УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ ПЛАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

М. Пан, Ч. В. Цзинь, Ю. Ц. Чзан

Чжэцзянский университет, 310058 Ханчжоу, Китай
E-mails: ppmmzju@163.com, ccwwjin@163.com, cyqzhang@zju.edu.cn

Исследуется разрушение под действием внутреннего и внешнего давления замкнутого толстостенного цилиндрического сосуда. Получены выражения для величины давления, при которой происходит разрушение (разрушающее давление), и эквивалентной деформации на внутренней и внешней поверхностях сосуда. Исследовано влияние пластической анизотропии, деформационного упрочнения и внешнего давления на величину разрушающего давления. Установлено, что в случае замкнутого толстостенного цилиндрического сосуда разрушающее давление зависит от пластической анизотропии и внешнего давления. Соответствующая эквивалентная деформация зависит от пластической анизотропии, а именно от показателя степени в законе деформационного упрочнения материала, а также от отношения внутреннего радиуса сосуда к его внешнему радиусу.

Ключевые слова: толстостенный цилиндрический сосуд, разрушающее давление, пластическая анизотропия, деформационное упрочнение.

DOI: 10.15372/PMTF20210217

Введение. Цилиндрические сосуды широко используются в нефтехимической промышленности, самолето- и кораблестроении и т. д. Поскольку цилиндрические сосуды применяются для хранения и транспортировки воды, нефти и газа, обеспечению их безопасной эксплуатации уделяется большое внимание [1–5]. Известно, что контактирование сосудов с агрессивной средой может привести к их разрушению. Для того чтобы обеспечить сохранность сосудов высокого давления, необходимо оценить величину давления, при которой может произойти их разрушение (разрушающее давление). С использованием критерия текучести Мизеса и теории пластической неустойчивости в работе [6] вычислено разрушающее давление для толстостенного цилиндрического сосуда высокого давления. В [7] получено аналитическое решение задачи о разрушении находящегося под действием осевой нагрузки, крутящего момента, внутреннего и внешнего давления толстостенного цилиндра, изготовленного из упрочняющегося материала, удовлетворяющего критерию текучести Мизеса. В работе [8] для случая тонкостенного цилиндрического сосуда получено аналитическое выражение для максимального давления, при котором возникает пластическая неустойчивость. С использованием критериев текучести Треска и Мизеса

© Пан М., Цзинь Ч. В., Чзан Ю. Ц., 2021

в [9] получены выражения для разрушающего давления в случае неповрежденных (не содержащих дефекты) трубок. Установлено, что значение давления, найденное с помощью критерия Мизеса для сосудов, изготовленных из мягкой стали, является верхней оценкой разрушающего давления для толстостенного цилиндрического сосуда. В работе [10] получено аналитическое решение упругопластической задачи о деформировании толстостенной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления. Предполагалось, что материал оболочки обладает линейным деформационным упрочнением. В [11] при определении разрушающего давления для неповрежденных трубок использовался критерий текучести осредненных напряжений сдвига. В работе [12] получено решение задачи о разрушении тонкостенных неповрежденных труб, торцы которых закрыты крышками. В [13] предложена модель разрушения труб с использованием весового критерия текучести и с учетом конечных деформаций.

Следует отметить, что материал цилиндрических сосудов может обладать пластической анизотропией, появившейся на стадии их изготовления. В [14] определено разрушающее давление для длинной тонкостенной бездефектной трубы, материал которой обладает пластической анизотропией.

В данной работе с использованием теории пластичности Хилла [15], учитывающей ортогональную анизотропию материала, получено выражение для разрушающего давления в случае толстостенного цилиндрического сосуда, находящегося по действием внутреннего и внешнего давления.

1. Зависимость напряжений от деформаций. Рассматривается цилиндрический сосуд, находящийся под действием внутреннего давления P и внешнего давления αP $(0 \leqslant \alpha < 1)$. Торцы цилиндрического сосуда закрыты крышками. Внутренний и внешний радиусы цилиндра обозначены через R_{in} и R_{out} соответственно. Предполагается, что материал, из которого изготовлен сосуд, обладает пластической анизотропией. Зависимость напряжения от деформации описывается соотношением [6]

$$\sigma = K\varepsilon^n, \tag{1}$$

где σ, ε — эквивалентные напряжение и деформация соответственно; K — коэффициент жесткости; n — степень деформационного упрочнения. Параметры n и K определяются через номинальные напряжения и инженерную деформацию с использованием экспериментальной кривой напряжение — деформация.

Зависимость напряжения от деформации, полученная в экспериментах на одноосное растяжение, обычно записывается с использованием деформации ε и напряжения σ, которые в предположении, что деформирование происходит без изменения объема, определяются следующим образом:

$$\varepsilon = \ln(1 + \varepsilon'); \tag{2}$$

$$\sigma = \sigma'(1 + \varepsilon') \tag{3}$$

(ε' — инженерная деформация; σ' — номинальное напряжение).

2. Анализ процесса разрушения сосуда. В соответствии с теорией пластичности Хилла для материалов с ортогональной анизотропией [15] выражение для эквивалентного напряжения в случае цилиндрической оболочки записывается в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}\Big(\frac{F(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + G(\sigma_r - \sigma_a)^2 + H(\sigma_a - \sigma_\theta)^2}{F + G + H}\Big)^{1/2}, \tag{4}$$

где σ_a, σ_θ, σ_r — осевое, окружное и радиальное главные напряжения соответственно; F, G, H — параметры анизотропии.

В предположении пропорционального нагружения выражение для эквивалентной деформации имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(F+G+H)^{1/2}\Big(\frac{F(G\varepsilon_\theta - H\varepsilon_r)^2 + G(H\varepsilon_r - F\varepsilon_a)^2 + H(F\varepsilon_a - G\varepsilon_\theta)^2}{(FG+GH+HF)^2}\Big)^{1/2}, \qquad (5)$$

где ε_a, ε_θ, ε_r — осевая, окружная и радиальная главные деформации соответственно.

Введя параметры

$$r_a = H/G, \qquad r_\theta = H/F, \qquad (6)$$

соотношения (4), (5) запишем следующим образом:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}\Big(\frac{r_a(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + r_\theta(\sigma_r - \sigma_a)^2 + r_a r_\theta(\sigma_a - \sigma_\theta)^2}{r_a + r_\theta + r_a r_\theta}\Big)^{1/2}; \qquad (7)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(\frac{r_a + r_\theta + r_a r_\theta}{r_a r_\theta}\Big)^{1/2}\Big(\frac{r_\theta(\varepsilon_\theta - r_a\varepsilon_r)^2 + r_a(r_\theta\varepsilon_r - \varepsilon_a)^2 + (r_a\varepsilon_a - r_\theta\varepsilon_\theta)^2}{(1 + r_a + r_\theta)^2}\Big)^{1/2}. \qquad (8)$$

С учетом осевой симметрии задачи и конечных деформаций уравнение равновесия в цилиндрических координатах имеет вид

$$(r+u)\,\frac{d\sigma_r}{d\,(r+u)} = \sigma_\theta - \sigma_r, \qquad (9)$$

где r, u, $r+u$ — начальный радиус точки, ее смещение и текущий радиус соответственно.

В случае конечных смещений радиальная и окружная деформации вычисляются по формулам

$$\varepsilon_r = \ln\Big(1 + \frac{du}{dr}\Big); \qquad (10)$$

$$\varepsilon_\theta = \ln\Big(1 + \frac{u}{r}\Big). \qquad (11)$$

Из (10), (11) следует

$$(r+u)\,\frac{d\varepsilon_\theta}{d\,(r+u)} = 1 - \mathrm{e}^{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}. \qquad (12)$$

Во многих экспериментах, проводимых с замкнутыми цилиндрическими сосудами, замечено, что вблизи торцов осевая деформация ε_a очень мала, поэтому ею можно пренебречь [16]. Тогда из условия несжимаемости материала следует [4]

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta; \qquad (13)$$

$$\sigma_a = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2. \qquad (14)$$

Из уравнений (7), (14) получаем

$$\sigma = \lambda(\sigma_\theta - \sigma_r), \qquad (15)$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{8}\,\frac{4r_a r_\theta + r_a + r_\theta}{r_a r_\theta + r_a + r_\theta}}\,.$$

Подставляя $\varepsilon_a = 0$ и $\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta$ в уравнение (8), имеем

$$\varepsilon = \beta\varepsilon_\theta, \qquad (16)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{(r_a r_\theta + r_a + r_\theta)(r_a + 1)}{(1 + r_a + r_\theta) r_a}}\,.$$

Вводя безразмерную переменную

$$x = (r + u)/R_{in} \tag{17}$$

и подставляя (13), (17) в уравнение (12), получаем

$$x\,\frac{d\varepsilon_\theta}{dx} = 1 - \mathrm{e}^{2\varepsilon_\theta}\,. \tag{18}$$

Проинтегрировав уравнение (18), находим окружную деформацию ε_θ:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}\ln\Bigl(\frac{x^2}{x^2 + C_1}\Bigr) \tag{19}$$

(C_1 — произвольная константа). Из уравнения (11) получаем выражение для окружной деформации на внутренней поверхности сосуда

$$\varepsilon_{\theta\,in} = \ln x_{in}, \tag{20}$$

где

$$x_{in} = \frac{R_{in} + u_{in}}{R_{in}},$$

u_{in} — смещение точки на внутренней поверхности $r = R_{in}$. Из (19), (20) находим

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}\ln\Bigl(\frac{x^2}{x^2 - x_{in}^2 + 1}\Bigr). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (16), получаем выражение для эквивалентной деформации ε:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2}\ln\Bigl(\frac{x^2}{x^2 - x_{in}^2 + 1}\Bigr). \tag{22}$$

Для определения давления, при котором имеет место пластическая неустойчивость, используем условие несжимаемости материала. Поскольку осевой деформацией можно пренебречь, а следовательно, длина сосуда в осевом направлении не меняется, условие, что объем материала сосуда до потери устойчивости и после ее потери один и тот же, сводится к условию равенства площадей поперечного сечения сосуда до потери устойчивости и после ее потери:

$$\pi[(R_{out} + u_{out})^2 - (R_{in} + u_{in})^2] = \pi(R_{out}^2 - R_{in}^2). \tag{23}$$

Здесь u_{out} — радиальное смещение на внешней поверхности сосуда $r = R_{out}$.

В безразмерных переменных условие (23) принимает вид

$$x_{out}^2 - x_{in}^2 = \varkappa^2 - 1, \tag{24}$$

где

$$x_{out} = \frac{R_{out} + u_{out}}{R_{in}}, \qquad \varkappa = \frac{R_{out}}{R_{in}}.$$

Из (21), (24) следуют выражения для эквивалентной деформации на внутренней $r = R_{in}$ и внешней $r = R_{out}$ поверхностях:

$$\varepsilon_{in} = \beta \ln x_{in}; \tag{25}$$

$$\varepsilon_{out} = \frac{\beta}{2} \ln \Big(1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{2\varepsilon_{in}/\beta}}{\varkappa^2}\Big). \tag{26}$$

Из (9), (12), (13), (15), (16) следует

$$\frac{d\sigma_r}{d\varepsilon} = \frac{\sigma}{\lambda\beta(1 - \mathrm{e}^{2\varepsilon/\beta})}. \tag{27}$$

Проинтегрировав уравнение (27) с учетом уравнения (1) и краевых условий $\sigma_r = -P$, $\varepsilon = \varepsilon_{in}$ на внутренней поверхности и $\sigma_r = -\alpha P$, $\varepsilon = \varepsilon_{out}$ на внешней поверхности, получаем

$$P = \frac{K}{1-\alpha} \int\limits_{\varepsilon_{in}}^{\varepsilon_{out}} \frac{\varepsilon^n}{\lambda\beta(1 - \mathrm{e}^{2\varepsilon/\beta})}\, d\varepsilon. \tag{28}$$

Параметр K в уравнении (28) вычисляется по формуле [6]

$$K = \frac{\sigma_u}{n^n} = \Big(\frac{\mathrm{e}}{n}\Big)^n \sigma'_u,$$

где σ_u, σ'_u — истинный и номинальный пределы прочности при растяжении соответственно; e — основание натурального логарифма. Таким образом, уравнение (28) записывается в виде

$$P = \frac{1}{1-\alpha} \Big(\frac{\mathrm{e}}{n}\Big)^n \sigma'_u \int\limits_{\varepsilon_{in}}^{\varepsilon_{out}} \frac{\varepsilon^n}{\lambda\beta(1 - \mathrm{e}^{2\varepsilon/\beta})}\, d\varepsilon. \tag{29}$$

Давление, при котором происходит разрушение сосуда высокого давления, обычно определяется как предельная нагрузка или максимальная несущая способность сосуда высокого давления. В точке неустойчивости внутреннее давление P достигает максимального значения. Из уравнения (26) следует, что деформация ε_{out} является функцией ε_{in}, из уравнения (29) следует, что давление P также является функцией ε_{in}. Таким образом, в точке пластической неустойчивости $\partial P/\partial \varepsilon_{in} = 0$. Из этого уравнения с использованием пакета Mathematica можно определить эквивалентную деформацию на внутренней поверхности ε_{in} в момент разрушения. Подставив эти значения в уравнение (29) и проинтегрировав полученное уравнение, определим давление P_b, при котором происходит разрушение (пластическая неустойчивость).

3. Обсуждение результатов. В случае отсутствия пластической анизотропии ($r_a = r_\theta = 1$) и внешнего давления ($\alpha = 0$) из (29) следует выражение для внутреннего давления в случае изотропного материала, удовлетворяющего критерию текучести Мизеса [4]:

$$P = \Big(\frac{\mathrm{e}}{n}\Big)^n \sigma'_u \int\limits_{\varepsilon_{in}}^{\varepsilon_{out}} \frac{\varepsilon^n}{1 - \mathrm{e}^{\sqrt{3}\,\varepsilon}}\, d\varepsilon.$$

Из соотношений (25), (26) следует, что эквивалентные деформации на внутренней и внешней поверхностях сосуда не зависят от внешнего давления. При $r_a = r_\theta = 1$ выражения для эквивалентных деформаций совпадают с выражениями, полученными в [4]:

$$\varepsilon_{in} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln x_{in}, \qquad \varepsilon_{out} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \Big(1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{\sqrt{3}\,\varepsilon_{in}}}{\varkappa^2}\Big).$$

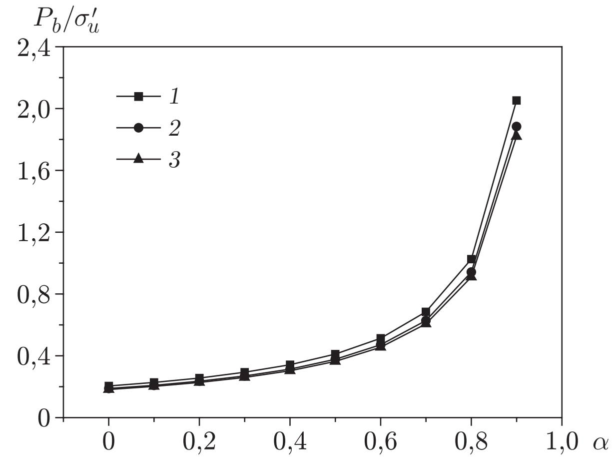

Рис. 1

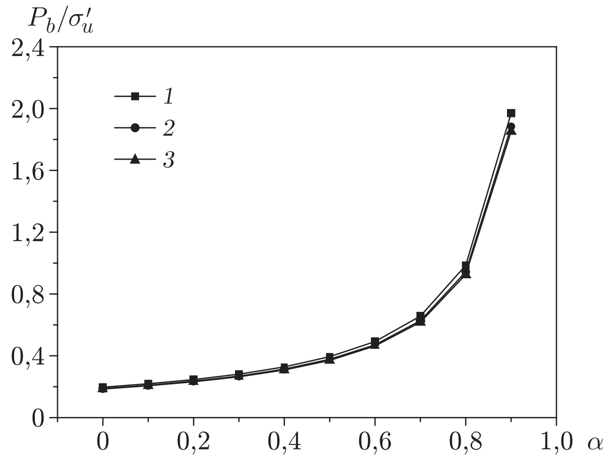

Рис. 2

Рис. 1. Зависимости разрушающего давления от параметра α при $n = 0{,}2$, $\varkappa = 1{,}2$ и различных значениях параметра анизотропии r_a:
1 — $r_a = 0{,}5$, *2* — $r_a = 1{,}0$, *3* — $r_a = 1{,}5$

Рис. 2. Зависимости разрушающего давления от параметра α при $n = 0{,}2$, $\varkappa = 1{,}2$ и различных значениях параметра анизотропии r_θ:
1 — $r_\theta = 0{,}5$, *2* — $r_\theta = 1{,}0$, *3* — $r_\theta = 1{,}5$

На рис. 1, 2 приведены зависимости безразмерного разрушающего давления от параметра α при $\varkappa = 1{,}2$, $n = 0{,}2$ и различных значениях параметров анизотропии r_a и r_θ. Разрушающее давление увеличивается с увеличением внешнего давления, но уменьшается с увеличением параметров анизотропии r_a, r_θ. Зависимости эквивалентной деформации на внутренней и внешней поверхностях сосуда от параметров анизотропии приведены на рис. 3. Эквивалентные деформации как на внутренней, так и на внешней поверхности сосуда уменьшаются с увеличением параметра r_a и увеличиваются с увеличением параметра r_θ.

На рис. 4 представлена зависимость разрушающего давления для толстостенного цилиндрического сосуда от показателя степени n в законе упрочнения материала. Видно, что разрушающее давление уменьшается с увеличением показателя степени n. На рис. 5 показана зависимость эквивалентной деформации на внутренней и внешней поверхностях толстостенного цилиндрического сосуда от показателя степени n в законе упрочнения. Как на внутренней, так и на внешней поверхности эквивалентная деформация увеличивается с увеличением показателя n.

На рис. 6 приведена зависимость разрушающего давления от отношения внешнего радиуса сосуда к внутреннему $\varkappa$. Видно, что разрушающее давление увеличивается с увеличением параметра $\varkappa$. На рис. 7 представлены зависимости эквивалентной деформации на внутренней и внешней поверхностях сосуда при разрушении от отношения внешнего радиуса сосуда к внутреннему $\varkappa$. С увеличением параметра $\varkappa$ эквивалентная деформация на внутренней поверхности увеличивается, а на внешней уменьшается.

Заключение. В работе исследован процесс разрушения под действием внутреннего и внешнего давления замкнутого толстостенного цилиндрического сосуда при различных параметрах задачи. С использованием теории пластичности Хилла для материалов с ортогональной анизотропией получено аналитическое выражение для разрушающего давления. Вычислена эквивалентная деформация на внутренней и внешней поверхностях сосуда. Результаты исследования представлены в виде графиков зависимостей разрушающего дав-

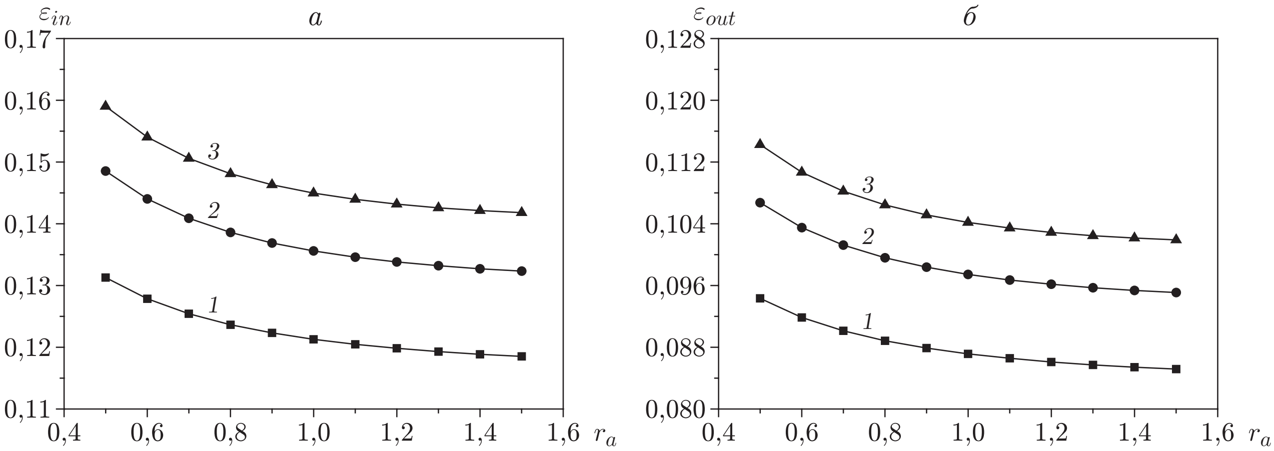

Рис. 3. Зависимости эквивалентной деформации на внутренней (*а*) и внешней (*б*) поверхностях сосуда от параметра анизотропии r_a при $\varkappa = 1{,}2$, $n = 0{,}2$: *1* — $r_\theta = 0{,}5$, *2* — $r_\theta = 1{,}0$, *3* — $r_\theta = 1{,}5$

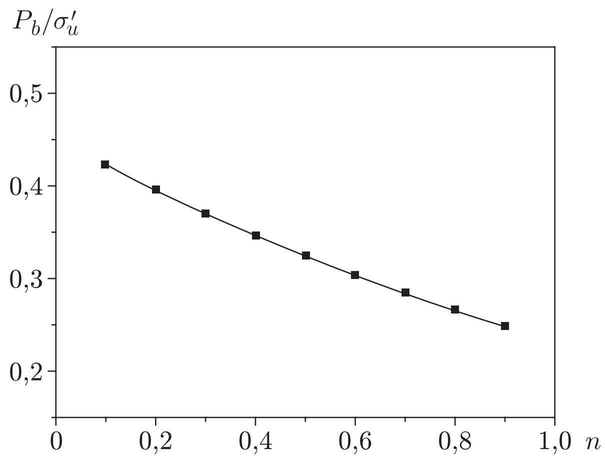

Рис. 4

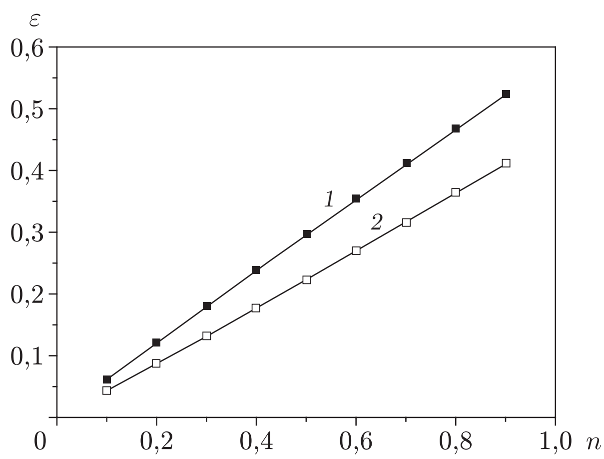

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость разрушающего давления для толстостенного цилиндрического сосуда от показателя степени n в законе упрочнения при $r_a = 1{,}0$, $r_\theta = 0{,}5$, $\varkappa = 1{,}2$, $\alpha = 0{,}5$

Рис. 5. Зависимости эквивалентной деформации на внутренней (*1*) и внешней (*2*) поверхностях сосуда от показателя степени n в законе упрочнения при $r_a = 1{,}0$, $r_\theta = 0{,}5$, $\varkappa = 1{,}2$

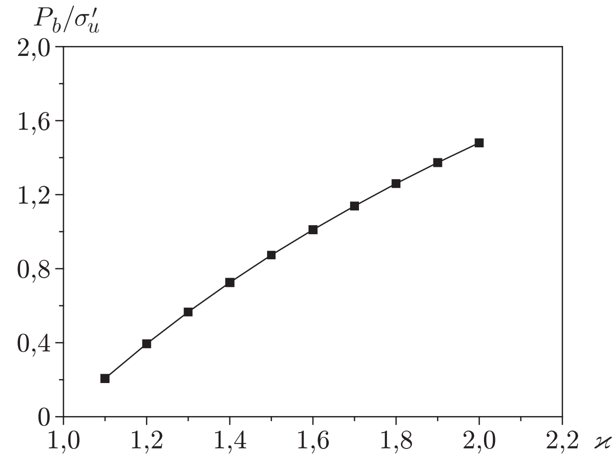

Рис. 6

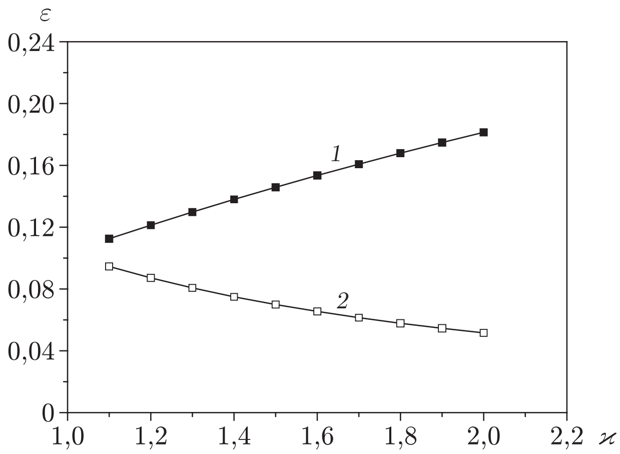

Рис. 7

Рис. 6. Зависимость разрушающего давления от отношения внешнего радиуса сосуда к внутреннему при $r_a = 1{,}0$, $r_\theta = 0{,}5$, $n = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}5$

Рис. 7. Зависимости эквивалентной деформации на внутренней (*1*) и внешней (*2*) поверхностях сосуда от отношения внешнего радиуса сосуда к внутреннему при $r_a = 1{,}0$, $r_\theta = 0{,}5$, $n = 0{,}2$

ления от показателя степени в законе упрочнения материала сосуда и отношения внешнего радиуса к внутреннему.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Faupel J. H.** Yielding and bursting characteristics of heavy walled cylinders // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1956. V. 78, N 5. P. 1031–1064.
2. **Yeh M. K., Kyriakides S.** On the collapse of inelastic thick-walled tubes under external pressure // J. Energy Resources Technol. 1986. V. 108, N 1. P. 35–47.
3. **Kalnins A., Updike D. P.** Limit of pressures of cylindrical and spherical shells // Trans. ASME. J. Pressure Vessel. Technol. 2001. V. 123, N 3. P. 288–292.
4. **Christopher T., Rama Sarma B. S. V., Potti P. K. G., et al.** A comparative study on failure pressure estimations of unflawed cylindrical vessels // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2002. V. 79, N 1. P. 53–66.
5. **Zhu X. K., Leis B. N.** Strength criteria and analytic predictions of failure pressures in line pipes // Intern. J. Offshore Polar Engrs. 2004. V. 14, N 2. P. 125–131.
6. **Svensson N. L.** Bursting pressure of cylindrical and spherical vessels // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1958. V. 80, N 3. P. 89–96.
7. **Sidebottom O. M., Chu S. C.** Bursting pressure of thick-walled cylinders subjected to internal and external pressures, axial load and torsion // Experiment. Mech. 1975. V. 15, N 6. P. 209–218.
8. **Mellor P. B.** Tensile instability in thin-walled tubes // J. Mech. Engng Sci. 1962. V. 4, N 3. P. 251–256.
9. **Stewart G., Klever F. J.** An analytical model to predict the burst capacity of pipeline // Proc. of the Intern. conf. of offshore mechanics and Arctic engineering, Houston (USA), 27 Feb. — 3 Mar. 1994. S. l., 1994. V. 5. P. 177–188.
10. **Gao X. L.** Strain gradient plasticity solution for an internally pressurized thick-walled cylinder of an elastic linear-hardening material // Z. angew. Math. Phys. 2007. Bd 58, N 1. S. 161–173.

11. **Zhu X. K., Leis B. N.** Average shear stress yield criterion and its application to plastic collapse analysis of pipelines // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2006. V. 83, N 9. P. 663–671.
12. **Wang L. Z., Zhang Y. Q.** Plastic collapse analysis of thin-walled pipes based on unified yield criterion // Intern. J. Mech. Sci. 2011. V. 53, N 5. P. 329–406.
13. **Deng K. H., Lin Y. H., Li B., Wang X. H.** Investigation on the calculation model of burst pressure for tube and casing under practical service environment // Intern. J. Hydrogen Energy. 2019. V. 44, N 41. P. 23277–23288.
14. **Zhang Y. Q., Wang L. Z.** Burst pressure of pipelines with plastic anisotropy under combined internal and external pressures // ASCE. J. Engng Mech. 2013. V. 139, N 7. P. 920–924.
15. **Hill R.** The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950.
16. **Crossland B., Bones J. A.** The ultimate strength of thick walled cylinders subjected to internal pressure // Engineering. 1955. V. 179. P. 80–83.

Поступила в редакцию 3/VII 2020 г.,
после доработки — 3/VII 2020 г.
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.