородной по плотности жидкости, происходящие во внешнем поле массовых сил. Жидкость целиком заполняет область  $\tau$  с фиксированной границей  $\partial\tau$ . Жидкая поверхность  $\Gamma$  делит область  $\tau$  на две части:  $\tau^+$  и  $\tau^-$ , в каждой из которых поле плотности  $\rho$  непрерывно, а на самой  $\Gamma$  имеется скачок плотности  $[\rho] \equiv \rho^+ - \rho^-$ . Движение в областях  $\tau^\pm$  описывается уравнениями

$$.1) \quad \rho Du_i = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad D_i \rho = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — декартовы координаты;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  и  $p$  — поля скорости и давления; знаки  $\pm$  у искоемых функций опускаются;  $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$  — потенциал внешнего поля массовых сил. По повторяющимся векторным индексам ведется суммирование. На  $\partial\tau$  ставится условие непротекания

$$.2) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

— внешняя нормаль к  $\partial\tau$ ). На жидкой поверхности  $\Gamma$ , задаваемой уравнением  $F(\mathbf{x}, t) = 0$ , выполняются кинематическое и динамическое условия

$$.3) \quad dF/dt = 0, \quad [p] \equiv p^+ - p^- = -\sigma(k_1 + k_2).$$

здесь  $\sigma$  — постоянный коэффициент поверхностного натяжения;  $k_1$  и  $k_2$  — кривизны главных нормальных сечений поверхности  $\Gamma$  (каждая из них считается положительной, если соответствующее нормальное сечение выгнуто в сторону области  $\tau^+$ ). На линии  $\gamma$  пересечения поверхностей  $\partial\tau$  и  $\Gamma$  ставятся условия Дюпре — Юнга [4, 7]

$$.4) \quad \sigma \cos \alpha = \sigma^- - \sigma^+,$$

где  $\alpha$  — краевой угол,  $\sigma^-$  и  $\sigma^+$  — постоянные коэффициенты поверхностного натяжения на  $\partial\tau^+$  и  $\partial\tau^-$ . Посредством  $\partial\tau^\pm$  обозначены части, на которые кривая  $\gamma$  делит твердую поверхность  $\partial\tau$ . Начальные данные для (1.1)—(1.4) задаются в виде

$$.5) \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad F(\mathbf{x}, 0) = F^0(\mathbf{x})$$

очевидными ограничениями на функции  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  и  $F^0(\mathbf{x})$ . Все используемые функции вместе со своими производными, входящими в уравнения движения и граничные условия, считаются непрерывными. На решениях задачи (1.1)—(1.5) сохраняется энергия

$$.6) \quad dE_1/dt = 0, \quad E_1 = K_1 + \Pi_1 = \text{const},$$

$$2K_1 = \int_{\tau} \rho u_i u_i d\tau, \quad d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\Pi_1 \equiv \int_{\tau} \rho \Phi d\tau + \sigma |\Gamma| + \sigma^+ |\partial\tau^+| + \sigma^- |\partial\tau^-|$$

$|\Gamma|$ ,  $|\partial\tau^\pm|$  — площади соответствующих поверхностей).

Состояния гидростатического равновесия представляют собой решения задачи (1.1)–(1.5) вида

$$(1.7) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{u} &\equiv 0, \quad \rho = \rho_0(\mathbf{x}), \quad p = p_0(\mathbf{x}), \\ \nabla p_0 &= -\rho_0 \nabla \Phi, \quad \nabla \rho_0 \times \nabla \Phi = 0 \\ [p_0] &= -\sigma(k_1 + k_2), \quad [\rho_0] \neq 0 \text{ на } \Gamma_0 \end{aligned} \right\} \text{ в } \tau_0^\pm,$$

( $\Gamma_0$  — равновесная поверхность скачка плотности, делящая область на части  $\tau_0^\pm$ ).

Линеаризация соотношений задачи (1.1)–(1.5) на решении (1.7) дает

$$(1.8) \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 u_{it} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \\ \rho_t + u_k \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} &= 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ в } \tau,$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] &= 0, \quad N_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ [p] &= \sigma(aN - \Delta N), \quad a \equiv \frac{[\rho_0]}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - k_1^2 - k_2^2 \end{aligned} \right\} \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial e} + \chi N = 0, \quad \chi = \frac{k \cos \alpha - \bar{k}}{\sin \alpha} \text{ на } \gamma_0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial \tau.$$

Здесь  $\mathbf{u}$ ,  $p$  и  $\rho$  — поля возмущений скорости, давления и плотности, знак  $\pm$  и штрихи (отличающие поля возмущений от полных решений (1.1) у которых опущены;  $\mathbf{v}$  — единичная нормаль к  $\Gamma_0$ , направленная и  $\tau_+$  в  $\tau_+$ ;  $\partial \Phi / \partial v \equiv \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi$ ;  $N$  — смещение жидкой поверхности  $\Gamma$  по нормали к  $\Gamma_0$ ;  $\Delta$  — второй дифференциальный параметр Бельтрами [8, с. 190]  $k$  и  $\bar{k}$  — кривизны нормальных сечений поверхностей  $\Gamma_0$  и  $\partial \tau$  вдоль направлений  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}_1$ ; в свою очередь единичные векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}_1$  нормальны к невозмущенному положению линии смачивания  $\gamma_0$  и лежат в плоскостях, касательных к поверхностям  $\Gamma_0$  (в направлении из  $\Gamma_0$ ) и к  $\partial \tau$  (в направлении из  $\partial \tau_0^+$ ) соответственно;  $\partial N / \partial e$  — производная от  $N$  по направлению  $\mathbf{e}$ . При  $\rho_0^+ = \text{const}$ ,  $\rho_0^- \equiv 0$  соотношения (1.8) совпадают с приведенными в [7]. Начальные данные (1.5) в линейном приближении редуцируются к форм

$$(1.9) \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho^1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad N(\mathbf{x}, 0) = N^0(\mathbf{x}).$$

Для решений начально-краевой задачи (1.8), (1.9) справедлив анализ интеграла энергии

$$(1.10) \quad \begin{aligned} E &\equiv K + \Pi = \text{const}, \quad \Pi \equiv \Pi_\rho + \Pi_\sigma, \\ 2K &\equiv \int_\tau \rho_0 u_i u_i d\tau, \quad 2\Pi_\rho \equiv - \int_\tau \Phi'(\rho_0) \rho^2 d\tau, \\ \frac{2\Pi_\sigma}{\sigma} &\equiv \int_{\Gamma_0} \{aN^2 + \nabla(N, N)\} dS + \int_{\gamma_0} \chi N^2 dl, \end{aligned}$$

в котором  $\nabla(N, N)$  — первый дифференциальный параметр Бельтрами [8]; производная  $\Phi'(\rho_0) \equiv d\Phi/d\rho_0 = \nabla \Phi / \nabla \rho_0$  имеет смысл в области  $\tau_0^\pm$  в силу условий равновесия (1.7), если  $\nabla \rho_0 \neq 0$ . Под интегралом по  $\Gamma_0$  в (1.10) подразумевается сумма интегралов по  $\tau_0^+$  и  $\tau_0^-$ . Отметим, что выражение для  $\Pi_\sigma$  совпадает с приведенным в [7, 9, 10].

Если где-нибудь в  $\tau_0^\pm$  имеется  $\nabla \rho_0 = 0$ , то функционал  $\Pi_\rho$  в (1.10) теряет смысл. Для того чтобы исключить возникающую при этом в подынтегральном выражении особенность, следует ограничиться рассмотрением более узкого класса движений, в котором возмущения плотности жидких частиц (лагранжевы возмущения плотности) равны нулю. Другими словами, плотность каждой жидкой частицы при возмущениях не меняется; возмущения состоят только в смещениях частиц из положения равновесия

Наиболее просто этот класс движений описывается с помощью поля лагранжевых смещений  $\xi(x, t)$  [11], для которого выполняются соотношения

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \xi_t = \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \xi = 0, \quad \rho = -(\xi \cdot \nabla) \rho_0 \text{ в } \tau_0^\pm, \\ N = \xi \cdot \mathbf{v}, \quad [\xi \cdot \mathbf{v}] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \xi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\tau. \end{aligned}$$

Все равенства (1.8) в терминах  $\xi$  переписываются очевидным образом. Начальные данные (1.9) заменяются для (1.8), (1.11) на следующие:

$$(1.12) \quad \xi(\mathbf{x}, 0) = \xi^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \xi_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}).$$

Функционал  $\Pi_\rho$  из (1.10) для этого класса движений принимает вид

$$(1.13) \quad \begin{aligned} 2\Pi_\rho = - \int_\tau \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial\rho_0}{\partial x_h} \xi_i \xi_h d\tau = \int_\tau b N_1^2 d\tau, \\ b \equiv -\nabla\rho_0 \cdot \nabla\Phi, \quad N_1 \equiv \xi \cdot \nabla\Phi / |\nabla\Phi|, \end{aligned}$$

функционалы  $K$  и  $\Pi_\sigma$  (1.10) остаются прежними.

Если для всех полей  $\xi$  выполняется  $\Pi \geq 0$ , то из равенства  $E(t) = E(0)$  (1.10) вытекает устойчивость по линейному приближению. На таком пути с необходимостью возникает определение устойчивости по отношению к части переменных [12]. Причина этого в том, что в  $E$  входят лишь компоненты смещений  $N$ ,  $N_1$  и  $\mathbf{v} \times \nabla N$ , а не полный вектор  $\xi$ . Вообще для идеальной жидкости до настоящего времени нет ни одного результата об устойчивости в норме как-либо определенного пространства функций  $\xi(\mathbf{x})$ .

Утверждение об устойчивости состояния (1.7) при  $\Pi \geq 0$  является одной из форм теоремы Лагранжа [1–7], связывающей факт устойчивости состояния покоя с наличием в нем минимума потенциальной энергии. Действительно, как и в [4, 7, 9, 10], можно показать, что вторая вариация  $\delta^2\Pi_1$  потенциальной энергии (1.6), записанная в подходящих обозначениях, совпадает с функционалом  $\Pi$  (1.10), (1.13). При этом  $\delta\Pi_1 = 0$  в силу условий равновесия (1.7). Таким образом, неравенство  $\Pi \geq 0$  соответствует минимуму  $\Pi_1$  на (1.7). Одновременно с устойчивостью (1.7) по линейному приближению можно ожидать и нелинейной устойчивости, однако ее выявление требует особых определений и доказательств [1, 4, 7, 13–15].

**2. Прямой метод Ляпунова в доказательстве неустойчивости.** Цель дальнейшего изложения — получение обращения теоремы Лагранжа, т. е. доказательство неустойчивости состояния равновесия (1.7) при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии  $\Pi_1$  (1.6) или  $\Pi$  (1.10), (1.13). На языке лагранжевых смещений  $\xi$  это означает, что существует поле  $\xi = \xi^*(\mathbf{x})$ , для которого имеется

$$(2.1) \quad \Pi = \Pi^* < 0 \text{ при } \xi = \xi^*(\mathbf{x}).$$

Для других полей  $\xi(\mathbf{x})$  неравенство (2.1) может смениться на противоположное, т. е. состояние (1.7) является бесконечномерным аналогом «седловой» точки функционалов  $\Pi_1$  и  $\Pi$ . Условие (2.1) выполняется, если  $\Pi_\rho < 0$  и (или)  $\Pi_\sigma < 0$  (1.10), (1.13). Неравенство  $\Pi_\rho < 0$  означает, что плотность  $\rho_0$  где-либо в  $\tau$  нарастает «вверх» ( $\nabla\rho_0 \cdot \nabla\Phi > 0$ ), а  $\Pi_\sigma < 0$  отражает более сложный баланс эффектов поверхностного натяжения и скачка плотности на  $\Gamma_0$ . Как известно [7], даже в ситуации с более тяжелой жидкостью «сверху» ( $[\rho_0]\mathbf{v} \cdot \nabla\Phi < 0$ ) функционал  $\Pi_\sigma$  может быть положительно определен. И наоборот, возможны случаи с тяжелой жидкостью внизу  $[\rho_0]\mathbf{v} \cdot \nabla\Phi > 0$ , для которых имеются возмущения с  $\Pi_\sigma < 0$ .

Для демонстрации неустойчивости вводятся функционалы

$$(2.2) \quad M = \int_\tau \rho_0 \xi_i \xi_i d\tau, \quad W \equiv \dot{M}/2 = \int_\tau \rho_0 u_i \xi_i d\tau,$$

где точкой сверху обозначается производная по времени, а под интегралами по  $\tau$  понимается, как и прежде, сумма интегралов по  $\tau_0^\pm$ . Функционалы типа (2.2) впервые были использованы для доказательства неустойчивости твердых тел с полостями, содержащими жидкость, в [4]. Используя (1.8)–(1.13), можно получить

$$(2.3) \quad \dot{M} = 2\dot{W} = 4(K - \Pi) = 8K - 4E.$$

При выводе (2.3) применялась также обобщенная формула Грина [8, с. 192]. Из неравенства Коши — Буняковского [16] вытекает  $\dot{M}^2 = 4\dot{W}^2 \leq \leq 8KM$ . Исключая отсюда с помощью (2.3)  $8K$ , имеем  $M\ddot{M} - \dot{M}^2 + 4EM \geq 0$ . После деления этого неравенства на  $M^2$  оно преобразуется к форме

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{M}}{M} \right) \geq -\frac{4E}{M}.$$

Для любого возмущения с  $E < 0$  из (2.4) следует

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{M}}{M} \right) > 0, \quad \frac{\dot{M}}{M} > \frac{2W(0)}{M(0)} \equiv 2\lambda,$$

после чего выбор  $\lambda > 0$  приводит к искомой оценке нарастания возмущения

$$(2.6) \quad M(t) > M(0) \exp(2\lambda t).$$

Сделанный выбор  $E < 0$  и  $\lambda > 0$  возможен в силу (2.1) и потому, что поля  $\xi$  и  $u$  в начальный момент времени задаются независимо (1.13). Действительно, неравенство  $E < 0$  с учетом (1.10), (2.1) означает, что начальные данные (1.12) выбираются такими, что  $K(0) < |\Pi^*|$ . Затем на этих начальных данных вычисляется  $\lambda \equiv W(0)/M(0)$ . Если оказывается, что  $\lambda < 0$ , то нужно в (1.12) сменить знак одной из функций  $\xi^0(x)$  или  $u^0(x)$ , оставив вторую из них неизменной. Таким образом, по построению обеспечивается существование начальных данных, соответствующих (2.6) с  $\lambda > 0$ . Разумеется, поскольку математические вопросы существования решений здесь не рассматриваются, неравенство (2.6) имеет характер априорной оценки.

Оценка  $\lambda$  сверху проводится с помощью неравенства Коши — Буняковского:

$$(2.7) \quad \lambda \leq \sqrt{2K(0)M(0)}/M(0) = \sqrt{2K(0)/M(0)} < \sqrt{-2\Pi(0)/M(0)}.$$

Последнее соотношение в (2.7) возникло из требования  $E < 0$ . Для уточнения оценки (2.7) полезно рассмотреть более узкий, чем (1.12), класс начальных данных, содержащих функцию  $\xi^*(x)$  (2.1) и константу  $k$ :

$$(2.8) \quad \xi(x, 0) = \xi^*(x), \quad u(x, 0) = \xi_t(x, 0) = k\xi^*(x).$$

Для них условия  $E < 0$ ,  $\lambda > 0$  принимают вид

$$E = k^2 M(0)/2 + \Pi(0) < 0, \quad k = \lambda > 0,$$

откуда вытекает

$$(2.9) \quad 0 < k = \lambda < \sqrt{-2\Pi(0)/M(0)}.$$

Видно, что интервал (2.9) возможных значений инкремента  $\lambda$  совпадает с оценкой (2.7), т. е. последняя дает точную границу интервала инкрементов.

Наибольший инкремент  $\lambda_{\max}$  в (2.7), (2.9) можно вычислить, решая вариационную задачу определения максимума величины  $\lambda = \sqrt{-2\Pi/M}$ . Допустимые поля  $\xi(x)$  должны удовлетворять условиям  $\operatorname{div} \xi = 0$  в  $\tau_0^\pm$ ,  $\xi \cdot n = 0$  на  $\partial\tau$ ,  $[\xi \cdot v] = 0$  на  $\Gamma_0$ . Эта задача здесь не решается. Ограничимся по ее поводу двумя частными замечаниями.

1. Если  $\sigma = 0$  и на  $\Gamma_0$  имеется неустойчивый скачок плотности (т. е.  $[\rho_0] \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi < 0$ ), то  $\lambda_{\max} \rightarrow \infty$ , что соответствует некорректности задачи по Адамару. Действительно, в отношении  $\Pi/M$  числитель  $\Pi$  содержит объемный и отрицательный поверхностный интегралы, в то время как знаменатель  $M$  — только объемный. Выбирая пробные функции  $\xi(\mathbf{x})$  быстро осциллирующими вдоль  $\Gamma_0$  и быстро затухающими при удалении от  $\Gamma_0$ , получаем  $M \rightarrow 0$  при фиксированном  $\Pi < 0$ .

2. Если на  $\Gamma_0$  имеется  $\sigma = 0$ ,  $[\rho_0] = 0$ , то остается только непрерывная стратификация и из (2.1), (1.13) вытекает

$$(2.10) \quad \lambda_{\max}^2 < \max_{\tau} (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \Phi) / \min_{\tau} \rho_0.$$

Замечательной особенностью полученной оценки неустойчивости (2.6) является независимость способа ее получения от конкретного вида потенциальной энергии. Для справедливости (2.6) требуются только существование возмущения с отрицательной энергией (2.1) и выполнение равенства (2.3). Последнее относится к семейству соотношений для вириала и выполняется для многих недиссипативных механических систем [2, 4, 11, 17]. Такая универсальность оценки (2.6) позволяет без изменения ее вида учесть вращение среды, ее сжимаемость и другие факторы. Примеры обобщений даны ниже.

**3. Неустойчивость бароклинного вихря.** Рассматриваются вращательно-симметричные движения несжимаемой жидкости в осесимметричном сосуде  $\tau$ . В цилиндрической системе координат  $(r, z, \varphi)$  компоненты поля скорости есть  $(u_1, u_2, u_3)$ , потенциал внешних массовых сил  $\Phi = \Phi(r, z)$ . Поле плотности  $\rho$  непрерывно. Уравнения движения с использованием обозначений  $\mu \equiv (ru_3)^2$ ,  $\Psi \equiv 1/2r^2$  записываются в форме

$$(3.1) \quad D\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi - \mu \nabla \Psi, \quad D\mu = 0, \quad D\rho = 0,$$

$$u_{1r} + \frac{u_1}{r} + u_{2z} = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad \nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

являющейся одним из примеров аналогии между эффектами плотностной стратификации и вращения [13, гл. 8]. Исследуемый на устойчивость бароклинный вихрь представляет собой точное решение (3.1) вида

$$(3.2) \quad \mathbf{u} \equiv 0, \quad \mu = \mu_0(r, z), \quad \rho = \rho_0(r, z), \quad p = p_0(r, z),$$

причем поля  $\mu_0, \rho_0, p_0$  непрерывны вместе со своими первыми производными и связаны соотношением

$$(3.3) \quad \nabla p_0 + \rho_0 \nabla \Phi + \rho_0 \mu_0 \nabla \Psi = 0.$$

Линеаризация (3.1) на решении (3.2) и введение поля лагранжевых смещений  $\xi$  (1.11) приводят к задаче

$$(3.4) \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 u_{it} + m_{ij} \xi_j + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= 0, \\ \xi_{1r} + \frac{\xi_1}{r} + \xi_{2z} &= 0, \quad u_i = \xi_{it}, \\ m_{ij} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_0 \mu_0}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \text{ в } \tau, \quad \xi_i \bar{n}_i = 0 \text{ на } \partial\tau,$$

где все векторные индексы пробегает значения 1, 2. Матрица  $m_{ij}$  симметрична, в чем можно убедиться после применения оператора  $\text{rot}$  к (3.3). Для (3.4) справедлив интеграл энергии

$$(3.5) \quad E = K + \Pi = \text{const}, \quad 2K \equiv \int_{\tau} \rho_0 u_i u_i d\tau, \quad 2\Pi \equiv \int_{\tau} m_{ij} \xi_i \xi_j d\tau.$$

Для функционала  $M$  (2.2) (с суммированием от 1 до 2) с помощью (3.4), (3.5) опять получается равенство (2.3). После этого при наличии

возмущений с  $\Pi < 0$  повторение рассуждений п. 2 приводит к требуемой оценке (2.6). Таким образом, при условии (2.1) бароклиный вихрь (3.2) неустойчив, его возмущения экспоненциально нарастают. Оценка инкремента (2.10) заменяется на

$$\lambda_{\max}^2 < \max_{\tau} (-m_1, -m_2) / \min_{\tau} \rho_0$$

( $m_1, m_2$  — собственные числа матрицы  $m_{ij}$ ). Практическим критерием неустойчивости течения (3.2) является отрицательность по крайней мере одного из чисел  $m_1, m_2$  в какой-либо части  $\tau$ .

Наложенное требование гладкости полей  $\mu_0$  и  $\rho_0$  (3.2) непринципиально. Рассмотрение бароклиных вихрей со скачками  $[\rho_0] \neq 0$  и  $[\mu_0] \neq 0$  на некоторых поверхностях внутри  $\tau$  и учет поверхностного натяжения на них проводится так же, как в п. 2, и при условии (2.1) (с соответствующим выражением для  $\Pi$ ) приводит к той же оценке (2.6).

Задача устойчивости бароклиного кругового вихря в классе вращательно-симметричных возмущений ранее рассматривалась в связи с приложениями к физике атмосферы [18—21]. В этих работах также применялся прямой метод Ляпунова, а в [21] был введен функционал  $M$  (2.2). Общий результат [21] состоит в получении оценки  $M > ct^4$  ( $c$  — постоянная).

**4. Неустойчивость состояний покоя сжимаемой жидкости.** Рассматриваются трехмерные адиабатические движения идеальной сжимаемой жидкости, находящейся в области  $\tau$  с границей  $\partial\tau$ . Движения описываются решениями системы уравнений

$$(4.1) \quad D\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla\Phi, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Ds = 0,$$

дополненной термодинамическими соотношениями

$$(4.2) \quad e = e(\rho, s), \quad de = Tds - pd(1/\rho)$$

и граничными условиями

$$(4.3) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\tau,$$

где  $s, T, e$  — поля энтропии, температуры и внутренней энергии, остальные обозначения совпадают с использованными в (1.1), (1.2). Для решений (4.1)—(4.3) имеет место интеграл энергии

$$(4.4) \quad E = \int_{\tau} \rho \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + e(\rho, s) + \Phi \right) d\tau = \text{const.}$$

Изучается задача устойчивости гидростатического равновесия — точного решения (4.1)—(4.3) вида

$$(4.5) \quad \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \rho_0(x), \quad p = p_0(x), \quad s = s_0(x),$$

в котором поверхности уровня  $\rho_0, p_0, s_0$  и  $\Phi$  совпадают друг с другом. Все поля (4.5) считаются непрерывными вместе со своими первыми производными. Линеаризация уравнений (4.1) на решении (4.5) дает

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \rho_0 \mathbf{u}_t &= -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \quad s_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s_0 = 0, \\ \rho_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

( $\mathbf{u}, p, \rho, s$  — возмущения скорости, давления, плотности и энтропии). Граничные условия для (4.6) имеют тот же вид (4.3). Введение поля лагранжевых смещений  $\xi(\mathbf{x}, t)$  ( $\xi_t \equiv \mathbf{u}$ ) приводит к замене (4.3), (4.6) соотношениями [11]

$$(4.7) \quad \left. \begin{aligned} \rho_0 \xi_{tt} &= -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \quad s = -(\xi \cdot \nabla) s_0, \\ \rho &= -(\xi \cdot \nabla) \rho_0 - \rho_0 \operatorname{div} \xi \end{aligned} \right\} \text{ в } \tau, \quad \xi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\tau.$$

Интегралом энергии для (4.7) является

$$(4.8) \quad E \equiv K + \Pi + A = \text{const},$$

$$2\Pi \equiv \int_{\tau} \rho_0 \Omega^2 N_1^2 d\tau, \quad \Omega^2 = -\frac{\nabla\Phi\nabla\rho_0}{\rho_0} - \left(\frac{\nabla\Phi}{c_0}\right)^2,$$

$$2A \equiv \int_{\tau} \frac{\dot{r}^2}{\rho_0 c_0^2} d\tau, \quad p \equiv c_0^2 \rho + \rho_0^2 e_{\rho s} s.$$

Здесь  $K$  и  $N_1$  взяты из (1.10), (1.13);  $\Omega$  — частота плавучести (Брента — Зяйсяля);  $c_0$  — скорость звука. Слагаемые  $K$ ,  $\Pi$  и  $A$  интерпретируются как кинетическая, потенциальная и акустическая части полной энергии  $\mathcal{E}$  малых возмущений [22].

Устойчивость (4.5) при  $\Omega^2 > 0$ ,  $c_0^2 > 0$ ,  $e_{\rho s} > 0$  — также одна из форм теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия механической системы при наличии минимума потенциальной энергии. Прямыми вычислениями можно убедиться, что первая вариация потенциальной энергии из (4.4) на состоянии (4.5) равна нулю, а вторая совпадает с  $\Pi + A$  из (4.8).

Пусть теперь существует поле лагранжевых смещений  $\xi^*(x)$ , для которого

$$(4.9) \quad \Pi + A = \Pi^* + A^* < 0 \text{ при } \xi = \xi^*(x).$$

На языке локальных свойств равновесия (4.5) это означает, что в какой-то части  $\tau$  имеет место по крайней мере одно из трех неравенств:  $\Omega^2 < 0$ ,  $c_0^2 < 0$ ,  $e_{\rho s} < 0$ . Первое из них имеет физический смысл неустойчивой стратификации, а два последних — некоторых аномальных свойств уравнения состояния.

Для функционала  $M$  (2.2) с помощью (4.7)–(4.9) получается аналог равенства (2.3)  $\dot{M} = 4(K - \Pi - A) = 8K - 4E$ . После этого использование (4.9) и повторение рассуждений п. 2 опять приводят к оценке (2.6).

Наложенное ограничение гладкости полей  $\rho_0(x)$  и  $s_0(x)$  не принципиально. Рассмотрение состояний (4.5) со скачками  $[\rho_0] \neq 0$  и  $[s_0] \neq 0$  а некоторых поверхностях внутри проводится так же, как в п. 2, и дает у же оценку (2.6). Отметим, что обобщение результатов о неустойчивости вихря (п. 3) на случай сжимаемой жидкости также приводит к (2.6). Соответствующая постановка задачи содержится в [20].

**5. Неустойчивость упругих тел.** Теорема Лагранжа и ее обращение имеют для теории упругости гораздо большее значение, чем для гидродинамики. Покажем справедливость оценки (2.6) для упругого тела, линеаризованные уравнения движения которого запишем в форме [23]

$$(5.1) \quad \rho_0 \xi_{itt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

$$\sigma_{ik} = E_{iklm} e_{lm}, \quad 2e_{lm} \equiv \frac{\partial \xi_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l},$$

где  $\xi$  — лагранжево смещение,  $E_{iklm}$  — тензор модулей упругости, для связи между тензорами напряжений  $\sigma_{ik}$  и деформаций  $e_{ik}$  принята общая форма закона Гука. Для (5.1) справедливо энергетическое соотношение

$$(5.2) \quad E = K + \Pi, \quad \frac{dE}{dt} = \int_{\partial\tau} \xi_{it} \sigma_{ik} n_k dS,$$

$$2K \equiv \int_{\tau} \rho_0 \xi_{it} \xi_{it} d\tau, \quad 2\Pi \equiv \int_{\tau} E_{iklm} e_{ik} e_{lm} d\tau,$$

з которого видно, что для сохранения энергии достаточно потребовать на границе тела  $\partial\tau$  отсутствия смещений  $\xi = 0$  либо равенства нулю возмущения вектора силы  $\sigma_{ik} n_k = 0$ .



Пусть для  $\Pi$  (5.2) выполнено свойство (2.1). Тогда для функционала  $M$  (2.2) в силу принятых граничных условий опять получаются (2.3) и, следовательно, оценка (2.6).

Отметим, что оценка, свидетельствующая о линейном нарастании со временем функционала  $W$  (2.2), для упругих тел найдена в [5, 6, 24].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: ГИТТЛ, 1955.
3. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники/ВИНИТИ. Сер. Общая механика. — 1983. — Т. 6.
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
5. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // ПММ. — 1959. — Т. 23, вып. 3.
6. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение // Инж. сб. — 1960. — Т. 29.
7. Бабский В. Г., Коначевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
8. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.
9. Румянцев В. В. К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. — 1966. — Т. 30, вып. 1.
10. Тюнцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1966. — № 2.
11. Чаандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973.
12. Румянцев В. В., Озаранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.
13. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — Новосибирск: Наука, 1985.
14. Самсонов В. А. Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. — 1974. — № 16.
15. Владимиров В. А. Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // ПММ. — 1986. — Т. 50, вып. 5.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965.
18. Fjortoft R. On the frontogenesis and cyclogenesis in the atmosphere. Pt I. On the stability of the stationary circular vortex // Geophys. Publ. — 1944. — V. 16, N 5.
19. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ. — 1950. — V. 17 N 6.
20. Eliassen A., Kleinschmidt E. Dynamic meteorology // Handbuch der Physik. — 1957. — Bd 48.
21. Ooyama K. On the stability of the baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability // J. Atmos. Sci. — 1966. — V. 23, N 1.
22. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1984.
23. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т. 1.
24. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Замечание об устойчивости мембранных решений нелинейной теории пластин и оболочек // ПММ. — 1966. — Т. 30, вып. 1.

Поступила 29/VII 1988 г.

УДК 532.546

### О РАЗВИТИИ ВЯЗКОСТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

О. Б. Бочаров, В. В. Кузнецов

(Новосибирск)

Интерес к задаче об устойчивости двухфазных фильтрационных течений обусловлен в основном проблемой наиболее полного извлечения нефти из недр при закачке воды и других несмешивающихся с нефтью агентов в пласты. При большом отношении вязкостей вытеснение углеводородных жидкостей водой в пористой среде в принципе неустойчивый процесс. Неустойчивость фронта вытеснения приводит к формированию растущих во времени «языков» воды. Линейный анализ устойчивости для поршневого вытеснения, проведенный в [1], показал, что рост амплитуды языков имеет экспоненциальный характер. В [2] анализ устойчивости в рамках линейного приближения выполнен для модели Маскета — Леверетта с учетом размытости фрон-