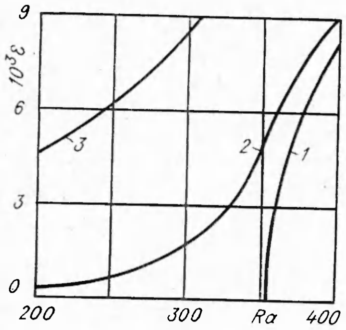
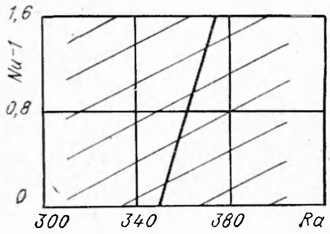



Ф и г. 2

Ф и г. 1

Проблема устойчивости покоя в этой задаче возникает не только при $\varkappa = 1$, но и при $s = 0$ (идеальная сфера). В этом случае $s_1 \equiv s_3 \equiv 0$ и наши результаты совпадают с известными итогами решения соответствующих задач [1].

Для сравнения с экспериментом [4] и для графической иллюстрации теории рассмотрен случай почти сферической полости в плексигласе, заполненной водой ($\varkappa = 3{,}26$, $\mathrm{Pr} = 7$). Соответствующие графики зависимости $\varepsilon$ от Ra представлены на фиг. 1 ($s = 0$; 0,01; 0,1, кривые *1—3* соответственно). Кривые, как и следовало ожидать, имеют характерный для такого рода задач вид [5]. (Движения и их устойчивость для отрицательных значений $\varepsilon$ при $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_*$ исследованы в общем виде в [5], и здесь эти вопросы не рассматриваются.) Фиг. 2 иллюстрирует зависимость числа Нуссельта (безразмерный конвективный теплопоток через полость) от чисел Рэлея Ra для идеальной сферы $s \equiv 0$ (теория — сплошная линия; область, в которой лежат экспериментальные точки [4], заштрихована). Теория дает вблизи $\mathrm{Ra}_*$ линейную зависимость $\mathrm{Nu} - 1$ от $\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_*$, что отличается от выводов экспериментальной работы [4].

*Поступила 30 III 1982*

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. **Сорокин В. С.** Замечания о шаровых электромагнитных волнах.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 2.
3. **Братухин Ю. К., Шлиомис М. И.** Об одном точном решении уравнений нестационарной конвекции.— ПММ, 1964, т. 28, № 5.
4. **Овчинников А. П., Шайдуров Г. Ф.** Конвективная устойчивость однородной жидкости в шаровой полости.— Учен. зап. Перм. ун-та, 1968, № 184.
5. **Чернатынский В. И., Шлиомис М. И.** Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1.


---

УДК 532.526.013

# ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

*А. М. Тумин, А. В. Федоров*

(*Москва*)

Современные представления [1] о переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный позволяют сформулировать метод расчета критических чисел Рейнольдса перехода, заключающийся в анализе развития неустойчивых возмущений в пограничном слое и в определении сечения, в котором их амплитуда впервые достигает критического значения. При этом для построения замкнутой схемы расчета требуется решение задачи о возбуждении в пограничном слое так называемых неустойчивых волн Толлмина-Шлихтинга. В экспериментальных и теоретических исследованиях [2—6] получено, что волны Толлмина — Шлихтинга могут возникать на различного рода неоднородностях течения (острая передняя кромка модели, отдельная шероховатость на обтекаемой поверхности, локализованное воздействие на пограничный слой). Эти результаты достаточно подробно представлены в [7]. В [8] предлагался механизм генерации адиабатического типа, обусловленный естественной слабой неоднородностью течения в пограничном слое на гладкой обтекаемой поверхности. Для решения прикладных задач требуется подробный качественный и количественный анализ различных типов возбуждения волн Толлмина — Шлихтинга.

В данной работе рассматривается генерация неустойчивых волн в пограничном слое на вибрирующей поверхности. На возможность постановки такой задачи указывалось в [1].

**Постановка задачи.** Рассмотрим течение в двумерном пограничном слое. Для простоты записи конкретных уравнений будем предполагать течение несжимаемым. Ниже будут указаны несущественные отличия, возникающие при рассмотрении течений сжимаемого газа. Выберем в качестве системы координат: $x$ — расстояние от передней кромки модели вниз по потоку вдоль обтекаемой поверхности, $y$ — расстояние по нормали от нее; в качестве характерных масштабов: по координате $x$ — некоторое расстояние $x_0$, по координате $y$ — $\sqrt{\nu x_0/U_0}$, где $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости, $U_0$ — характерная скорость внешнего течения. Будем измерять время в единицах $\sqrt{\nu x_0}/U_0^{3/2}$, давление — в единицах $\rho_0 U_0^2$, где $\rho_0$ — плотность. Предположим, что основное течение в отсутствие возмущений является слабонеоднородным, т. е. для продольной и нормальной компонент скоростей $U$ и $V^*$ соответственно имеют место соотношения $U = U(x, y)$, $V^* = \varepsilon V(x, y)$, $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1} = \sqrt{\nu/U_0 x_0} \ll 1$. Линеаризованные уравнения Навье — Стокса после преобразования Фурье по времени запишем в виде [8]

$$(1)\qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - H_1\mathbf{A} = \varepsilon H_2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \varepsilon H_3 \mathbf{A},$$

где $\mathbf{A}(x, y)$ — вектор-функция, состоящая из четырех компонент: $A_1$ — возмущения $x$-компоненты скорости, $A_2$ — возмущение давления, $A_3$ — возмущение $y$-компоненты скорости, $A_4 = \partial A_1/\partial y - \varepsilon \partial A_3/\partial x$;

$$H_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\omega\mathrm{Re} & 0 & \mathrm{Re}\,U' & 0 \end{Vmatrix}; \quad H_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -U & \mathrm{Re}^{-1} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{Re}\,U & \mathrm{Re} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\omega$ — частота возмущения; $U' = \partial U/\partial y$. Матрица $H_3$ в (1) содержит лишь члены, пропорциональные $\partial U/\partial x$, $V$, $\partial V/\partial y$, и связана со слабой непараллельностью течения в пограничном слое. Предположим, что в некотором сечении заданы начальные данные в виде вектор-функции

$$(2)\qquad \mathbf{A}(x_1, y) = \mathbf{A}_0(y).$$

Вибрацию обтекаемой поверхности на анализируемом участке будем моделировать в виде бегущей волны с малой амплитудой. Для рассматриваемой фурье-гармоники по времени уравнение поверхности $y_w(x)$ представим как $y_w = a \exp[i\alpha_0(x - x_1)/\varepsilon$, где $\alpha_0 > 0$; $x_1$ — некоторая фиксированная координата. Наш выбор характерных масштабов соответствует тому, что волновое число $\alpha_0$ измеряется в единицах $\sqrt{U_0/\nu x_0}$ и рассматриваемые длины волн имеют порядок толщины пограничного слоя и малы по сравнению с $x_0$. На обтекаемой поверхности должно выполняться условие прилипания для скорости возмущенного течения. Считая, что амплитуда вибрации мала по сравнению с ее длиной волны, получим уравнения

$$(3)\qquad U_w' y_w(x)\,e^{-i\omega t} + A_1(x, 0)\,e^{-i\omega t} = O(a^2),$$

$$A_3(x, 0)\,e^{-i\omega t} = \frac{\partial}{\partial t}[y_w(x)\,e^{-i\omega t}] + O(a)^2, \quad U_w' = \frac{\partial U}{\partial y}(x, 0).$$

Таким образом, граничные условия для системы (1) принимают вид

$$(3а)\qquad A_1(x, 0) = -aU_w' \exp[i\alpha_0(x - x_1)/\varepsilon],$$

$$A_3(x, 0) = -i\omega a \exp[i\alpha_0(x - x_1)/\varepsilon].$$

При $y \to \infty$ будем предполагать ограниченность решения:

$$|A_j| < \infty, \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{4}$$

Сформулированная задача (1)—(4), вообще говоря, некорректна. Поэтому на начальные данные $\mathbf{A}_0$ накладывают условия, что они допускают решение с конечным показателем роста. Практически это требование регуляризации сводится к тому, что предполагается ортогональность начальных данных к собственным функциям линеаризованных уравнений Навье — Стокса, относящимся к возмущениям, распространяющимся вверх по потоку, и в дальнейшем анализе такие решения не рассматривают [9, 10].

**Биортогональная система векторов.** Решение задачи (1)—(4) для случая, когда основное течение является слабонеоднородным по координате $x$, будет представлено в виде разложения по биортогональной системе векторов локально-однородной задачи $\{\mathbf{A}_\alpha(x, y), \mathbf{B}_\alpha(x, y)\}$, сформулированной в [8, 9]:

$$\partial \mathbf{A}_\alpha/\partial y - H_1\mathbf{A}_\alpha = i\alpha H_2\mathbf{A}_\alpha, \tag{5}$$

$$y = 0,\ A_{\alpha 1} = A_{\alpha 3} = 0,\ y \to \infty,\ |A_{\alpha j}| < \infty,\ j = 1, \ldots, 4;$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\alpha}{\partial y} + H_1^*\mathbf{B}_\alpha = i\tilde{\alpha}H_2^*\mathbf{B}_\alpha, \tag{6}$$

$$y = 0,\ B_{\alpha 2} = B_{\alpha 4} = 0,\ y \to \infty, |B_{\alpha j}| < \infty,\ j = 1, \ldots, 4,$$

где * означает транспонированную и комплексно-сопряженную матрицу; $\sim$ — комплексное сопряжение; индекс $\alpha$ определяет принадлежность собственной вектор-функции собственному значению $\alpha$. Системы уравнений (5), (6) зависят от $x$ как от параметра. Они имеют четыре линейно-независимых решения, асимптотические зависимости от $y$ которых вне пограничного слоя представляются в виде

$$\mathbf{z}_1 \sim e^{-\alpha y},\ \mathbf{z}_2 \sim e^{\alpha y},\ \mathbf{z}_3 \sim e^{\lambda y},\ \mathbf{z}_4 \sim e^{-\lambda y},\ \lambda = \sqrt{\alpha^2 + i\mathrm{Re}(\alpha - \omega)}.$$

Для определенности выберем ветвь $\mathrm{Real}(\lambda) < 0$. Системы уравнений (5), (6) допускают четыре типа решений из непрерывного спектра и один из дискретного [8, 9]. Дискретный спектр соответствует волнам Толлмина — Шлихтинга, для которых решение можно записать в виде линейной комбинации $\mathbf{A}_{\mathrm{TS}} = C_1\mathbf{z}_1 + C_3\mathbf{z}_3$. При этом $\alpha_{\mathrm{TS}}(x)$ находится из дисперсионного соотношения

$$E_{13}(\alpha_{\mathrm{TS}}) = (z_{11}z_{33} - z_{13}z_{31})_{y=0} = 0,$$

где $z_{ij}$ означает $i$-ю компоненту $j$-го вектора. В непрерывном спектре имеются волны с $\alpha = \pm ik$, $\alpha = -\frac{i\,\mathrm{Re}}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mathrm{Re}^2} - \frac{4i\omega}{\mathrm{Re}}}\right]$, где $k$ — произвольное положительное число [8, 9]. Две из них соответствуют волнам, распространяющимся вверх по потоку и имеющим экспоненциальный рост при $x \to \infty$. Имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\langle H_2\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{B}_\beta\rangle = \Delta_{\alpha\beta},\quad \langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \int_0^\infty (\mathbf{A}, \mathbf{B})\,dy,\quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{j=1}^4 A_j\tilde{B}_j,$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ означает символ Кронекера, когда одно из чисел $(\alpha, \beta)$ относится к дискретному спектру; $\Delta_{\alpha\beta} = \delta(\alpha - \beta)$ — дельта-функция, когда оба числа $(\alpha, \beta)$ относятся к непрерывному спектру [8, 9].

Чтобы построить в дальнейшем решение системы (1) в виде разложения по собственным векторам $\mathbf{A}_\alpha$, необходимо дополнить (5), (6) неоднородным при $y = 0$ решением $\mathbf{A}_v$. Вне резонанса ($\alpha_0 \neq \alpha_{\mathrm{TS}}$) построим вектор $\mathbf{A}_v(x, y)$ с помощью уравнения

$$\partial \mathbf{A}_v/\partial y - H_1\mathbf{A}_v = i\alpha_0 H_2\mathbf{A}_v, \tag{7}$$

$$y = 0,\quad A_{v1} = -aU_w',\quad A_{v3} = -ia\omega,\quad y \to \infty,\quad |A_{vj}| \to 0,\quad j = 1, \ldots, 4.$$

Решение уравнения (7) можно записать в виде

$$\mathbf{A}_v = \frac{\tilde{\alpha}}{E_{13}}\left[\left(z_{13}i\omega - U'_w z_{33}\right)\mathbf{z}_1 + \left(z_{31}U'_w - i\omega z_{11}\right)\mathbf{z}_3\right], \tag{8}$$

где $z_{ij}$ вычисляются при $y = 0$. Легко показать, что имеет место соотношение

$$\langle H_2\mathbf{A}_v,\ \mathbf{B}_\alpha\rangle i(\alpha_0 - \alpha) + (\mathbf{A}_v,\ \mathbf{B}_\alpha)_{y=0} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha$ принадлежит к одному из спектров решений (5), (6).

**Построение решения системы (1).** Будем искать решение задачи (1)—(4) в виде

$$\mathbf{A}(x, y) = {\sum_\alpha}' c_\alpha(x)\,\mathbf{A}_\alpha(x, y) + \mathbf{A}_v(x, y)\exp\left(i\int\limits_{x_1}^{\infty}\frac{\alpha_0}{\varepsilon}\,dx\right), \tag{10}$$

где $\Sigma'$ означает суммирование по дискретному и интегрирование по непрерывному спектрам. Подставляя (10) в (1), можно получить систему уравнений для определения $c_\alpha(x)$, для которых начальные значения $c_\alpha(x_1)$ будут определяться из $\mathbf{A}_0$:

$$c_\alpha(x_1) = \langle H_2(\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_v\rangle,\ \mathbf{B}_\alpha\rangle_{x=x_1}. \tag{11}$$

Нас будет интересовать генерация волн Толлмина — Шлихтинга в результате вибрации обтекаемой поверхности. Как увидим ниже, она будет весьма интенсивной благодаря предположению о наличии точки разонанса $x_*$, где $\alpha_0 = \alpha_{\mathrm{TS}}(x_*)$. Из всех возможных постановок задачи о генерации волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое на вибрирующей поверхности будем рассматривать резонансный случай, когда $x_*$ является точкой потери устойчивости течения. Это объясняется тем, что при прочих равных условиях наибольшие коэффициенты усиления достигаются именно для волны, возбуждаемой в окрестности $x = x_*$. Как показывают численные расчеты, в случае плоской пластины в несжимаемой жидкости [11] (см. также численный пример в сжимаемом газе) на интервале течения от передней кромки до точки потери устойчивости имеет место сильное затухание волн Толлмина — Шлихтинга. Поэтому если начальное сечение выбрано достаточно близко к передней кромке, а начальная амплитуда $c_{\mathrm{TS}}(x_1)$, определяемая из (11), имеет порядок единицы, то конечный результат с хорошей степенью точности не изменится, если положить $c_{\mathrm{TS}}(x_1) = 0$. Представим амплитуду $c_{\mathrm{TS}}(x)$ в виде

$$c_{\mathrm{TS}}(x) = q(x)K(x)\exp\left[i\int\limits_{x_1}^{x}W(x)\,dx\right],\quad K(x) = \exp\left[i\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\alpha_{\mathrm{TS}}}{\varepsilon}\,dx\right], \tag{12}$$

$$iW(x) = -\langle H_3\mathbf{A}_{\mathrm{TS}},\ \mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\rangle - \left\langle H_2\frac{\partial\mathbf{A}_{\mathrm{TS}}}{\partial x},\ \mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\right\rangle.$$

Тогда для $q(x)$ имеем

$$\frac{dq}{dx} = -\left[\left\langle H_2\frac{\partial\mathbf{A}_v}{\partial x},\ \mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\right\rangle + \langle H_3\mathbf{A}_v,\ \mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\rangle\right]\exp\left[i\theta(x)\right], \tag{13}$$

$$\theta(x) = \int\limits_{x_1}^{x}\left[\frac{(\alpha_0 - \alpha_{\mathrm{TS}})}{\varepsilon} - W(x)\right]dx.$$

Решая уравнение (13) с нулевыми начальными данными, запишем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_v\exp\left[i\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\alpha_0}{\varepsilon}\,dx\right] - \int\limits_{x_1}^{x}\left[\left\langle H_2\frac{\partial\mathbf{A}_v}{\partial x},\ \mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\right\rangle + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \langle H_3\mathbf{A}_v,\ \mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\rangle\right] e^{i\theta}dx\, e^{i\theta_{\mathrm{TS}}}\mathbf{A}_{\mathrm{TS}},$$

$$\theta_{TS}(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \left( \frac{\alpha_{TS}}{\varepsilon} + W \right) dx.$$

Решение (8) в окрестности точки резонанса является непригодным, так как при $x = x_*$ функция $E_{13}(\alpha_0)$ в (8) обращается в нуль. В случае резонанса ($\alpha_0 = \alpha_{TS}$) решение задачи с неоднородными граничными условиями при $y = 0$ должно обязательно содержать одновременно $\mathbf{A}_{TS}$ и некоторую вектор-функцию, обеспечивающую удовлетворение граничных условий при $y = 0$. Именно поэтому мы выписали для анализа суммарное решение $\mathbf{A}$ (14), так как оно оказывается равномерно пригодным при всех $x$.

Введем для удобства вектор $\mathbf{Q}(x, y)$, регулярный при $x = x_*$, определяемый равенством

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{Q}(x, y)/(x - x_*). \tag{15}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что при $x = x_*$ выполнены соотношения $Q_1(x_*, 0) = Q_3(x_*, 0) = 0$, т. е. в точке $x = x_*$ $\mathbf{Q} \sim \sim \mathbf{A}_{TS}$. Без ограничения общности выбираем нормировку $\mathbf{A}_{TS}$ так, что $\mathbf{Q}(x_*, y) = \mathbf{A}_{TS}\ (x_*, y)$. Выбором нормировки $\mathbf{B}_{TS}$ всегда можно обеспечить равенство

$$\langle H_2\mathbf{A}_{TS}, \mathbf{B}_{TS} \rangle = 1. \tag{16}$$

Выделим явно сингулярную часть, зависящую от «медленной» переменной $x$ из подынтегрального выражения в (14). Для этого рассмотрим разложение при $x \to x_*$:

$$\left[\left\langle H_2 \frac{\partial \mathbf{A}_v}{\partial x}, \mathbf{B}_{TS} \right\rangle + \langle H_3\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_{TS}\rangle\right] \exp\left[-i\int\limits_{x_1}^{x} W dx\right] = \tag{17}$$

$$= \left[\frac{\left\langle H_2 \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}, \mathbf{B}_{TS} \right\rangle}{x - x_*} - \frac{\langle H_2\mathbf{Q}, \mathbf{B}_{TS}\rangle}{(x - x_*)^2} + \frac{\langle H_3\mathbf{Q}, \mathbf{B}_{TS}\rangle}{x - x_*}\right] \exp\left[-i\int\limits_{x_1}^{x} W dx\right] \simeq$$

$$\simeq \left[-\frac{\langle H_2\mathbf{Q}, \mathbf{B}_{TS}\rangle_*}{(x - x_*)^2} - \frac{\left\langle \frac{\partial H_2}{\partial x}\mathbf{Q}, \mathbf{B}_{TS} \right\rangle_*}{x - x_*} - \frac{\left\langle H_2\mathbf{Q}, \frac{\partial \mathbf{B}_{TS}}{\partial x} \right\rangle_*}{x - x_*} + \frac{\langle H_3\mathbf{Q}, \mathbf{B}_{TS}\rangle_*}{x - x_*} + \right.$$

$$\left. + \frac{\langle H_2\mathbf{Q}, \mathbf{B}_{TS}\rangle_*}{x - x_*} iW(x_*) + O(1)\right] \exp\left[-i\int\limits_{x_1}^{x_*} W(x)\, dx\right],$$

где индекс * означает, что скалярное произведение вычисляется при $x = = x_*$. Используя (16) и определение $W$ в (12), получим, что выражение (17) дает асимптотику $\sim -\exp\left[-i\int\limits_{x_1}^{x_*} W dx\right] \Big/ (x - x_*)^2 + O\ (1)$:

$$\mathbf{A}(x, y) = \left[F(x, \varepsilon) + \frac{\exp\left(-i\int\limits_{x_1}^{x_*} W dx\right)}{x_1 - x_*}\right] e^{i\theta_{TS}}\mathbf{A}_{TS} + \tag{18}$$

$$+ \frac{\left[\mathbf{Q}(x, y) - \mathbf{A}_{TS}\exp\left(+i\int\limits_{x_*}^{x} W dx\right)\right]}{x - x_*} \exp\left(i\int\limits_{x_1}^{x} \frac{\alpha_0}{\varepsilon} dx\right) + D(x, \varepsilon)\, \mathbf{A}_{TS}e^{i\theta_{TS}},$$

$$F(x, \varepsilon) = -\int\limits_{x_1}^{x}\left[\left(\left\langle H_2 \frac{\partial \mathbf{A}_v}{\partial x}, \mathbf{B}_{TS} \right\rangle + \langle H_3\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_{TS}\rangle\right) \exp\left(-i\int\limits_{x_1}^{x} W dx\right) + \right.$$

$$+\frac{\exp\left(-i\int\limits_{x_1}^{x_*}Wdx\right)}{(x-x_*)^2}\Bigg]\exp\left[i\int\limits_{x_1}^{x}\frac{(\alpha_0-\alpha_{\mathrm{TS}})}{\varepsilon}\,dx\right]dx,$$

$$D(x,\varepsilon)=i\int\limits_{x_1}^{x}\frac{(\alpha_0-\alpha_{\mathrm{TS}})}{\varepsilon\,(x-x_*)}\exp\left[i\int\limits_{x_1}^{x}\frac{(\alpha_0-\alpha_{\mathrm{TS}})}{\varepsilon}\,dx\right]dx\exp\left(-i\int\limits_{x_1}^{x_*}Wdx\right).$$

Можно убедиться, что решение (18) регулярно при $x=x_*$ и удовлетворяет неоднородным граничным условиям при $y=0$ для всех $x\neq x_*$. Учитывая, что $\mathbf{A}_{\mathrm{TS}}$ определяется с однородными граничными условиями при $y=0$ для всех $x$, получаем $\partial A_{\mathrm{TS}1}/\partial x=\partial A_{\mathrm{TS}3}/\partial x=0$ при $y=0$. Следовательно, чтобы доказать, что решение (18) удовлетворяет граничным условиям при $y=0$ и в точке $x=x_*$, необходимо рассмотреть разложение (18) в окрестности $x_*$ и убедиться, что слагаемое с $\partial\mathbf{Q}(x_*,0)/\partial x$ обеспечивает выполнение граничных условий и при $x=x_*$. Эта проверка выполняется непосредственными вычислениями исходя из определения $\mathbf{Q}$ в (15), выражения (8) для $\mathbf{A}_v$ с учетом, что $E_{13}(\alpha_0)=0$ прп $x=x_*$. Таким образом, решение задачи (1)—(4) построено.

**Асимптотическая оценка амплитуды волны Толлмина — Шлихтинга.** Подынтегральные выражения в $F$ и $D$ из (18) содержат множитель $\exp\left(i\int\limits_{x_1}^{x}\frac{\alpha_0-\alpha_{\mathrm{TS}}}{\varepsilon}dx\right)$, который позволяет получить асимптотические оценки при $\varepsilon\to0$. В окрестности $x=x_*$ имеем

$$i(\alpha_0-\alpha_{\mathrm{TS}})=-i\frac{d\alpha_{\mathrm{TS}}}{dx}(x_*)(x-x_*)+O[(x-x_*)^2],$$

причем $\mathrm{Real}\left(i\frac{d\alpha_{\mathrm{TS}}}{dx}\right)>0$. Легко получить при $x-x_*\gg\sqrt{\varepsilon}$ [12], что $F\sim\sqrt{\varepsilon}$, $D\sim1/\sqrt{\varepsilon}$, т. е. основной вклад в амплитуду волны Толлмина — Шлихтинга в решение (18) дает слагаемое с множителем $D(x,\varepsilon)$, которое достигает своего значения $\sim1/\sqrt{\varepsilon}$ в окрестности $x_*$. Используя (9), при $x\to x_*$ получим

$$i\frac{d\alpha_{\mathrm{TS}}}{dx}(x_*)=-a\left(U_w'B_{\mathrm{TS}1}+i\omega B_{\mathrm{TS}3}\right)_{y=0,x=x_*}.$$

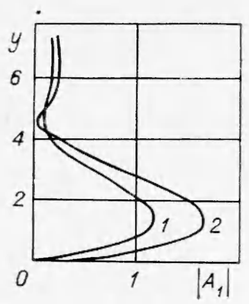
Тогда основное слагаемое в (18) при $x-x_*\gg\sqrt{\varepsilon}$, описывающее возбужденную волну Толлмина — Шлихтинга, можно записать в виде

$$g\exp\left[i\int\limits_{x_*}^{x}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{TS}}}{\varepsilon}+W\right)dx\right]\mathbf{A}_{\mathrm{TS}},$$

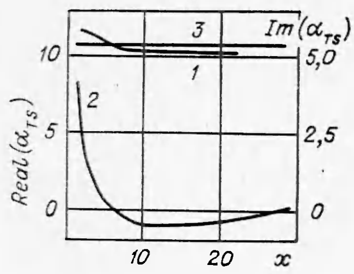
где амплитуда $g$ определяется с помощью метода перевала [12]. Для $|g|/a$ получаем выражение

$$\frac{|g|}{a}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\pi}{\left|\frac{d\alpha_{\mathrm{TS}}}{dx}(x_*)\right|}}\left(U_w'B_{\mathrm{TS}1}+i\omega B_{\mathrm{TS}3}\right)_{y=0,x=x_*}. \tag{19}$$

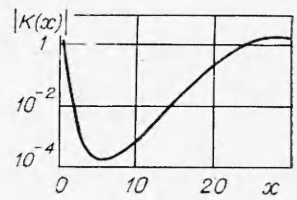
**Учет сжимаемости. Численный пример.** Рассмотрение сжимаемых течений приведет лишь к изменению конкретного вида матриц $H_1$, $H_2$, $H_3$ в (1) и определения вектора $\mathbf{A}$. В формулировке граничных условий при $y=0$ в (5), (7) при обтекании поверхности из высокотеплопроводного материала необходимо потребовать равенства нулю возмущения температуры. При этом фундаментальная система решений для (5), (6) будет состоять из шести линейно-независимых векторов [13], что приведет к изменению конкретного вида $\mathbf{A}_v$ в (8). Типы собственных решений (5) для сжимаемых течений рассмотрены в [10]. Однако весь асимптотический




Фиг. 1




Фиг. 2




Фиг. 3

анализ остается прежним, и результат (19) остается справедливым, если считать, что первая и третья компоненты в векторе **A** соответствуют возмущениям продольной и нормальной по отношению к поверхности скоростей. В данной работе проведен численный расчет для случая вибрирующей поверхности теплоизолированной пластины при числе Прандтля 0,72, температуре торможения набегающего потока 310 K, числе Маха на внешней границе пограничного слоя 0,6 в предположении, что коэффициент вязкости зависит от температуры по формуле Сазерленда. На фиг. 1 приведена зависимость $|A_{\mathrm{TS}1}|$ и $|A_{v1}|$ от $y$ при $\mathrm{Re}=800$ и безразмерном частотном параметре $f=\omega\mu_0/\rho_0U_0^2=20\cdot10^{-6}$ ($\mu_0$ — коэффициент вязкости в набегающем потоке; кривые *1*, *2* соответственно). Расчет соответствует $x=1$, $a=1{,}2$ и $\partial A_{\mathrm{TS}1}/\partial y=2$ при $y=0$. На фиг. 2 представлены $\mathrm{Real}\,(\alpha_{\mathrm{TS}})$ и $\mathrm{Im}(\alpha_{\mathrm{TS}})$ (кривые *1*, *2* соответственно) для частотного параметра $f=20\cdot10^{-6}$ и при выборе параметра $\mathrm{Re}=400$, а также зависимость $\alpha_0$ от $x$ (кривая *3*). На фиг. 3 приведена зависимость $|K|$ из (12) при тех же значениях параметров для $x_1=0{,}42$, которая подтверждает высказанные выше соображения о возможном пренебрежении $c_{\mathrm{TS}}(x_1)$ (волна Толлмина — Шлихтинга, возбужденная в окрестности передней кромки).

Выражение (19) для амплитуды возбужденной волны Толлмина — Шлихтинга не является инвариантным относительно выбора нормировки собственных функций $\mathbf{A}_{\mathrm{TS}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{TS}}$. Чтобы получить инвариантную величину, выражение (19) необходимо умножить на $|F_{\mathrm{TS}}/\langle H_2\mathbf{A}_{\mathrm{TS}},\mathbf{B}_{\mathrm{TS}}\rangle|$, где $F_{\mathrm{TS}}$ — амплитуда возмущения интересующей нас физической величины, вычисленная по компонентам собственного вектора $\mathbf{A}_{\mathrm{TS}}$. В данной работе в качестве $F_{\mathrm{TS}}$ выбиралась $x$-компонента возмущения массового расхода в окрестности его максимума. Результаты расчетов при различных частотных параметрах $f$ приведены в таблице. Указаны значения параметра Re, соответствующие выбору $x_0=x_*$, и приведены резонансные значения $\alpha_0$. Величина $q_m$ равна амплитуде возмущения продольной компоненты массового расхода в окрестности его максимума для возбужденной волны Толлмина — Шлихтинга.

| $f\cdot10^6$ | Re | $\alpha_0\cdot10^2$ | $\lvert q_m\rvert/a$ |
|---|---|---|---|
| 20 | 962 | 6,45 | 2,14 |
| 40 | 645 | 7,85 | 1,77 |
| 60 | 515 | 8,89 | 1,57 |

В данной работе при формулировке граничных условий (3) отбрасывались члены $\sim O(a^2)$ и считалось, что профили скорости и температуры основного течения совпадают с соответствующими профилями при отсутствии вибрации. Этот вопрос подробно рассматривался асимптотическими методами в [14], где показано, что такое приближение справедливо для $a\ll\delta_n$, где $\delta_n=(\omega\mathrm{Re})^{-1/2}$ — толщина вязкого пристеночного слоя. При таком ограничении будет выполнено неравенство $c_{\mathrm{TS}}\ll1$, что согласуется с линейной постановкой рассмотренной задачи.

Авторы выражают свою признательность В. Н. Жигулеву за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

*Поступила 26 IV 1982*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Жигулев В. Н.** Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.— В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
2. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П.** Преобразование внешних возмущений в волны пограничного слоя.— Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 2.
3. **Довгаль А. В., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Экспериментальное исследование реакции пограничного слоя на внешние периодические возмущения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4.
4. **Айзин Л. Б., Поляков Н. Ф.** Генерация волны Толлмина — Шлихтинга звуком на отдельной неровности поверхности, обтекаемой потоком.— Препринт № 17. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1979.
5. **Fasel H.** Reaktion von zweidimensional laminaren, inkompressiblen Grenzchichten auf periodische Störungen in der Aussenströmung.— ZAMM, 1977, Bd 57, H. 5.
6. **Максимов В. П.** Возникновение волн Толлмина — Шлихтинга в осциллирующих пограничных слоях.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1979.
7. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
8. **Жигулев В. Н., Сидоренко Н. В., Тумин А. М.** О генерации волн неустойчивости в пограничном слое внешней турбулентностью.— ПМТФ, 1980, № 6.
9. **Salwen H., Grosh C. E.** The continuous spectrum of the Orr — Sommerfeld equation. Pt 2. Eigenfunction expansions.— J. Fluid Mech., 1981, vol. 104, pt 1.
10. **Сидоренко Н. В., Тумин А. М.** Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа.— В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
11. **Тумин А. М., Шепелев В. Е.** Численный анализ развития возмущений в несжимаемом пограничном слое на плоской пластине.— Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 3.
12. **Евграфов М. А.** Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Гапонов С. А., Маслов А. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
14. **Терентьев Е. Д.** Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.


---

УДК 534.2 : 532, 532 : 526

# ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА ПРИ РАССЕЯНИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Н. А. Завольский, В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина*

(*Горький*)

Как известно, возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга акустическими и вихревыми полями может существенно влиять на переход к турбулентному течению в пограничном слое. Большое число работ посвящено исследованию процесса возбуждения волн Толлмина — Шлихтинга (ТШ-волн) в пограничном слое на пластине с гладкой поверхностью (см. [1, 2]). Лабораторные и численные эксперименты показали, что волны пограничного слоя возникают в окрестности передней кромки пластины [1, 3, 4]. Появление ТШ-волн можно рассматривать как результат рассеяния внешнего поля на сосредоточенной неоднородности — передней кромке пластины. Распределенное возбуждение на самой пластине не было обнаружено [3]. Причина состоит в том, что распределенное возбуждение на гладкой пластине может быть вызвано только линейным взаимодействием внешних возмущений с волнами пограничного слоя, которое неэффективно ввиду большого различия фазовых скоростей.

Ниже исследуется возбуждение ТШ-волн при рассеянии акустических и вихревых возмущений в пограничном слое на поверхности с распределенной волнистостью, характерный масштаб которой в направлении течения меньше или порядка длины ТШ-волны. Суть процесса рассеяния сводится к комбинационному сложению гармоник пространственного спектра неоднородности с гармониками внешнего поля. При этом в объеме пограничного слоя и на поверхности пластины возникают комбинационные «силы», которые могут быть в резонансе с индуцированной волной, несмотря на отсутствие резонанса этой волны с внешним полем. В случае распределенной неоднородности происходит пространственное накопление эффекта рассеяния (распределенная генерация). Интерес к данному механизму вызван рядом причин. Во-первых, после возникновения волны на передней кромке пластины она успевает сильно затухнуть на