

УДК 533.526:536.24

## **Моделирование воздействия осцилляций на характеристики сопряженного тепломассообмена при высокоэнтальпийном обтекании конуса, затупленного по сфере**

**К.Н. Ефимов, В.А. Овчинников, А.С. Якимов**

*Томский государственный университет*

E-mail: yakimovas@mail.ru

Рассмотрено математическое моделирование влияния колебаний углов атаки тела, обтекаемого высокоэнтальпийным воздушным потоком, на сопряженный тепломассообмен в теплозащитном материале при термохимическом разрушении конической части оболочки. Получены результаты численного исследования пространственного сверхзвукового обтекания вблизи тела, колеблющегося в плоскости тангажа. Изучено влияние колебаний тела с угловой скоростью в диапазоне 0–100 град/с на характеристики тепломассопереноса.

**Ключевые слова:** сопряженный тепломассообмен, теплозащитный материал, колебания, угол атаки, сверхзвуковой поток.

### **Введение**

Высокоскоростные летательные аппараты при полете или спуске в плотных слоях атмосферы испытывают тепловое воздействие, которое может изменить их форму и оказать воздействие на аэродинамические характеристики. Осцилляционные движения могут привести к изменению режима обтекания и теплового состояния оболочки. Ранее [1, 2] было изучено воздействие переменных углов атаки на аэродинамические характеристики осесимметричных тел.

При обтекании тела под постоянным углом атаки [3, 4] разница тепловых потоков на подветренной и наветренной сторонах может быть очень значительной, что приводит к неравномерному нагреву. Для уменьшения этого эффекта высокоскоростным летательным аппаратам могут придавать вращательные и колебательные движения. Взаимосвязанный характер протекания тепловых и аэродинамических процессов приводит к необходимости решения задачи в сопряженной постановке [5]. В работах [6–8] было проведено исследование влияния вращения тела вокруг его оси на характеристики сопряженного тепломассопереноса при пространственном сверхзвуковом обтекании.

В настоящей работе движение газового потока описывается уравнениями пограничного слоя с учетом ламинарного и турбулентного режимов течения. Для описания теплового состояния тела выписывается система уравнений сохранения для пористой среды. Учитываются различные процессы разрушения на конической части поверхности обтекаемого тела и фильтрация охлаждающего газа в порах на сферическом затуплении. Задача решается в сопряженной постановке [5, 9], так как это позволяет существенно

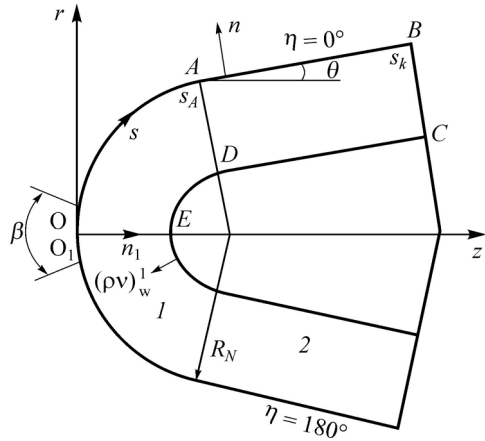


Рис. 1. Схема обтекания колеблющегося тела.

1 — пористое сферическое затупление,  
2 — коническая часть тела  
из углепластика или графита.

повысить точность определения аэродинамических и тепловых характеристик по сравнению с отдельными оценками аэродинамики, термохимического разрушения, параметров движения тела.

### 1. Постановка задачи

В работах [5, 9] были проведены оценки времен релаксации в газовой и конденсированной фазах. На основании этих оценок

характеристики сопряженного теплообмена находятся из решения квазистационарных уравнений пространственного пограничного слоя при различных режимах течения. Тепловое состояние сферического затупления определяется из решения нестационарного уравнения сохранения энергии для пористого сферического затупления и квазистационарного уравнения для скорости фильтрации охлаждающего газа в порах в рамках однотемпературной модели.

Для модели химически равновесного воздуха при использовании гипотезы «пассивности» и предположении равенства чисел Льюиса для всех компонентов единице система уравнений пространственного пограничного слоя в естественной системе координат, связанной с внешней поверхностью обтекаемой оболочки, принимает вид [3, 6] (см. рис. 1):

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho u r_w) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho v r_w) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho w) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{w}{r_w} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{w^2}{r_w} \frac{\partial r_w}{\partial s} \right) = - \frac{\partial P_e}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left( \mu_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{w}{r_w} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{uw}{r_w} \frac{\partial r_w}{\partial s} \right) = - \frac{1}{r_w} \frac{\partial P_e}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial n} \left( \mu_\Sigma \frac{\partial w}{\partial n} \right), \quad (3)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial H}{\partial s} + v \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{w}{r_w} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\mu_\Sigma}{Pr_\Sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial n} + (Pr_\Sigma - 1) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

$$P = \rho h (\gamma_{ef} - 1) / \gamma_{ef}, \quad P = P_e(s, \eta), \quad H = h + (u^2 + w^2) / 2, \quad (5)$$

$$\mu_\Sigma = \mu + \Gamma \mu_T, \quad Pr_\Sigma = \frac{(\mu + \Gamma \mu_T) Pr Pr_T}{\mu Pr_T + \Gamma \mu_T Pr},$$

где  $u, v, w$  — компоненты вектора среднemasовой скорости в естественной системе координат  $(s, n, \eta)$ ,  $\rho$  — плотность,  $h$  — энтальпия,  $\Gamma$  — коэффициент перемешиваемости,  $P$  — давление,  $r_w$  — коэффициент Ламэ,  $H$  — полная энтальпия,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\gamma_{ef}$  — эффективный показатель адиабаты,  $Pr$  — число Прандтля.

Для пористой сферической оболочки ( $0 < s < s_A$ ) при одномерности процесса фильтрации вдуваемого газа в направлении нормали к поверхности в рассматриваемой системе координат, связанной с осью симметрии тела, имеем [9]

$$\frac{\partial(\rho^{(1)}\varphi v^{(1)}r_1 H_1)}{\partial n_1} = 0, \quad (6)$$

$$(\rho c_p)_1(1-\varphi)\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r_1 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_1} \left[ r_1 H_1 \lambda_1 (1-\varphi) \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{r_1 \lambda_1}{H_1} (1-\varphi) \frac{\partial T_1}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{H_1 \lambda_1}{r_1} (1-\varphi) \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right] \right\} + c_{pg}^{(1)} (\rho v)_w^{(1)} \frac{r_{1w}}{r_1 H_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial n_1}, \quad (7)$$

$$A\mu_1 v^{(1)} + B\rho^{(1)}\varphi v^{(1)} \Big|_{v^{(1)}} = -\frac{\partial P}{\partial n_1}, \quad (8)$$

$$P = \frac{\rho^{(1)}RT_1}{M}, \quad H_1 = \frac{R_N - n_1}{R_N}, \quad \bar{s} = \frac{s}{R_N}, \quad (9)$$

$$r_1 = (R_N - n_1) \sin(\bar{s}), \quad \mu_1 \sim \sqrt{T_1}, \quad \lambda_1 \sim \sqrt{T_1}, \quad \varphi = \text{const.}$$

Для конической части тела ( $s_A < s < s_k$ ) уравнения сохранения энергии и массы в подвижной системе координат записываются по математическим моделям [4, 10]:

$$\rho_c c_{p2} \left( \frac{\partial T_2}{\partial t} - \psi \frac{\partial T_2}{\partial n_1} \right) + c_{pg}^{(2)} G \frac{\partial T_2}{\partial n_1} = \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial s} \right) + \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \right) + Q_c \frac{d\rho_c}{dt}, \quad (10)$$

$$\frac{d\rho_c}{dt} = \left( \frac{\partial \rho_c}{\partial t} - \psi \frac{\partial \rho_c}{\partial n_1} \right) = \begin{cases} -k_c \rho_{c0} \left( \frac{\rho_c - \rho_{c*}}{\rho_{c0}} \right) \exp\left(-\frac{E_c}{RT_2}\right), & \rho_c > \rho_{c*}, \\ 0, & \rho_c \leq \rho_{c*}, \end{cases} \quad (11)$$

$$G = \int_0^1 \frac{d\rho_c}{dt} dn_1, \quad r_2 = (R_N - n_1) \cos \theta + (s - s_A) \sin \theta, \quad (12)$$

$$l = L - x(t), \quad x(t) = \int_0^t \psi d\tau, \quad (\rho v)_{lw} = G_w.$$

Здесь и ниже  $T$  — температура,  $(\rho v)_w^{(1)}$  — расход газа-охладителя с поверхности сферического затупления,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $G$  — массовый расход газообразных продуктов разложения углепластика,  $(\rho v)_w^{(2)}$  — полный массовый унос с углеродной поверхности конической части тела,  $\alpha/c_p$  — коэффициент теплообмена,  $Q_c d\rho_c/dt$  — тепло, поглощенное в результате реакции пиролиза углепластика,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $R_N$  — радиус сферического затупления;  $r_i, i = 1, 2$ ;  $H_1$  — коэффициенты Ламэ,  $\varphi$  — пористость сферического затупления,  $L$  — толщина оболочки тела,  $\theta$  — угол конусности,  $n_1$  — нормаль к поверхности, направленная в глубь оболочки,  $\psi$  — линейная скорость

перемещения поверхности разрушения,  $x(t)$  — граница раздела газообразной и конденсированной фаз (глубина выгорания),  $M, m$  — молекулярная масса,  $c_{iw}$  — массовая концентрация  $i$ -го компонента,  $b_1, b_2$  — постоянные,  $A_{ci}$  — коэффициенты аккомодации графитовой поверхности [10],  $\gamma_i$  — коэффициенты массообмена;  $E_{iw}, k_{iw}, i = 1, \dots, 4$  — энергия активации и предэкспонент  $i$ -ой гетерогенной реакции оболочки конической части тела;  $k_c, E_c$  и  $Q_c$  — предэкспонент, энергия активации и тепловой эффект реакции пиролиза; второе и третье слагаемые в левой части уравнения (10) связаны соответственно с конвективным переносом тепла за счет перемещения поверхности разрушения и массовым расходом газообразных продуктов разложения углепластика. Индексы  $e, eo$  и  $w$  соответствуют величинам на внешней границе пограничного слоя, на внешней границе в точке торможения и на поверхности обтекаемого тела, нижние индексы 1, 2 — характеристикам сферы и конуса в конденсированной фазе,  $g$  — газовой фазе на сферической и конической частях тела,  $\infty$  — величинам набегающего газового потока на бесконечности,  $T, \theta$  — характеристикам турбулентного переноса и начальным условиям,  $L$  — внутренней оболочке сферической части тела,  $k$  — периферийному участку оболочки,  $z$  — времени окончания теплового воздействия,  $ef$  — эффективной величине,  $c$  — углепластик,  $*$  — характерная величина,  $\Sigma$  — суммарная величина,  $l$  — величина подвижной внутренней границы конической части тела из (12), верхние индексы (1), (2) соответствуют характеристикам газовой фазы на сфере и конусе в теле, черта вверху — безразмерным параметрам,  $a$  — аэродинамическая величина,  $m$  — максимальная величина,  $is$  — изотермическая величина,  $av$  — среднее значение функции.

В отличие от работ [6–8] в настоящем исследовании рассматриваются периодические колебания угла атаки в плоскости тангажа. Это движение описывается выражением

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_m - |\omega_f t - \beta_m| - (i-1)B_f, & (i-1)B_f \leq t < B_f i / 2, \\ |\omega_f t - 3\beta_m| - \beta_m - B_f i / 2, & B_f i / 2 \leq t < B_f i, \end{cases} \quad (13)$$

где  $t$  — длительность процесса,  $i = 1, 2, \dots, B_f = 4\beta_m/\omega_f$  — период флуктуации,  $\omega_f$  — угловая скорость изменения угла атаки  $\beta$ ,  $\beta_m$  — абсолютная величина максимального угла атаки.

Начальные условия имеют вид

$$T_1|_{t=0} = T_2|_{t=0} = T_0, \quad \rho_c|_{t=0} = \rho_{c0}. \quad (14)$$

Ставятся следующие граничные условия в газовой фазе на внешней границе пограничного слоя при  $n \rightarrow \infty$ :

$$u \rightarrow u_e(s, \eta), \quad w \rightarrow w_e(s, \eta), \quad h \rightarrow h_e(s, \eta), \quad (15)$$

где  $u_e, w_e, h_e$  и  $P_e$  в (5) определяются из решения системы уравнений Эйлера [11]; и на поверхности обтекаемого тела при  $n = 0$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad v = v_w. \quad (16)$$

Граничные условия (15), (16) записаны, исходя из предположения, что характерное время колебательных движений тела много меньше времени релаксации газовой фазы ( $t_\omega \gg t_a$ , где  $t_\omega = B_f, t_a = R_N/V_\infty$ ).

На обтекаемой внешней поверхности оболочки ( $n = n_1 = 0$ ) имеют место условия [6, 9] при  $0 \leq \eta < 2\pi$ :

$$\frac{\mu}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial h}{\partial n} \right) \Big|_{\text{w}} - (1-\varphi) \varepsilon_1 \sigma T_{1\text{w}}^4 = -\lambda_1 (1-\varphi) \left( \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \right) \Big|_{\text{w}}, \quad 0 < s < s_A, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_1} \Big|_{n_1=0-x(t)} &= \frac{\mu}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial h}{\partial n} \right) \Big|_{\text{w}} - (h_w - h_c) \sum_{i=2}^3 (\rho v)_{i\text{w}} - \\ &- (\rho v)_{1\text{w}} (h_w - h_g) - \varepsilon_2 \sigma T_{2\text{w}}^4, \quad s_A \leq s \leq s_k. \end{aligned} \quad (18)$$

На внутренней поверхности полусферы и конической части выписываются соотношения [9]

$$-\lambda_1 (1-\varphi) \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \Big|_{n_1=L} = \delta (T_{1,L} - T_0), \quad 0 < s < s_A, \quad (19)$$

$$\rho_c \Big|_{n_1=l} = \rho_{c0}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial n_1} \Big|_{n_1=l} = 0, \quad s_A \leq s \leq s_k. \quad (20)$$

На кольце сопряжения сфера-конус ( $s = s_A$ ) используются условия идеального контакта, а при  $s = s_k$  — адиабатическое условие:

$$\frac{\lambda_1 (1-\varphi)}{H_1} \frac{\partial T_1}{\partial s} \Big|_{s=s_A-0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial s} \Big|_{s=s_A+0}, \quad (21)$$

$$T_1 \Big|_{s=s_A-0} = T_2 \Big|_{s=s_A+0}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial s} \Big|_{s=s_k} = 0.$$

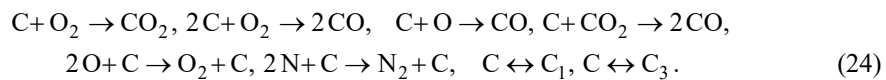
На внешней и внутренней поверхностях области сферического затупления имеет место равенство давлений в порах и во внешней среде:

$$P_w \Big|_{n_1=0} = P_e(s, \eta), \quad P \Big|_{n_1=L} = P_L. \quad (22)$$

При наличии плоскости симметрии течения имеют место условия

$$\frac{\partial T_i}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial T_i}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\pi} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

На границе раздела сред при  $s \geq s_A$  рассматривалась следующая кинетическая схема протекания неравновесных химических реакций ( $T_{2\text{w}} \leq 3700$  К) [5, 6, 12]:



Молярные и массовые скорости протекания химических реакций (24) и выражение для массовой скорости уноса подробно описаны в [5, 9]:

$$\begin{aligned} (\rho v)_{2\text{w}} &= \rho_w^{(2)} \left[ \left( \frac{m_6}{m_2} - 1 \right) c_{2\text{w}} B_1 + \left( 2 \frac{m_5}{m_2} - 1 \right) c_{2\text{w}} B_2 + \left( \frac{m_5}{m_1} - 1 \right) c_{1\text{w}} B_3 + \left( 2 \frac{m_5}{m_6} - 1 \right) c_{6\text{w}} B_4 \right], \\ (\rho v)_{3\text{w}} &= \sum_{i=7}^8 \frac{m_i A_{ci} (P_{ci}^* - P_{ci})}{(2\pi R T_{2\text{w}} m_i)^{0.5}}, \quad i = 7, 8, \quad P_{ci}^* = 10^5 \cdot \exp(D_i - E_i / T_{2\text{w}}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$B_i = k_{i\text{w}} \exp(-E_{i\text{w}} / R T_{2\text{w}}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad P_{ci} = P_e c_{i\text{w}} m_w / m_i, \quad i = 7, 8,$$

$$\rho_w^{(2)} = P_e m_w / (R T_{2w}), \quad h_w = \sum_{i=1}^8 h_i c_{iw}, \quad m_w^{-1} = \sum_{i=1}^8 c_{iw} / m_i,$$

$$(\rho v)_w^{(2)} = (\rho v)_{1w} + (\rho v)_{2w} + (\rho v)_{3w}, \quad \psi = \sum_{i=2}^3 \frac{(\rho v)_{iw}}{\rho_{cw}}$$

$$c_{p2} = b_1 + b_2 T_2, \quad h_g = \int_0^{T_2} c_{p2} dT.$$

В (25) порядковый номер компонентов соответствует следующему порядку компонентов из (24): O, O<sub>2</sub>, N, N<sub>2</sub>, CO, CO<sub>2</sub>, C<sub>1</sub>, C<sub>3</sub>, где C — обозначение твердофазного углерода, который принадлежит материалу теплозащитного покрытия. В пограничном слое присутствуют четыре компонента — O, O<sub>2</sub>, N, N<sub>2</sub>, которые участвуют в двух равновесных химических реакциях: O<sub>2</sub> ↔ 2O, N<sub>2</sub> ↔ 2N. На границе конденсированной и газовой фаз также присутствуют четыре компонента — CO, CO<sub>2</sub>, C<sub>1</sub>, C<sub>3</sub>, которые возникают в шести гетерогенных реакциях горения и сублимации из (24). Там же учитываются две реакции каталитической рекомбинации компонентов O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>.

Запишем балансовые соотношения для массовых концентраций компонент  $c_{iw}$ , используя закон Фика для диффузионных потоков и аналогию процессов тепло- и массообмена [10]:

$$J_{iw} + (\rho v)_w^{(2)} c_{iw} = R_{iw}, \quad i = \overline{1, 8},$$

$$J_{iw} = \gamma_i (c_{iw} - c_{ie}), \quad \gamma_i = \alpha / c_p.$$

Величина отношения  $\gamma_i = \alpha / c_p$  определяется на основе расчета системы уравнений пограничного слоя (1)–(5). Используются формулы:  $q_w = (\alpha / c_p)(h_{e0} - h_w)$ , и  $q_w = (\mu / Pr) / (\partial h / \partial w)|_w$ , где  $q_w$  — величина теплового потока к поверхности обтекаемого тела из уравнения (17),  $h_{e0}$  — энтальпия набегающего потока в окрестности точки торможения,  $h_w$  — энтальпия материала поверхности тела из формул (25). Предполагалось, что продукты разрушения слабо разбавляют воздушную смесь в пограничном слое. Это позволило использовать принятую выше постановку для уравнений в пограничном слое.

## 2. Метод расчета и исходные данные

Система уравнений (1)–(4), (6)–(8), (10), (11) с начальными и граничными условиями (14)–(23) решалась численно. Система уравнений пространственного пограничного слоя решалась в переменных типа переменных Дородницына с учетом ламинарной, переходной и турбулентной областей течения. Для описания турбулентного течения применялась двухслойная модель турбулентного пограничного слоя [13, 14]. Рассматриваемая трехслойная алгебраическая модель турбулентности учитывает наличие ламинарного вязкого подслоя, внутренней области турбулентного ядра, которая описывается формулой Ван-Драйста-Себечи [14], и внешней области, в которой используется формула Сполдинга [13]. Точка перехода задавалась, исходя из положения о том, что при заданных величинах давления и энтальпии торможения максимум теплового потока находится в районе звуковой линии сферического затупления. Коэффициент перемежаемости и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения описывался с помощью формулы Дхаваны-Нарасимхи [15]. При численном интегрировании  $Pr = 0,72$ ,  $Pr_T = 1$ . Для уравнений пограничного слоя с помощью итерационно-интерполяционного метода [16]

были получены комбинированные разностные схемы, обеспечивающие сращивание искомых характеристик на границе ламинарного подслоя и турбулентного ядра и учитывающие характер изменения  $\mu_T$  поперек пограничного слоя. Описанные выше методики были апробированы в работах [17–20]. Тестирование описанной модели пограничного слоя проводилось путем сравнения с экспериментальными результатами работ [21, 22] и показало ее хорошую работоспособность.

Численное решение трехмерных уравнений (7), (10) выполнялось методом расщепления [23]. Была использована неявная, абсолютно устойчивая, монотонная разностная схема с суммарной погрешностью аппроксимации  $O(\tau + H_{n_1}^2 + H_s^2 + H_\eta^2)$ . Для проверки программы численного расчета в пористом теле использовалась последовательность сгущающихся сеток по пространству ( $h_1 = h_{n_1} = 10^{-3}$  м), на сфере ( $h_2 = h_s = 0,925 \cdot 10^{-2}$ ), на конусе ( $h_3 = h_s = 10^{-2}$ ), и принималось  $h_4 = h_\eta = 0,087$ ,  $H_{1,i} = 2 \cdot h_i$ ,  $H_{2,i} = h_i$ ,  $H_{3,i} = h_i / 2$ ,  $H_{4,i} = h_i / 4$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Температура каркаса фиксировалась по глубине тела в различные моменты времени. Во всех вариантах задача решалась с переменным шагом по времени, который выбирался из условия заданной точности, одинаковой для всех шагов по пространству. Различие относительной погрешности по температуре падало и к моменту времени  $t = t_z$  составляло:  $\Delta_1 = 9,3\%$ ,  $\Delta_2 = 5,6\%$ ,  $\Delta_3 = 3,2\%$ . Результаты расчета получены для шагов по пространству  $H_{3,i} = h_i / 2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Для тестирования процессов взаимодействия высокоэнтальпийных потоков воздуха с графитовыми поверхностями использовались результаты теоретических [24] и обобщенных экспериментальных [25] исследований.

Из квазистационарного уравнения неразрывности (6) находим  $(\rho v)_w^{(1)} r_{1w} / (H_1 r_1) = -(\rho v)^{(1)} \varphi$  (знак минус обусловлен тем, что нормальная координата  $n_1$  направлена вглубь тела (см. рис. 1), а охладитель течет в противоположном направлении). Подставим  $(\rho v)^{(1)} \varphi$  и первое выражение (9) в нелинейный закон Дарси (8), тогда его можно проинтегрировать, используя граничные условия (22). В результате получим расход газа и давление в области  $I$  [9]:

$$(\rho v)_w(s, \eta) = \frac{\left[ 2B(P_L^2 - P_w^2) \varphi M D_L / R + E_L^2 \right]^{0,5} - E_L}{2BD_L},$$

$$P(n_1, s, \eta) = \{P_w^2 + 2R(\rho v)_w^{(1)} [B(\rho v)_w^{(1)} D + E] / M \varphi\}^{0,5},$$

$$D(n_1, s, \eta) = \int_0^{n_1} T_1 \left( \frac{r_{1w}}{r_1 H_1} \right)^2 dy, \quad E(n_1, s, \eta) = A \int_0^{n_1} \mu T_1 \frac{r_{1w}}{r_1 H_1} dy.$$

Давление на внутренней «холодной» поверхности пластины ( $n_1 = L$ ) задавалось в виде  $P_L = kP_{e0}$ , где  $k$  — некоторая постоянная. Это обеспечивало необходимый расход охладителя (в частности, чтобы температура каркаса из пористого металла не превышала критической температуры для сохранения его прочности (1000 К) [10, 26]) в процессе теплового воздействия от  $t = 0$  до  $t = t_z$ .

Расчеты обтекания конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора  $\theta = 15^\circ$  потоком химически равновесного воздуха с переменным углом атаки  $-\beta_m \leq \beta \leq +\beta_m$ ,  $\beta_m = 10^\circ$  проводились для условий [11], которые соответствуют параметрам  $H_\infty = 2,3 \cdot 10^4$  М,  $V_\infty = 3000, 5000$  м/с,  $R_N = 0,1$  м,  $L = 0,02$  м,  $k = 2$ . Кинетические константы (25)

гетерогенных реакций (24) были взяты из [9], энтальпия графита  $h_c$  рассчитывалась по формуле, представленной в работе [27]. Для углеродного материала конической оболочки теплофизические коэффициенты были получены в работах [4, 9], для пористой стали — в [28]. Для графита конической части тела решалось уравнение (10) при  $Q_c = 0, G = 0$ .

Приводимые ниже результаты получены при  $h_{c0} = 4,7197 \cdot 10^6, 1,272 \cdot 10^7$  Дж/кг,  $\varphi = 0,34, T_0 = 300$  К,  $b_1 = 965,5, b_2 = 0,147, M = 29$  кг/кмоль,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>),  $\varepsilon_2 = 0,9, \rho_{c0} = 1400$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{c*} = 1300$  кг/м<sup>3</sup>,  $k_c = 3,15 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>,  $E_c = 8,38 \cdot 10^4$  Дж/моль,  $Q_c = 1,26 \cdot 10^6$  Дж/кг,  $R = 8,314$  Дж/(моль · К),  $t_z = 40$  с. Теплофизические характеристики пористого затупления соответствовали пористой стали:  $\varepsilon_1 = 0,8, A = 2,3 \cdot 10^{11}$  1/м<sup>2</sup>,  $B = 5,7 \cdot 10^5$  1/м,  $\lambda_1 = 2,92 + 4,5 \cdot 10^{-3} T_1$  Вт/(м · К),  $\rho_1 c_{p1} = (1252 + 0,544 T_1) \cdot 10^3$  Дж/(К · м<sup>3</sup>) [28]. Теплофизические характеристики конической части тела отвечают углепластику [4, 9] или сплошному графиту ВПП [29].

### 3. Результаты численного решения и их анализ

На рис. 2, 3 представлены распределения температуры поверхности на конической части тела, выполненной из графита, в момент времени  $t = 9,33$  с для  $V_\infty = 5000$  м/с при  $\omega_f = 0$  и 20 град/с соответственно. Из рисунков видно, что перепад температуры при  $\omega_f = 0$  значительно выше, чем при  $\omega_f = 20$  град/с. Кроме того, при наличии колебаний максимальное значение температуры поверхности снижается с 2335 К ( $\omega_f = 0$ ) до 1541 К ( $\omega_f = 20$  град/с). Для распределения температуры, полученного при обтекании тела с постоянным углом атаки, характерно наличие максимальных значений в окрестности  $\eta = 180^\circ$  и минимальных значений при  $\eta = 0^\circ$  и  $360^\circ$ . Как видно из рис. 3, колебательное движение может приводить к появлению двух дополнительных локальных экстремумов.

Представленные ниже результаты относятся к сечению  $s/R_N = 4,6$  на конической части тела. На рис. 4 показаны зависимости теплового потока из газовой фазы от окружной координаты при обтекании тела потоком воздуха со скоростью 3000 и 5000 м/с (кривые 1, 2 соответственно) под углом атаки  $\beta = \beta_m = 10^\circ$  в начальный момент времени  $t_0 = 0$ . Из рисунка видно, что распределение теплового потока симметрично от-

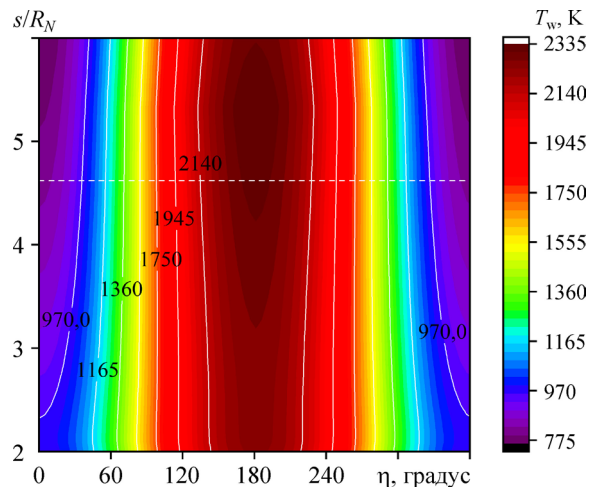


Рис. 2. Распределение температуры поверхности на конической части тела (графит) при  $\omega_f = 0$  град/с.



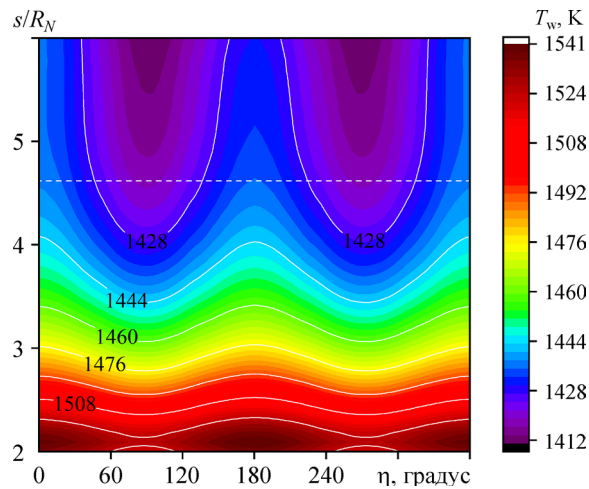


Рис. 3. Распределение температуры поверхности на конической части тела (графит) при  $\omega_f = 20$  град/с.

носителю плоскости тангажа ( $\eta = 0$  и  $180^\circ$ ). Значения тепловых потоков в точках  $\eta = 0$  и  $180^\circ$  отличаются для кривой 1 в 5,1 раза, а для кривой 2 — в 4,4 раза. Данный перепад теплового потока по окружной координате обуславливает неравномерный прогрев тела.

Кривые 1, 2 на рис. 5, 6 иллюстрируют временную зависимость температуры поверхности в точках  $\eta = 180^\circ$  и  $0^\circ$  для фиксированного угла атаки  $\beta_m = 10^\circ$  ( $\omega_f = 0$ ), а кривые 3, 4 — для переменного угла атаки при  $\omega_f = 5$  и  $20$  град/с соответственно. Перепад температуры между точками  $\eta = 180^\circ$  (кривая 1) и  $0^\circ$  (кривая 2) растет с течением времени и при  $t = 10$  с достигает 1512 К для графита (рис. 5) и 1188 К для углепластика (рис. 6). При наличии осциллирующего движения (кривые 3, 4) наблюдается существенно немонотонное изменение температуры поверхности в точке с координатами  $\eta = 180^\circ$ . Колебания тела (кривые 3 и 4) приводят к тому, что температура поверхности в точке  $\eta = 180^\circ$  становится ниже, чем при отсутствии осцилляций на протяжении всего рассматриваемого периода времени.

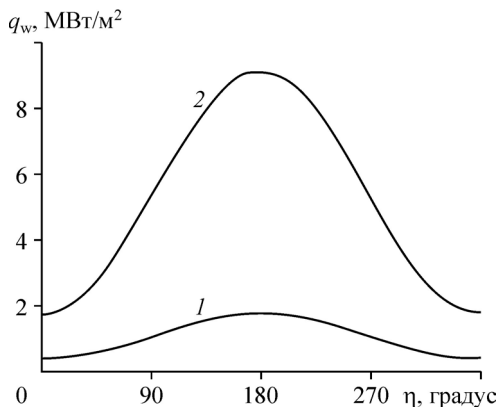


Рис. 4. Распределение теплового потока из газовой фазы по окружной координате в начальный момент времени  $t_0 = 0$  для  $\beta_m = 10^\circ$  при обтекании тела со скоростью  $V_\infty = 3000$  м/с (1), 5000 м/с (2).

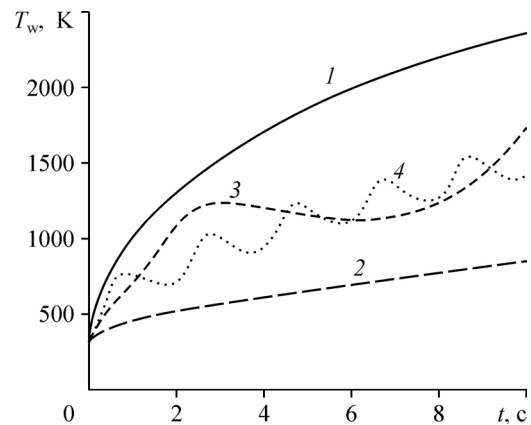


Рис. 5. Зависимость температуры поверхности графита от времени при отсутствии ( $\omega_f = 0$ ) и при наличии ( $\omega_f = 5$  и  $20$  град/с) колебаний тела. Кривые соответствуют  $\omega_f = 0$  в точках  $\eta = 180^\circ$  (1),  $0^\circ$  (2) и  $\omega_f = 5$  град/с (3),  $20$  град/с (4).

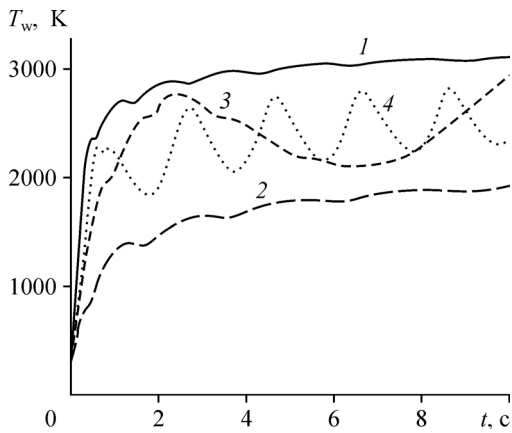


Рис. 6. Зависимость температуры поверхности углепластика от времени при отсутствии ( $\omega_f = 0$ ) и при наличии ( $\omega_f = 5$  и  $20$  град/с) колебаний тела.

Обозначения см. на рис. 5.

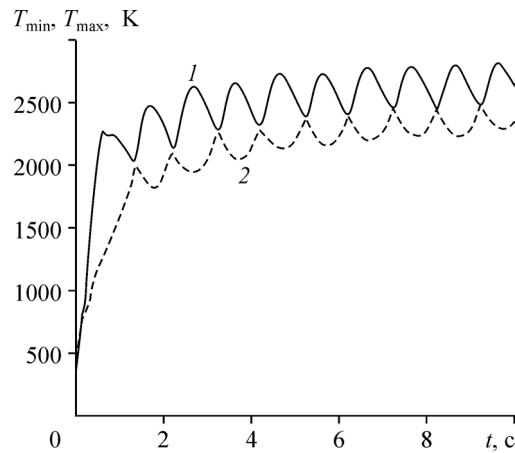
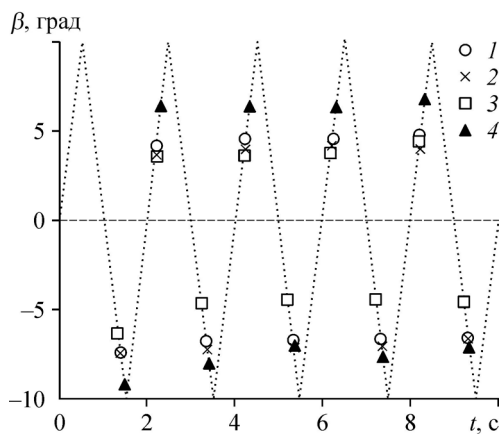


Рис. 7. Временная зависимость максимальной (1) и минимальной (2) температур поверхности из углепластика при  $\omega_f = 20$  град/с.

Разница температур в случае колебательного движения тела меняется со временем. Как видно из рис. 7, максимальная (кривая 1) и минимальная (кривая 2) температуры поверхности при  $\omega_f = 20$  град/с (углепластик) изменяются по периодическому закону и в определенные моменты времени имеют точки соприкосновения друг с другом. Это означает, что поверхность в сечении  $s/R_N$  в это время становится близкой к изотермической.

Как известно, при  $\omega_f = 0$  град/с температура поверхности постоянна вдоль окружной координаты  $\eta$  при нулевом угле атаки [9]. В случае колебательного движения она приближается к постоянному значению через некоторый промежуток времени, после того как угол атаки  $\beta$  проходит через нулевое значение (штриховая линия на рис. 8). Как видно из рис. 7, переход в квазиизотермический режим носит циклический характер. Из результатов расчетов при  $\omega_f = 20$  град/с, представленных на рис. 8, следует, что поверхность становится близкой к изотермической с нерегулярной циклическостью при различных углах атаки  $\beta_{is}$ . Данные 1 и 3 (рис. 8) соответствуют  $V_\infty = 5000$  м/с, 2 и 4 —  $V_\infty = 3000$  м/с. Как видно из рисунка, значение  $|\beta_{is}|$  изменяется с течением времени. На величину  $|\beta_{is}|$  влияет знак угла атаки. При  $\beta < 0$  значение  $|\beta_{is}|$  больше, чем при положительных углах атаки  $\beta$ . Скорость движения летательного аппарата слабо влияет на величину  $\beta_{is}$  при использовании графита (1, 2)



в отличие от углепластика (3, 4). Максимальное время между квазиизотермическими режимами наблюдается в начальные моменты времени и при  $\omega_f = 20$  град/с,  $V_\infty = 3000$  м/с составляет 1,47 с ( $\beta_{is} = -7,4^\circ$ ) и 1,38 с ( $\beta_{is} = -9,2^\circ$ ) для углепластика и графита соответственно. Причиной затянувшегося процесса перехода в изотермический режим по сравнению с более

Рис. 8. Временные точки квазиизотермических режимов при  $\omega_f = 20$  град/с. 1, 2 — графит, 3, 4 — углепластик.

поздними переходами является сильный аэродинамический нагрев, действующий на тело в начальные моменты времени, который также обуславливает разницу в значениях  $|\beta_{is}|$  для положительных и отрицательных углов атаки в последующие моменты времени. При переходе через квазизотермический режим происходит перестройка теплового состояния тела, длящаяся в зависимости от угловой скорости до нескольких десятков миллисекунд, в течение которых в распределении температуры поверхности по окружной координате присутствуют два дополнительных экстремума (см. рис. 3). В остальные моменты времени распределение температуры поверхности тела качественно сходно со случаем движения неколеблющегося тела (см. рис. 2).

В силу того, что при колебании тела температура меняется по периодическому закону, для оценки влияния осцилляций тела на теплообмен в теплозащитном материале введем величину

$$\Delta T_{av}(s) = \frac{1}{t_z - t_0} \int_{t_0}^{t_z} (T_{w,max}(t,s) - T_{w,min}(t,s)) dt,$$

характеризующую среднее значение перепада температуры поверхности. Здесь  $T_{w,max}$ ,  $T_{w,min}$  — максимальная и минимальная температуры поверхности в соответствующий момент времени в распределении по окружной координате  $\eta$ .

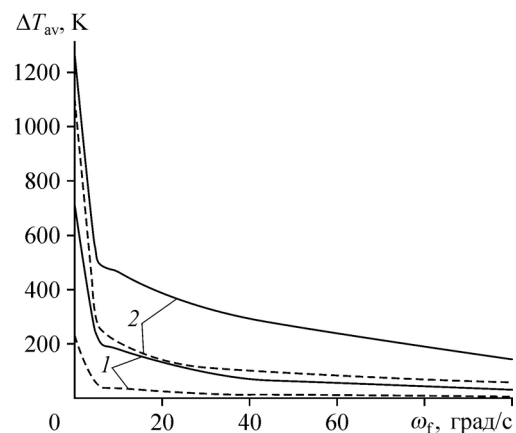
На рис. 9 показаны зависимости среднего перепада температур поверхности тела  $\Delta T_{av}$  от скорости колебаний тела при  $t_0 = 0$ ,  $t_z = 10$  с. Данные зависимости построены на серии из 24 расчетов, полученных варьированием значений скорости набегающего потока ( $V_\infty = 3000$  и  $5000$  м/с), угловой скорости ( $\omega_f = 0, 5, 10, 20, 40, 100$  град/с) и материала (углепластик и графит). Сплошные кривые на рис. 9 соответствуют углепластику, штриховые — графиту. Кривые 1, 2 отвечают  $V_\infty = 3000$  и  $5000$  м/с соответственно. Максимальные значения  $\Delta T_{av}$  наблюдаются при угловой скорости  $\omega_f = 0$  град/с и скорости движения тела  $V_\infty = 5000$  м/с и составляют 1106 К (графит) и 1244 К (углепластик). Как видно из рис. 9, даже при малых угловых скоростях колебаний ( $\omega_f = 5$  град/с) происходит сильное снижение перепада температур (для углепластика на 58–67 %, для графита на 75–77 %) по сравнению со случаем движения с постоянным углом атаки.

При обтекании тела потоком воздуха со скоростью  $V_\infty = 5000$  м/с средний перепад температуры поверхности графита  $\Delta T_{av} = 300$  К достигается при скорости колебаний тела  $\omega_f = 4,9$  град/с. Рис. 9 показывает, что при использовании углепластика в качестве теплозащитного материала для достижения аналогичного уровня среднего перепада температуры потребуется более высокая скорость колебания тела ( $\omega_f = 38,3$  град/с).

При скорости движения тела  $V_\infty = 3000$  м/с под постоянным углом атаки  $\beta_m = 10^\circ$  вследствие меньших конвективных тепловых потоков по сравнению со скоростью движения тела  $5000$  м/с (см. рис. 4) и больших времен тепловой релаксации [7] температура поверхности графита имеет значения, при которых глубина выгорания  $x(\eta)$  на подветренной стороне тела ( $\eta = 0^\circ-90^\circ$ ) не превышает  $10^{-9}$  м,

Рис. 9. Зависимость средней температуры поверхности от угловой скорости колебания тела.

$V_\infty = 3000$  м/с (1),  $5000$  м/с (2).



а на наветренной стороне тела ( $\eta = 90^\circ - 180^\circ$ ) не превышает  $10^{-6}$  м. В силу этого влияние осцилляций на распределение  $x(\eta)$  является незначительным для графита. В то же время воздействие осцилляций на углепластик при скорости движения  $V_\infty = 3000$  м/с позволяет существенным образом уменьшить перепады в функции глубины выгорания  $x(\eta)$  (см. рис. 10).

На рис. 11 показаны распределения глубины выгорания для графита и углепластика при скорости полета летательного аппарата, равной 5000 м/с, в момент времени  $t = t_z$ . Кривые 1 и 2 отвечают распределению глубины выгорания  $x(\eta)$  при  $\omega_f = 0$  град/с для углепластика и графита соответственно, кривые 3 и 4 — при  $\omega_f = 20$  град/с. Распределения глубины выгорания для графита и углепластика становятся достаточно близкими друг к другу. Как видно из рис. 11, отличие в максимальных значениях  $x(\eta)$  составляет примерно 5 %.

Для исследования влияния осцилляций на изменение формы тела, вызванного линейным уносом теплозащитного материала, введем величину

$$x_{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\eta) d\eta,$$

определяющую среднее значение функции глубины выгорания  $x(\eta)$  в рассматриваемом сечении  $s$ . Величина  $x_{av}$  для случая  $\omega_f = 0$  град/с представлена на рис. 10 в виде кривой 4 и имеет значение  $7,5 \cdot 10^{-5}$  м.

Пусть  $x_{av,0}$  — значение, соответствующее  $\omega_f = 0$  град/с,  $x_{av,\omega}$  — значение при некотором значении  $\omega_f$ , тогда величина

$$\delta_{av} = \frac{x_{av,\omega} - x_{av,0}}{x_{av,0}} \cdot 100 \%$$

при положительных значениях будет означать снижение линейного уноса теплозащитного материала по сравнению со случаем  $\omega_f = 0$  град/с, а при отрицательных — увеличение. Введем также величину максимального относительного отклонения функции  $x(\eta)$  от среднего значения  $x_{av}$  в следующем виде:

$$\delta_m = \max_{\eta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{x_{av} - x(\eta)}{x_{av}} \right| \cdot 100 \%$$

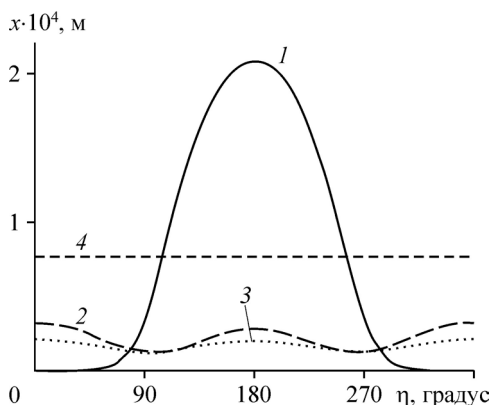


Рис. 10. Распределение глубины выгорания углепластика по окружной координате при  $V_\infty = 3000$  м/с и  $t = t_z$ .  
 $\omega_f = 0$  (1), 5 (2), 20 (3) град/с,  
 4 — среднее значение при  $\omega_f = 0$  град/с.

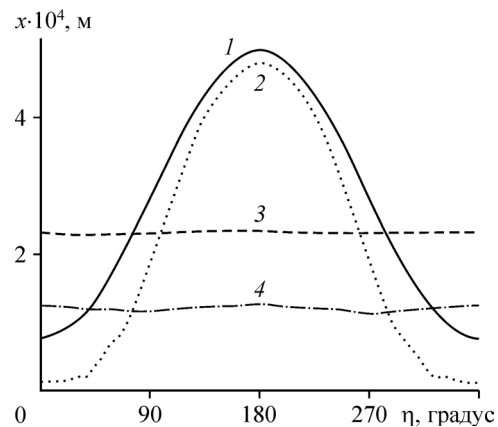


Рис. 11. Распределение глубины выгорания материала по окружной координате при  $V_\infty = 5000$  м/с и  $t = t_z$ .  
 1, 3 — углепластик при  $\omega_f = 0$  град/с,  
 2, 4 — графит при  $\omega_f = 20$  град/с.

Эта величина характеризует неравномерность линейного уноса материала по окружной координате. Из формулы видно, что чем меньше величина  $\delta_m$ , тем равномернее осуществляется унос материала по окружной координате.

При скорости набегающего потока  $V_\infty = 3000$  м/с (см. рис. 10) и скоростях осцилляций 5 и 100 град/с величина  $\delta_{av}$  равняется 72,3 и 81,7 % соответственно. Это говорит о том, что осцилляции позволяют существенно уменьшить потери материала. Отклонение  $\delta_m$  уменьшается от 173 % ( $\omega_f = 0$  град/с) до 11,5 % ( $\omega_f = 100$  град/с). Как видно из рис. 10, при наличии осцилляций изменение формы тела вследствие линейного уноса материала с поверхности, обусловленного аэродинамическим нагревом, будет более равномерным, но при этом форма становится волнообразной по окружной координате. Следует отметить, что локальный нагрев и охлаждение температуры поверхности, а также волнообразные изменения формы тела по окружной координате, возникающие вследствие осцилляций, могут приводить к эффектам, требующим дополнительного изучения в рамках подходов, примененных в работах [30–33].

При скорости набегающего потока  $V_\infty = 5000$  м/с (см. рис. 11) и  $\omega_f = 5$ –100 град/с величина  $\delta_{av}$  для углепластика будет находиться в интервале 18,4–19 %. Для графита значения  $\delta_{av}$  лежат в интервале 43,9–45,6 %. Это говорит о том, что осцилляции эффективнее снижают линейный унос теплозащитного материала при использовании графита. Они оказывают также сильное влияние на величину  $\delta_m$ , характеризующую максимальное отклонение от средних значений. При  $\omega_f = 0$  град/с отклонение  $\delta_m$  составляет 74,7 и 121 % соответственно для углепластика и графита, при  $\omega_f = 5$  град/с значение  $\delta_m$  снижается до 10,9 и 18 %, а при  $\omega_f = 20$  град/с — до 1,5 и 4,3 %. Последующие увеличения угловой скорости до 100 град/с не дают значимого эффекта (для углепластика  $\delta_m = 1,36$  %, для графита  $\delta_m = 3,3$  %) в снижении неравномерности выгорания теплозащитного материала.

### Выводы

Показано, что даже при небольших значениях угловой скорости колебаний значительно уменьшается перепад температур (на 58–77 % в зависимости от материала) на поверхности тела. Показано, что осцилляции ( $\omega_f = 5$ –100 град/с) в целом позволяют минимизировать изменение формы летательного аппарата на 18–82 % по сравнению с движением с постоянным углом атаки и сделать это изменение более равномерным. Также осцилляции позволяют обеспечить более равномерный унос материала. Тем самым достигается лучшее сохранение аэродинамических характеристик летательного аппарата и меньший линейный унос теплозащитного материала. Однако при этом форма тела может принимать волнообразный характер.

### Список литературы

1. Hoffman G.H., Platzler M.F. On supersonic flow past oscillating bodies of revolution // AIAA J. 1966. Vol. 4, No. 2. P. 370–371.
2. Telionis D., Gupta T. Compressible oscillating boundary layers // AIAA J. 1977. Vol. 15, No. 7. P. 974–983.
3. Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Якимов А.С. Исследование характеристик сопряженного тепло- и массообмена при вдуве газа и термохимическом разрушении обтекаемого тела // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, № 5. С. 749–755.
4. Ефимов К.Н., Овчинников В.А., Якимов А.С., Гаар С.А. Численный анализ характеристик теплообмена при радиационно-конвективном нагреве конуса, затупленного по сфере // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 1. С. 83–93.
5. Гришин А.М., Фомин В.М. Сопряжённые и нестационарные задачи механики реагирующих сред. Новосибирск: Наука, 1984. 319 с.

6. Ефимов К.Н., Овчинников В.А., Якимов А.С. Математическое моделирование влияния вращения на характеристики сопряженного теплообмена при высокосубзвуковом обтекании затупленного по сфере конуса под углом атаки // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 5. С. 677–689.
7. Efimov K.N., Ovchinnikov V.A., Yakimov A.S. Rotation influence on heat transfer at supersonic flow around a blunted body // AIAA J. 2018. Vol. 56, No. 2. P. 743–751.
8. Yakimov A.S. Thermal protection modeling of hypersonic flying apparatus. Switzerland: Springer, 2018. 114 p.
9. Гришин А.М., Голованов А.Н., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Якимов А.С. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты. Томск: Изд-во ТГУ, 2011. 358 с.
10. Полежаев Ю.В., Юревич Ф.П. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
11. Луев В.В., Магомедов К.М., Павлов В.Г. Гиперзвуковое обтекание притупленных конусов с учетом равновесных физико-химических превращений. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 203 с.
12. Горский В.В., Запривода А.В. О применении полной термодинамической модели разрушения углерода к задаче разрушения углепластика в условиях нестационарного нагрева // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52, № 2. С. 240–245.
13. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М.: Энергия, 1970. 127 с.
14. Cebeci T. Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient // AIAA J. 1970. Vol. 8, No. 12. P. 48–52.
15. Dhawan D., Narasimha R. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion // J. Fluid Mechanics. 1958. Vol. 4, No. 3. P. 418–423.
16. Гришин А.М., Зинченко В.И., Ефимов К.Н., Субботин А.Н., Якимов А.С. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. Томск: Изд-во ТГУ, 2004. 320 с.
17. Papp J.L., Dash S.M. A rapid engineering approach to modeling hypersonic laminar to turbulent transitional flows for 2d and 3d geometries // AIAA Paper. 2008. No. 2008–2600. 18 p.
18. Dilley A.D., McClinton Ch.R. Evaluation of CFD turbulent heating prediction techniques and comparison with hypersonic experimental data // NASA Langley Technical Report. NASA/CR-2001-210837. 2001. 31 p.
19. Brian R.H., Scott A.B., Thomas J.H. X-33 turbulent aeroheating measurements and predictions // AIAA Paper. 2002. No. 2002–4700. 10 p.
20. Mallinson S.G., Hillier R., Zanchetta M., Soltani S., Kirk D. An experimental and numerical study of hypersonic turbulent boundary layer flows // AIAA Paper. No. 97–2290.
21. Feldhuhn R.N. Heat transfer from a turbulent boundary layer on a porous hemisphere // AIAA Paper. No. 76–119.
22. Уидхофф Дж.Ф., Холл Р. Измерение теплопередачи на затупленном конусе под углом атаки при переходном и турбулентном режимах течения // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10, № 10. С. 71–79.
23. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
24. Гофман А.Г., Гришин А.М. Теоретическое исследование термодинамического разрушения графита в высокосубзвуковом воздухе // Прикл. механика и техн. физика. 1984. № 4. С. 107–114.
25. Бейкер Р.Л. Влияние неравновесных химических процессов на сублимацию графита // Ракетная техника и космонавтика. 1977. Т. 15, № 10. С. 21–29.
26. Андриевский Р.А. Пористые металлокерамические материалы. М.: Metallurgy, 1964. 187 с.
27. Бучнев Л.М., Смыслов А.И., Дмитриев И.А., Кутейников А. Ф., Костиков В.И. Экспериментальное исследование энтальпии квазиоднокристалла графита и стеклоуглерода в интервале температур 300–3800 К // Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25, № 6. С. 1120–1125.
28. Алифанов О.М., Трянин А.П., Ложкин А.Л. Экспериментальное исследование метода определения коэффициента внутреннего теплообмена из решения обратной задачи // Инженерно-физический журнал. 1987. Т. 52, № 6. С. 461–469.
29. Соседов В.П. Свойства конструкционных материалов на основе углерода. Справочник. М.: Metallurgy, 1975. 335 с.
30. Бунтин Д.А., Громыко Ю.В., Кириловский С.В., Маслов А.А., Поплавская Т.В. Влияние температуры затупленной носовой части конуса на ламинарно-турбулентный переход в гиперзвуковых пограничных слоях // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 4. С. 505–518.
31. Хотяновский Д.В., Кудрявцев А.Н. Численное моделирование развития неустойчивых возмущений различных мод и начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при числе Маха потока  $M = 6$  // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 843–852.
32. Кудрявцев А.Н., Хотяновский Д.В. Прямое численное моделирование перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 6. С. 581–590.
33. Терехова Н.М. Некоторые особенности развития возмущений на сверхзвуке при изменении средних параметров // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 5. С. 593–605.

*Статья поступила в редакцию 23 января 2020 г.,  
после доработки — 21 апреля 2020 г.,  
принята к публикации 26 июня 2020 г.*