УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

Д. А. Пожарский, Н. Б. Золотов*

Донской государственный технический университет, 344000 Ростов-на-Дону, Россия
* Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
E-mails: pozharda@rambler.ru, zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Изучаются контактные задачи для упругих полых цилиндров из неоднородного материала, находящихся под действием равномерно распределенного внутреннего или внешнего давления и взаимодействующих с жестким бандажом или вкладышем конечной длины. Коэффициент Пуассона (модуль Юнга) упругого материала изменяется по радиальной координате. Уравнения задачи сведены к интегральным уравнениям относительно контактных давлений. Для решения используется сингулярный асимптотический метод, эффективный для областей контакта достаточно большой протяженности.

Ключевые слова: цилиндр из упругого неоднородного материала, контакт, асимптотика.

DOI: 10.15372/PMTF20190614

Введение. При решении статических и динамических контактных задач теории упругости для структурно-неоднородных [1] цилиндрических тел, как правило, применяются численные методы (коллокаций, конечных элементов) [2–6]. В данной работе рассматривается тип неоднородности, при котором аналог задачи Ламе [7] о действии на стенках цилиндра равномерно распределенного внутреннего и внешнего давления имеет точное решение и можно записать в аналитической форме функции-символы ядер интегральных уравнений статических контактных задач, найти их асимптотику и применить асимптотические методы, используемые в случае цилиндров, изготовленных из однородного материала [8–10]. Ранее задачи для тел с переменным коэффициентом Пуассона рассматривались в случаях неоднородных по глубине полупространства [11], слоя [12] и неоднородного по угловой координате клина [13].

Аналог задачи Ламе. В цилиндрической системе координат (r, z) рассмотрим осесимметричную деформацию упругого полого цилиндра $\{\rho_1 \leqslant r \leqslant \rho, |z| < \infty\}$, в случае когда модуль сдвига G постоянный, а коэффициент Пуассона $\nu = \nu(r)$ — произвольная достаточно гладкая функция $(-1{,}0 < \nu(r) < 0{,}5)$. В этом случае модуль продольной упругости $E(r) = 2G(1 + \nu(r))$ является положительной функцией радиальной координаты. Пусть поверхности цилиндра нагружены равномерно распределенным внутренним и внешним давлением, граничные условия имеют вид

$$r = \rho\colon \quad \sigma_r = -p_0, \quad \tau_{rz} = 0, \qquad r = \rho_1\colon \quad \sigma_r = -p_1, \quad \tau_{rz} = 0. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00017).

Решение одномерной задачи (1) для уравнений упругого равновесия будем искать в виде (одномерное представление Фрайбергера [12–14])

$$\boldsymbol{u} = (u_r, 0), \qquad u_r = u(r) = B + \frac{\partial b}{\partial r}, \qquad B = B(r), \qquad b = b(r).$$

С использованием краевых условий для касательных напряжений в (1) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$B'' + \frac{1}{r}\,B' - \frac{1}{r^2}\,B = 0, \qquad b'' + \frac{1}{r}\,b' = \eta(r)\Big(B' + \frac{1}{r}\,B\Big), \qquad \eta(r) = -[2(1-\nu(r))]^{-1}. \tag{2}$$

Общее решение первого и частное решение второго уравнений (2) запишем в виде

$$B = C_1 r + C_2/r, \qquad b = E_1(r)\ln r + E_2(r),$$

$$E_1(r) = 2C_1 \int\limits_{\rho_1}^{r} x\eta(x)\,dx, \qquad E_2(r) = -2C_1 \int\limits_{\rho_1}^{r} x\eta(x)\ln x\,dx.$$

Определяя постоянные C_1 и C_2 из условий (1) для нормальных напряжений, получаем искомое радиальное перемещение

$$u_r = \frac{p_0\rho^2 - p_1\rho_1^2}{2GD(\rho)}\Big(r + \frac{D(r)}{r}\Big) + \frac{p_1\rho_1^2}{2Gr}, \qquad D(r) = 2\int\limits_{\rho_1}^{r} x\eta(x)\,dx. \tag{3}$$

Отсюда для однородного материала ($\nu = \mathrm{const}$) находим выражение

$$u_r = \frac{1}{2G(1-k^2)}\Big((1-2\nu)(p_1k^2 - p_0)r + (p_1 - p_0)\,\frac{k^2\rho^2}{r}\Big), \qquad k = \frac{\rho_1}{\rho}, \tag{4}$$

совпадающее с выражением для перемещения в радиальном направлении в решении задачи Ламе (формула (2.6) в [7. С. 387]).

Решение (4) остается справедливым для конечного цилиндра из неоднородного материала, на торцах которого касательные напряжения равны нулю.

Контактные задачи. Для описанного выше цилиндра из неоднородного материала поставим две контактные задачи. В задаче 1 на цилиндр с натягом δ насажен жесткий кольцевой бандаж длиной $2a$, на внутренней поверхности цилиндра действует равномерно распределенное давление $\sigma_r = -p_1$. В задаче 2 в цилиндр с натягом δ вставлен жесткий кольцевой вкладыш длиной $2a$, на внешней поверхности цилиндра действует равномерно распределенное давление $\sigma_r = -p_0$. Трение в области контакта отсутствует. Требуется определить контактное давление $\sigma_r(\rho, z) = -q(z)$ (задача 1) или $\sigma_r(\rho_1, z) = -q(z)$ (задача 2) при $|z| \leqslant a$.

Для того чтобы свести уравнения задач 1, 2 к интегральным уравнениям, построим фундаментальные решения вспомогательных задач о деформировании цилиндра из неоднородного материала под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки, приложенной на внешней поверхности цилиндра (задача 1) или на его внутренней поверхности (задача 2). Для решения вспомогательных краевых задач используем двумерное (по r, z) представление Фрайбергера общего решения уравнений упругого равновесия [12–14] и интегральное преобразование Фурье по z. В результате решения вспомогательных задач определим радиальные перемещения в сечении, в котором приложена нагрузка. В силу принципа суперпозиции в контактных задачах 1, 2 на эти перемещения накладываются перемещения (3), обусловленные действием дополнительного равномерно распределенного давления, приложенного на внутренней (задача 1) или внешней (задача 2) поверхности цилиндра.

Интегрируя фундаментальные решения по области контакта, заменяя заданную сосредоточенную силу неизвестным давлением, суммируя полученное в результате выражение для радиального перемещения с выражением (3) и приравнивая сумму этих выражений к величине натяга, получаем интегральное уравнение относительно контактного давления

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\Big(\frac{x-\xi}{\lambda}\Big)\,d\xi = \pi f \quad (|x| \leqslant 1), \qquad K(t) = \int\limits_0^\infty L(u)\cos(ut)\,du, \quad L(u) = \frac{L_1(u)}{L_2(u)}, \tag{5}$$

где x, λ, $\varphi(x)$ — безразмерные величины:

$$x = \frac{z}{a}, \qquad \lambda = \frac{\rho}{a}, \qquad \varphi(x) = \frac{q(z)}{2G}. \tag{6}$$

В задаче 1

$$L_1(u) = -(I_1K_1^* - K_1I_1^*)^2 + 4F_1I_1K_1 + 2F_2K_1^2 + 2F_3I_1^2; \tag{7}$$

$$L_2(u) = (I_1K_1^* - K_1I_1^*)^2 - 4F_1(I_1K_1 - I_1^*K_1^*) - \\ - 2F_2(K_1^2 - (K_1^*)^2) - 2F_3(I_1^2 - (I_1^*)^2) + 4F_1^2 - 4F_2F_3; \tag{8}$$

$$f = \frac{\delta}{a} - \frac{p_1\lambda k^2}{4GD_0}, \qquad D_0 = \int\limits_k^1 t\eta(\rho t)\,dt; \tag{9}$$

$$F_1 = \int\limits_{ku}^{u} t\eta\Big(\frac{\rho t}{u}\Big) I_0(t)K_0(t)\,dt, \qquad qF_2 = \int\limits_{ku}^{u} t\eta\Big(\frac{\rho t}{u}\Big) I_0^2(t)\,dt, \quad F_3 = \int\limits_{ku}^{u} t\eta\Big(\frac{\rho t}{u}\Big) K_0^2(t)\,dt, \\ I_n = I_n(u), \qquad K_n = K_n(u), \qquad I_n^* = I_n(ku), \qquad K_n^* = K_n(ku) \qquad (n = 0, 1). \tag{10}$$

Здесь $I_n(u)$, $K_n(u)$ — модифицированные функции Бесселя [15].

В задаче 2 в формулах (7)–(10) нужно заменить функции $L_1(u)$ и f:

$$L_1(u) = k[(I_1K_1^* - K_1I_1^*)^2 + 4F_1I_1^*K_1^* + 2F_2(K_1^*)^2 + 2F_3(I_1^*)^2], \qquad f = \frac{\delta}{a} - \frac{p_0\lambda k}{4GD_0}. \tag{11}$$

В случае однородного материала ($\nu = \mathrm{const}$) функции (7), (8), (10) для задачи 1 с точностью до знака совпадают с известными функциями (см. формулы (1.5) в [10]).

Безразмерные параметры k, λ, введенные в формулах (4), (6), характеризуют относительную толщину стенок цилиндра и относительную длину бандажа или вкладыша соответственно.

Асимптотический метод. Для решения интегрального уравнения (5) применим сингулярный асимптотический метод [8–10], эффективный при малых значениях λ (для областей контакта достаточно большой протяженности).

Предположим, что функция $\eta(r)$ (2) разлагается в степенной ряд вида

$$\eta(r) = \eta_0 + \eta_1\frac{r^2}{\rho^2} + \eta_2\frac{r^4}{\rho^4} + \ldots \quad (\rho_1 \leqslant r \leqslant \rho), \qquad \eta_0 = -\frac{1}{2(1-\nu)}. \tag{12}$$

Удерживая в разложении (12) конечное число членов, можно последовательно взять интегралы (10). Далее оставляем в (12) только первые два члена. Интегралы в (10) можно вычислить, используя формулы [15]

$$\int tI_0(t)K_0(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\,(I_0(t)K_0(t) + I_1(t)K_1(t)),$$

$$\int tI_0^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\,(I_0^2(t) - I_1^2(t)), \qquad \int tK_0^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\,(K_0^2(t) - K_1^2(t)),$$

$$\int t^3 I_0(t)K_0(t)\,dt = \frac{t^2}{6}\,[t^2 I_0(t)K_0(t) + (t^2+2)I_1(t)K_1(t) + t(I_1(t)K_0(t) - I_0(t)K_1(t))],$$

$$\int t^3 I_0^2(t)\,dt = \frac{t^2}{6}\,[t^2(I_0^2(t) - I_1^2(t)) + 2I_1(t)(tI_0(t) - I_1(t))],$$

$$\int t^3 K_0^2(t)\,dt = \frac{t^2}{6}\,[t^2(K_0^2(t) - K_1^2(t)) - 2K_1(t)(tK_0(t) + K_1(t))].$$

При использовании сингулярного асимптотического метода целесообразно выбрать функцию-символ $L(u)u$ ядра (5) таким образом, чтобы на бесконечности она стремилась к единице. С этой целью разделим обе части интегрального уравнения (5) на c_0. В случае задачи 1

$$c_0 = \frac{a_1}{d_1}, \qquad a_1 = \frac{-1}{8(1-\nu)} + \frac{\eta_1 k^2}{4}, \qquad d_1 = \frac{-1}{16(1-\nu)^2} + \frac{\eta_1(1+k^2)}{8(1-\nu)} - \frac{\eta_1^2 k^2}{4},$$

в случае задачи 2 выражение для величины a_1 заменяется выражением

$$a_1 = -\frac{1}{8(1-\nu)} + \frac{\eta_1}{4}.$$

Нетрудно показать, что функция-символ $L(u)/c_0$ имеет следующую асимптотику на бесконечности и в нуле [16]:

$$\frac{L(u)}{c_0} = A_0 + o(1) \quad (u \to +0), \qquad \frac{L(u)}{c_0} = \frac{1}{u} + \frac{c_1}{u^2} + o\Big(\frac{1}{u^2}\Big) \quad (u \to +\infty), \tag{13}$$

$$A_0 = \frac{L(0)}{c_0}, \qquad c_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{e_1}{d_1}.$$

В случае задачи 1

$$b_1 = -\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{8(1-\nu)}\Big(3 + \frac{1}{k}\Big) + \frac{\eta_1 k}{12}\,(7+9k)\Big],$$

$$e_1 = \frac{1}{8(1-\nu)}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\Big(1 - \frac{1}{8(1-\nu)}\Big) - \frac{\eta_1}{4}\Big(k^2 - \frac{1}{k}\Big) + \frac{\eta_1(k^2 + 3k - 3 - k^{-1})}{32(1-\nu)} + {}$$
$$+ \frac{3\eta_1^2 k^2}{16}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big),$$

в случае задачи 2 выражение для b_1 заменяется выражением

$$b_1 = \frac{1}{4}\Big[1 - \frac{1}{8(1-\nu)}\Big(1 + \frac{3}{k}\Big) - \frac{3\eta_1}{4}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\Big].$$

Для однородного материала ($\eta_1 = 0$) в задаче 1 имеем [10]

$$A_0 = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{k^2}{(1-\nu^2)(1-k^2)}, \qquad c_0 = 2(1-\nu), \qquad c_1 = 1 - 2\nu, \tag{14}$$

в задаче 2 —

$$A_0 = \frac{-k}{2(1+\nu)} + \frac{k}{(1-\nu^2)(1-k^2)}, \qquad c_0 = 2(1-\nu), \qquad c_1 = -\frac{1-2\nu}{k}. \tag{15}$$

При $k = 0$ в задаче 1 параметры в формулах (14) совпадают с известными параметрами для сплошного цилиндра [8, 9]. При уменьшении толщины стенок цилиндра ($k \to 1$) в обеих задачах наблюдаются существенное увеличение параметра A_0 и расширение области значений функции $L(u)/c_0$, что усложняет ее аппроксимацию для получения асимптотических решений в удобной форме. Для однородного и слабонеоднородного материалов (при малых η_1) значение A_0 является максимумом положительной монотонно убывающей функции-символа $L(u)/c_0$ ($0 \leqslant u < \infty$).

Постоянные A_0 (см. (14), (15)) соответствуют модифицированному решению Ламе, в случае если на него накладывается решение, в котором учитывается осевое удлинение цилиндра, при этом торцы цилиндра свободны от напряжений (см. формулу (2.10) в [7. С. 388] при $p_1 = 0$ или $p_0 = 0$). В модифицированном решении задачи Ламе эти постоянные пропорциональны радиальным перемещениям той стенки цилиндра, на которой приложено заданное давление (давление на другой стенке отсутствует). Контактное давление под бандажом или вкладышем бесконечной длины обратно пропорционально величине A_0, определяемой для однородного материала по формуле (14) или (15) соответственно. Результаты анализа показывают, что в случае толстостенных цилиндров (при малых k и $\eta_1 = p_0 = p_1 = 0$) контактное давление, отнесенное к величине натяга, под бесконечным вкладышем существенно больше, чем под бесконечным бандажом, а в случае тонкостенных цилиндров из однородного материала эти давления одного порядка. Для цилиндра из неоднородного материала постоянные A_0 в асимптотике (13) также соответствуют модифицированному решению аналога задачи Ламе, рассмотренного выше, в случае, когда на торцах бесконечно длинного цилиндра отсутствуют напряжения.

Заменим уравнение (5) на систему трех интегральных уравнений

$$\int\limits_{-1}^{\infty} \varphi_0\Big(\frac{1+\xi}{\lambda}\Big) K\Big(\frac{x-\xi}{\lambda}\Big)\, d\xi = \pi\lambda + \int\limits_{-\infty}^{-1} \Big[\varphi_0\Big(\frac{1-\xi}{\lambda}\Big) - \varphi_1(\xi)\Big] K\Big(\frac{x-\xi}{\lambda}\Big)\, d\xi \qquad (-1 \leqslant x < \infty); \tag{16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{1} \varphi_0\Big(\frac{1-\xi}{\lambda}\Big) K\Big(\frac{x-\xi}{\lambda}\Big)\, d\xi = \pi\lambda + \int\limits_{-1}^{\infty} \Big[\varphi_0\Big(\frac{1+\xi}{\lambda}\Big) - \varphi_1(\xi)\Big] K\Big(\frac{x-\xi}{\lambda}\Big)\, d\xi \qquad (-\infty < x \leqslant 1); \tag{17}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big) K\Big(\frac{x-\xi}{\lambda}\Big)\, d\xi = \pi\lambda \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{18}$$

эквивалентную ему при условии

$$\varphi(x) = \frac{f}{\lambda}\Big[\varphi_0\Big(\frac{1+x}{\lambda}\Big) + \varphi_0\Big(\frac{1-x}{\lambda}\Big) - \varphi_1\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\Big] \qquad (|x| \leqslant 1). \tag{19}$$

Точное решение уравнения (18) находится с помощью преобразования Фурье и является проникающим или вырожденным решением, справедливым вдали от точек $x = \pm 1$, его можно получить также с использованием δ-функции Дирака для бесконечного бандажа или вкладыша, если в уравнении (5) перейти к пределу $\lambda \to 0$. Нетрудно показать, что при $\lambda \to 0$ интегральные слагаемые в правых частях уравнений (16), (17) экспоненциально убывают. Пренебрегая в нулевом приближении этими интегралами, с использованием (19) представим главный член асимптотического решения уравнения (5) при малых λ в виде [8–10]

$$\varphi(x) = \frac{f}{c_0\lambda}\Big[\psi\Big(\frac{1+x}{\lambda}\Big) + \psi\Big(\frac{1-x}{\lambda}\Big) - \frac{1}{A_0}\Big] \qquad (|x| \leqslant 1), \tag{20}$$

где функция $\psi(s)$ определяется из уравнения Винера — Хопфа

$$\int\limits_0^\infty \psi(\tau)\,d\tau \int\limits_0^\infty L(u)\cos\left(u(\tau-s)\right)du = \pi c_0 \qquad (0 \leqslant s < \infty) \tag{21}$$

и представляет собой слагаемые, описывающие пограничный слой и содержащие корневые особенности контактных давлений на концах области контакта.

Для решения уравнения (21) применим метод Винера — Хопфа [17]. С целью факторизации функции $L(u)/c_0$ аппроксимируем ее на действительной оси с учетом свойств (13) выражением

$$L^*(u) = \frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+C^2}\,\exp\Big(\frac{D}{\sqrt{u^2+E^2}}\Big)\prod_{m=1}^{M}\frac{u^2+A^2G_m^2}{u^2+G_m^2}; \tag{22}$$

$$D = c_1, \qquad \frac{B}{C^2}\exp\Big(\frac{D}{E}\Big)A^{2M} = A_0, \qquad E \gg 1. \tag{23}$$

Здесь постоянные A, C, G_m ($G_m \neq G_n$ при $m \neq n$) определяются численно с использованием метода Монте-Карло; постоянные B, E должны удовлетворять последним двум условиям (23). При фиксированном k, увеличивая значение M, можно увеличить точность этой аппроксимации (в проведенных ниже расчетах выбирались значения $M = 4$, $E = 10$). При фиксированном значении M с увеличением k погрешность аппроксимации (22) увеличивается. В табл. 1 для обеих задач приведены значения параметров аппроксимации (22) и ее относительная погрешность θ на участке $0 \leqslant u < \infty$ при $\nu = 0{,}3$ и различных значениях k и η_1. Аппроксимация проводилась до значения $k = 0{,}99$, соответствующего тонкостенному цилиндру. Следует отметить, что при $k \geqslant 0{,}98$ для решения контактных задач можно использовать методы теории оболочек [18].

В результате факторизации приближенное решение уравнения Винера — Хопфа (21) можно представить в форме

$$\psi(s) = \frac{\Psi_0(s)+I(s)}{\sqrt{A_0}}, \qquad I(s) = -\frac{c_1}{\pi}\int\limits_0^s \Psi_0(s-\tau)K_0(E\tau)\,d\tau,$$
$$\Psi_0(s) = \frac{\mathrm{e}^{-Bs}}{\sqrt{\pi s}} + \frac{C}{\sqrt{B}}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{Bs}\,) + \sum_{m=1}^{M} Q_m U(AG_m, s); \tag{24}$$

$$U(F,s) = \frac{F-C}{\sqrt{B-F}}\,\mathrm{e}^{-Fs}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{(B-F)s}\,) + \frac{C}{\sqrt{B}}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{Bs}\,),$$
$$Q_m = \prod_{n=1}^{M}(G_n - AG_m)\Big(A^{M+1}G_m\prod_{n=1,\ n\neq m}^{M}(G_n-G_m)\Big)^{-1}. \tag{25}$$

Здесь $K_0(t)$ — модифицированная функция Бесселя; $\mathrm{erf}\,(x)$ — интеграл вероятностей. На основе формул (20), (24), (25) для интегральной характеристики решения получаем выражение

$$N_0 = \int\limits_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx = \frac{f}{c_0}\Big(\frac{2}{\sqrt{A_0}}\,[Z_0(t)+J(t)] - \frac{t}{A_0}\Big), \tag{26}$$

Таблица 1

Параметры аппроксимации

k	η_1	A_0	B	C	D	A	G_1	G_2	G_3	G_4	θ, %
Задача 1											
	−0,08	0,4050	1,50	2,87	0,345	1,10	2,10	3,30	3,40	3,60	1,5
0,1	0	0,3960	1,50	7,63	0,400	1,40	2,20	3,90	4,20	4,50	1,5
	0,08	0,3840	1,50	7,77	0,465	1,40	2,30	4,00	4,30	4,50	1,5
	−0,08	0,7800	1,30	10,90	0,287	1,70	2,40	3,70	4,00	4,05	5,0
0,5	0	0,7510	1,30	11,20	0,400	1,70	2,50	3,40	4,00	4,50	5,0
	0,08	0,7220	1,30	11,50	0,527	1,70	2,60	3,30	4,20	4,60	5,0
	−0,08	5,3300	2,10	44,90	0,237	2,90	5,80	7,00	7,50	7,90	8,5
0,9	0	5,0700	2,10	46,40	0,400	2,90	5,80	6,90	7,90	8,00	8,5
	0,08	4,8300	2,10	41,70	0,598	2,80	6,60	7,00	7,30	7,40	8,5
0,99	0	54,5000	5,11	272,00	0,400	5,43	11,38	27,34	30,33	34,50	10,0
Задача 2											
	−0,08	0,0726	1,70	11,30	−4,000	1,30	2,10	2,90	6,00	6,60	1,0
0,1	0	0,0725	1,70	11,30	−4,000	1,30	2,10	2,90	6,00	6,60	1,0
	0,08	0,0725	1,70	11,30	−4,000	1,30	2,10	2,90	6,10	6,50	1,0
	−0,08	0,5490	1,10	11,40	−0,778	1,70	2,10	2,90	3,90	5,00	4,5
0,5	0	0,5400	1,10	11,50	−0,800	1,70	2,10	3,00	3,80	5,10	4,5
	0,08	0,5330	1,30	9,83	−0,823	1,60	2,70	3,30	3,70	3,90	4,5
	−0,08	5,0800	2,10	44,60	−0,408	2,90	6,00	6,90	7,30	7,80	8,5
0,9	0	4,8600	2,10	45,50	−0,444	2,90	6,00	6,90	7,60	7,80	8,5
	0,08	4,6700	2,10	46,30	−0,489	2,90	6,00	7,00	7,60	8,00	8,5
0,99	0	54,3000	5,41	269,00	−0,404	5,43	11,38	27,34	30,33	34,50	11,0

где

$$J(t) = -\frac{c_1}{\pi} \int_0^t Z_0(t-\tau) K_0(E\tau)\, d\tau, \qquad t = \frac{2}{\lambda},$$

$$Z_0(t) = \frac{C}{\sqrt{B}} \Big[\Big(t - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C}\Big) \operatorname{erf}(\sqrt{Bt}\,) + \sqrt{\frac{t}{\pi B}}\, \mathrm{e}^{-Bt}\Big] + \sum_{m=1}^{M} Q_m T(AG_m, t), \tag{27}$$

$$T(F, s) = \frac{C}{\sqrt{B}} \Big[\Big(s - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{F}\Big) \operatorname{erf}(\sqrt{Bs}\,) + \sqrt{\frac{s}{\pi B}}\, \mathrm{e}^{-Bs}\Big] - \\ - \Big(1 - \frac{C}{F}\Big) \frac{\mathrm{e}^{-Fs}}{\sqrt{B-F}} \operatorname{erf}(\sqrt{(B-F)s}\,).$$

Погрешность решений (20), (24)–(26) при $\lambda \leqslant 1$ не превышает $(5+\theta)$ % (5 % — погрешность решения уравнения (21), в котором функция $L(u)$ заменена на $L^*(u)$; θ — погрешность аппроксимации (22)).

При $F > B$ в формулах (25), (27) следует выполнить замену

$$\frac{\mathrm{e}^{-Fs}}{\sqrt{B-F}} \operatorname{erf}(\sqrt{(B-F)s}\,) \to \frac{2}{\sqrt{\pi(F-B)}} \int_0^{\sqrt{(F-B)s}} \mathrm{e}^{\tau^2 - Fs}\, d\tau.$$

Таблица 2

Значения интегральной характеристики N_0/f

k	η_1	Задача 1		Задача 2	
		$\lambda = 0{,}25$	$\lambda = 1$	$\lambda = 0{,}25$	$\lambda = 1$
0,1	−0,08	16,20	4,480	76,20	19,900
	0	14,90	4,100	76,20	19,900
	0,08	13,60	3,710	76,10	19,900
0,5	−0,08	8,55	2,440	11,10	3,110
	0	7,97	2,260	10,90	3,070
	0,08	7,34	2,070	10,80	3,040
0,9	−0,08	1,24	0,346	1,27	0,356
	0	1,17	0,326	1,22	0,340
	0,08	1,09	0,303	1,15	0,321
0,99	0	0,106	0,0278	0,107	0,0279

В табл. 2 приведены значения интегральной характеристики N_0/f (26), вычисленные для обеих задач при различных значениях k, η_1, λ для значений параметров аппроксимации, приведенных в табл. 1.

Заключение. Показана связь между решением модифицированной задачи Ламе для полого цилиндра из однородного или неоднородного материала (с переменным коэффициентом Пуассона) и решениями соответствующих контактных задач для бандажа или вкладыша достаточно большой протяженности.

Результаты сравнения формул (7) и (11) показывают, что при $k \to 1$ функция-символ $L(u)$ для вкладыша стремится к функции $L(u)$ для бандажа. Поэтому при $k \to 1$ контактные давления и их интегральная характеристика, отнесенные к f, для вкладыша приближаются сверху к соответствующим значениям для бандажа (см. табл. 2), при этом наблюдается сближение параметров аппроксимации (см. табл. 1). В задаче 2 возникают бóльшие контактные давления, чем в задаче 1, особенно в случае толстостенных цилиндров (см. табл. 2). При уменьшении λ (увеличении области контакта) контактные давления и их интегральная характеристика увеличиваются.

Для выбранного закона неоднородности коэффициент Пуассона $\nu(r)$ возрастает на интервале $\rho_1 \leqslant r \leqslant \rho$ при $\eta_1 < 0$ и убывает при $\eta_1 > 0$. При увеличении коэффициента Пуассона в направлении от внутренней поверхности цилиндра к внешней (при этом модуль Юнга также увеличивается) контактные давления и их интегральная характеристика, отнесенные к f, в обеих рассмотренных задачах, как правило, больше, чем при его уменьшении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: Ленанд, 2014.
2. **Калинчук В. В.** Динамика поверхности неоднородных сред / В. В. Калинчук, Т. И. Белянкова. М.: Физматлит, 2009.
3. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И.** Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 2. С. 289–302.
4. **Абрамович М. В., Колосова Е. М., Чебаков М. И.** Контактная задача при наличии сил трения в зоне контакта для трехкомпонентного цилиндрического основания // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 1. С. 262–269.

5. **Чебаков М. И., Колосова Е. М.** Контактное взаимодействие бандажа и полого цилиндра с дефектом при переменном внутреннем давлении // Эколог. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. 2014. № 3. С. 75–83.
6. **Белянкова Т. И., Калинчук В. В., Лыжов В. А.** Особенности динамики трехслойного полого цилиндра // Эколог. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. 2015. № 4. С. 19–32.
7. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
8. **Александров В. М.** Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. М.: Машиностроение, 1986.
9. **Alexandrov V. M.** Three-dimensional contact problems / V. M. Alexandrov, D. A. Pozharskii. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001.
10. **Пожарский Д. А.** Контактная задача для полого цилиндра // Прикл. математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 727–733.
11. **Кузнецов Е. А.** Давление круглого цилиндра на полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 1. С. 73–86.
12. **Бородачев А. Н.** Упругое равновесие неоднородного по толщине слоя // Прикл. механика. 1988. Т. 24, № 8. С. 30–35.
13. **Пожарский Д. А.** Упругое равновесие неоднородного клина с переменным коэффициентом Пуассона // Прикл. математика и механика. 2016. Т. 80, вып. 5. С. 614–621.
14. **Gurtin M. E.** The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. Bd VIa/2. Berlin: Springer-Verlag, 1972. S. 1–296.
15. **Прудников А. П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука, 1983.
16. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
17. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
18. **Григолюк Э. И.** Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. М.: Машиностроение, 1980.

Поступила в редакцию 23/I 2019 г.,
после доработки — 1/IV 2019 г.
Принята к публикации 29/IV 2019 г.