

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК
ЗАЖИГАНИЯ ТОПЛИВА ЛУЧИСТЫМ ПОТОКОМ
ЧЕРЕЗ ПРЕГРАДУ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ**

УДК 536.46

А. Г. Князева

**Томский государственный университет,
634050 Томск**

В работе представлено аналитическое решение задачи о зажигании топлива лучистым потоком в сопряженной постановке. Модель обобщает и дополняет полученные ранее результаты. Рассмотрены случаи зажигания через абсолютно прозрачную и абсолютно непрозрачную преграды. Получены приближенные формулы для оценки времени и температуры подключения химической реакции и времени и температуры срыва квазистационарного равновесия в различных предельных случаях. Даны оценки влияния теплоотдачи в окружающую среду по кондуктивному механизму на характеристики зажигания. Проведено сопоставление характеристик зажигания топлива и преграды.

Введение. Зажиганию конденсированных веществ в осложненной теплофизической ситуации (теплоотдача в окружающую среду [1], переход волны горения через контакт двух сред [2], зажигание источником с ограниченным запасом тепла [3] и т. п.) посвящено достаточно большое число работ. К этому же классу задач относится и зажигание топлива через оболочку (преграду) с сопряженными условиями теплообмена. Приближенный аналитический подход, основанный на решении инертной задачи теплопроводности, асимптотическом представлении этого решения в различных частных случаях (благодаря наличию в задаче больших и малых параметров) и применении одного из традиционных критериев [1, 4], позволяет получить простые инженерные формулы для оценки времени и температуры зажигания в достаточно сложных постановках и помогает выявить не очевидные на первый взгляд эффекты.

Постановка задачи. Пусть поверхность бесконечного слоя непрозрачного конденсированного вещества, в котором может протекать экзотермическая химическая реакция, отделена от внешнего источника и окружающей среды инертной оболочкой толщиной l . Считаем, что теплофизические характеристики веществ c_k , ρ_k , λ_k (где $k = 1$ относится к оболочке, $k = 2$ — к реагенту, $k = 3$ — к окружающей среде) не зависят от температуры. Полагаем, что химическая реакция может быть описана простейшей схемой



а тепловыделение в реакции описывается законом Аррениуса

$$Q_2 \frac{\partial y}{\partial t} = Q_2 W = Q_2 k_2 (1 - y)^n \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right),$$

где Q_2 , k_2 , E_2 — обычные формально-кинетические константы; y — степень превращения.

Уравнение распространения тепла в топливе в этом случае имеет вид

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + Q_2 W, \quad x > l.$$

Для инертных сред справедливы уравнения

$$c_3 \rho_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, \quad x < 0, \quad c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \sigma q_0 \exp(-\sigma x), \quad 0 < x < l,$$

где σ — показатель поглощения оболочки, см^{-1} ; q_0 — плотность мощности внешнего источника, $\text{Дж}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$.

Если тепловые контакты между средами идеальны, то на границах $x = 0$ и $x = l$ выполняются условия

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad T_3 = T_1, \quad x = 0; \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + q_0 \exp(-\sigma l), \quad T_1 = T_2, \quad x = l.$$

На бесконечном удалении от поверхностей раздела сред запишем условия

$$\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} \right)_{-\infty} = 0; \quad \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{+\infty} = 0.$$

В начальный момент времени $t = 0$ температуры веществ одинаковы и равны $T_{\text{н}}$.

Требуется найти время зажигания топлива — время от начала действия источника (лучистого потока) до момента возбуждения химической реакции в топливе.

Прежде чем переходить к анализу задачи, сделаем некоторые замечания.

1. Естественно, что свойства веществ, в частности теплоемкость, — сложные функции температуры, а в реагирующем веществе — и степени превращения, что определяется тепловым и концентрационным расширениями веществ. В химически реагирующем веществе этими зависимостями можно пренебречь, если свойства реагента и продукта близки.

2. Простейшая тепловая постановка задачи справедлива, если образец, покрытый оболочкой, не закреплен. Если перемещения конца $x = 0$ ограничены, то математическая постановка задачи не столь очевидна. Различие в характере теплового расширения твердых веществ может привести к возникновению термических напряжений [5], которые скажутся на изменении температурного поля.

3. Схема реакции, отличная от (1), например, вследствие газификации, приведет к появлению дополнительных условий — неидеальности теплового контакта между веществами, ограничениям на величины q_0 и Q_2 , при которых еще можно не учитывать искривление оболочки вследствие теплового расширения и давления газообразных продуктов и т. п.

Для удобства анализа задачи перейдем к безразмерным переменным. В качестве масштабов выберем характерные для зажигания величины [1]: период адиабатической индукции

$$t_* = \frac{c_2 R T_*^2}{Q_2 k_2 E_2} \exp\left(\frac{E_2}{R T_*}\right),$$

толщину теплового пограничного слоя в топливе, который формируется за время t_* , $x_* = \sqrt{\chi_2 t_*}$, где $\chi_2 = \lambda_2 / (c_2 \rho_2)$, и семеновский интервал температур $R T_*^2 / E_2$, где T_* определяется из анализа задачи. Тогда в безразмерных переменных

$$\Theta_k = (T_k - T_*) E_2 / (R T_*^2), \quad \xi = x / x_*, \quad \tau = t / t_*, \quad k = 1, 2, 3,$$

задача примет вид

$$B_c \frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = B_\lambda \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial \xi^2}, \quad \xi < 0, \quad (2)$$

$$K_c \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = K_\lambda \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + g Q_0 \exp[-g\xi], \quad 0 < \xi < \delta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \xi^2} + (1-y)^n \exp\left[\frac{\Theta_2}{1+\beta\Theta_2}\right], \quad \xi > \delta, \quad (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \gamma(1-y)^n \exp\left[\frac{\Theta_2}{1+\beta\Theta_2}\right], \quad (5)$$

$$\xi \rightarrow +\infty: \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} = 0, \quad (6)$$

$$\xi = \delta: K_\lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} + Q_0 \exp[-g\delta], \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad (7)$$

$$\xi = 0: B_\lambda \frac{\partial \Theta_3}{\partial \xi} = K_\lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi}, \quad \Theta_1 = \Theta_3, \quad (8)$$

$$\xi \rightarrow -\infty: \frac{\partial \Theta_3}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

$$\tau = 0: \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = -\Theta_n, \quad (10)$$

где

$$B_c = \frac{c_3 \rho_3}{c_2 \rho_2}, \quad B_\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad K_c = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad Q_0 = \frac{q_0 E_2 x_*}{RT_*^2 \lambda_2}$$

$$g = \sigma x_*, \quad \delta = l/x_*, \quad \beta = RT_*/E_2, \quad \gamma = \frac{c_2 RT_*^2}{E_2 Q_2}, \quad \Theta_n = \frac{T_* - T_n}{RT_*^2} E_2$$

— параметры задачи.

Для задач зажигания характерно $\gamma \ll 1$, $\beta \ll 1$, $\Theta_n \gg 1$. Величины остальных параметров зависят от теплофизических свойств веществ.

Непрозрачная преграда. Рассмотрим простейшую задачу. Пусть оболочка абсолютно непрозрачна, а влиянием окружающей среды можно пренебречь. Тогда в уравнении (3) и в граничном условии (7) положим $g \rightarrow \infty$, а на свободной границе топлива вместо (8) запишем

$$-K_\lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} = Q_0. \quad (11)$$

Полагаем, что реакция в топливе имеет нулевой порядок ($n = 0$).

На стадии инертного прогрева поле температур найдем из решения инертной задачи (3), (4), (6), (7), (10), (11) без химических источников в (4). В пространстве изображений по Лапласу ($\Theta_k \rightarrow u_k$, $\tau \rightarrow p$) это решение для топлива имеет вид

$$u_2(p, \xi) = \frac{2Q_0}{1 + K_\epsilon} \frac{1}{p\sqrt{p}} \frac{\exp[-\sqrt{p}(\xi - \delta)]}{\exp[\omega\sqrt{p}] + \epsilon \exp[-\omega\sqrt{p}]} - \frac{\Theta_n}{p}, \quad (12)$$

где $\epsilon = (1 - K_\epsilon)/(1 + K_\epsilon)$; $K_\epsilon = \sqrt{(c_1 \rho_1 \lambda_1)/(c_2 \rho_2 \lambda_2)}$ — тепловая активность оболочки

по отношению к топливу, $\omega = \sqrt{K_c/K_\lambda} \delta = l/\sqrt{\chi_2 t_*}$ — термическая толщина оболочки (отношение ее толщины к толщине теплового пограничного слоя, образующегося в ней за характерное время t_*).

Предварительный анализ решения инертной задачи при малых и больших значениях параметра ω , как показано в [6], удобнее проводить в пространстве изображений, т. е. на основе формулы (12). Так, в случае термически тонкой преграды, $\omega \ll 1$, с точностью до величин второго порядка малости по ω изображение температуры представим в виде

$$u_2(p, \delta) = -\frac{\Theta_{\infty}}{p} + \frac{Q_0}{p\sqrt{p}} \frac{1}{1 + \omega K_\epsilon \sqrt{p}} \frac{1}{1 + \omega^2 p/2}, \quad (13)$$

где использовано разложение $\exp(\pm \omega \sqrt{p}) \approx 1 \pm \omega \sqrt{p} + \omega^2 p/2 + \dots$. В противоположной ситуации имеем малую величину $\epsilon \exp(-2\omega \sqrt{p})$, так как $|\epsilon| < 1$. Это позволяет ограничить рассмотрение несколькими членами ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon)^n \exp(-2\omega n \sqrt{p})$:

$$u_2(p, \delta) \approx -\frac{\Theta_{\infty}}{p} + \frac{Q_0}{p\sqrt{p}} \frac{2}{1 + K_\epsilon} [\exp(-\omega \sqrt{p}) - \epsilon \exp(-3\omega \sqrt{p})]. \quad (14)$$

Изображения производных $\partial \Theta_2(\tau, \delta)/\partial \xi$ найдем соответственно из формул (13), (14) для малых и больших ω , используя связь $\partial u_2(p, \delta)/\partial \xi = -\sqrt{p} u_2(p, \delta)$. Производные $\partial \Theta_2(\tau, \delta)/\partial \tau$ легко найти либо непосредственным дифференцированием оригиналов функций (13), (14), либо в пространстве изображений по формуле $p(u_2 + \Theta_{\infty}/p)$.

Рассмотрим оба случая ($\omega \ll 1$, $\omega \gg 1$) отдельно.

Тонкая инертная преграда. Переходя к оригиналам в (13), используя асимптотическое представление функции $\operatorname{erfc}(z) \approx \exp(-z^2)(1 - (2z^2)^{-1} + \dots)/\sqrt{\pi z}$ и отбрасывая слагаемые высокого порядка малости, получим

$$\Theta_2(\tau, \delta) = -\Theta_{\infty} + Q_0 \left\{ 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \omega K_\epsilon - \frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi\tau}} (1 - 2K_\epsilon^2) \right\} + o(\omega^3), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\tau, \delta)}{\partial \tau} = Q_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} + \frac{\omega^2(1 - 2K_\epsilon^2)}{4\sqrt{\pi\tau^3}} \right\} + o(\omega^3), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\tau, \delta)}{\partial \xi} = -Q_0 \left\{ 1 - \frac{\omega K_\epsilon}{\sqrt{\pi\tau}} \right\} + o(\omega^3). \quad (17)$$

Согласно адиабатическому критерию [1], приравняем в момент зажигания τ_a скорости роста температуры за счет внешнего источника (16) и вследствие тепловыделения в химической реакции. С точностью до слагаемых порядка β имеем

$$\exp(\Theta_a) \approx \frac{Q_0}{\sqrt{\pi\tau_a}} \left\{ 1 + \frac{\omega^2(1 - 2K_\epsilon^2)}{4\tau_a} \right\}. \quad (18)$$

Температуру зажигания Θ_a найдем из (15) при $\tau = \tau_a$. Если $\omega = 0$ (зажигание без преграды), из формул (15), (18) получим известный результат

$$\tau_a^0 = \frac{Q_0}{\pi} = \frac{\Theta_{\infty}}{2}, \quad (19)$$

когда масштабной температурой считают температуру подключения химических реакций

[1] $\Theta_a^0 = 0$ ($T_* = T_a^0$):

$$T_a^0 - T_* = \frac{2}{\pi} q_0^2 \frac{E_2}{RT_a^0} \frac{t_*(T_a^0)}{c_2 \rho_2 \lambda_2}. \quad (20)$$

Для $\omega \neq 0$ из (15), (18) при $\tau = \tau_a$ имеем

$$\frac{\exp(\Theta_a)}{\Theta_a + \Theta_n} = \frac{1}{2\tau_a} \frac{1 + \frac{\omega^2(1 - 2K_\varepsilon^2)}{4\tau_a}}{1 - \frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau_a}} - \frac{\omega^2}{4\tau_a}(1 - 2K_\varepsilon^2)}.$$

Оставляя масштабной температуру T_a^0 (20) и предполагая, что температура T_a через тонкую преграду не сильно отличается от T_*^0 , так что $|\Theta_a/\Theta_n| \ll 1$, прологарифмируем последнее равенство. В результате арифметических преобразований найдем

$$\Theta_a \approx \frac{\Theta_n}{1 - \Theta_n} \ln \left[\frac{1}{x_a} \left(1 + \frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Theta_n x_a}} + \frac{\omega^2}{\Theta_n x_a} \left(1 - 2K_\varepsilon^2 + \frac{\pi}{2} K_\varepsilon^2 \right) \right) \right], \quad (21)$$

где $x_a = \tau_a/\tau_a^0$.

Из (18), (21) для времени зажигания τ_a или относительного времени зажигания x_a получим

$$\left\{ \frac{1}{x_a} \left[1 + \frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Theta_n x_a}} + \frac{\omega^2}{\Theta_n x_a} \left(1 - 2K_\varepsilon^2 + \frac{\pi}{2} K_\varepsilon^2 \right) \right] \right\}^{\Theta_n/(\Theta_n - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x_a}} \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{2\Theta_n x_a} (1 - 2K_\varepsilon^2) \right\}.$$

В пределе больших Θ_n , когда можно принять $\Theta_n/(\Theta_n - 1) \approx 1$, эта формула существенно упрощается:

$$x_a \approx 1 + \frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{2\pi}}{\sqrt{x_a \Theta_n}} + \frac{\omega^2}{\Theta_n x_a} \left(1 - 2K_\varepsilon^2 + \frac{3}{2} \pi K_\varepsilon^2 \right). \quad (22)$$

В первом приближении можем ограничиться простыми выражениями

$$x_a \approx 1 + \frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{2\pi}}{\sqrt{x_a \Theta_n}}; \quad \Theta_a \approx -\frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{2\Theta_n x_a}} < 0. \quad (23)$$

Так как $\Theta_n \gg 1$, $\omega < 1$, $x_a > 1$, то предположение $|\Theta_a|/\Theta_n$ вполне оправдано. Из (23) следует, что $T_a < T_a^0$, а зависимость времени зажигания от толщины преграды можно считать линейной. Можно показать на основе (22) и (21), что и во втором приближении при $\Theta_n \gg 1$ для температуры Θ_a остается справедливой формула (23) (в результате элементарных математических выкладок слагаемые с ω^2 уничтожаются). Так как масштаб для τ_a и τ_a^0 один и тот же, то $x_a = \tau_a/\tau_a^0 = t_a/t_a^0$, поэтому в размерных или в физических переменных имеем

$$x_a = 1 + \sqrt{\pi} \frac{lK_c}{\sqrt{\chi_2 t_a^0}} \frac{1}{\sqrt{x_a}} + \frac{(lK_c)^2}{\chi_2 t_a^0} \frac{1}{x_a} \left[\frac{1}{2K_\varepsilon^2} + \left(\frac{3}{4} \pi - 1 \right) \right], \quad (24)$$

$$T_a - T_a^0 = -\frac{\sqrt{\pi} lK_c}{\sqrt{\chi_2 t_a^0}} \frac{1}{2\sqrt{x_a}} \frac{RT_a^0}{E_2},$$

где $t_a^0 = (t_*(T_a^0)/2)E_2(T_a^0 - T_n)/(RT_a^0)$ — время зажигания без преграды. В первом приближении формула для t_a с точностью до коэффициента совпадает с аналитическими оценками и численным счетом [7] для тонкой абсолютно непрозрачной преграды с высокой

теплопроводностью, когда сопряженная задача заменяется одним уравнением теплопроводности для топлива с нелинейным условием на внешней поверхности. В переменных рассматриваемой работы соответствующая формула [7] имеет вид

$$x_a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{lK_\epsilon}{\sqrt{\chi_2 t_a^0}} \frac{1}{\sqrt{x_a}}.$$

Второе слагаемое в (24) в дополнение к результату [7] включает еще один параметр, отражающий влияние коэффициента теплопроводности K_λ (так как $K_\epsilon = \sqrt{K_c K_\lambda}$). Естественно, чем меньше теплопроводность преграды, тем существеннее ее влияние на характеристики зажигания.

Воспользуемся квазистационарным критерием [4], согласно которому в момент зажигания становятся сравнимы тепловые потоки вследствие внешнего нагрева (17) и из зоны химической реакции. Последний находится из решения квазистационарной задачи с переменной температурой поверхности (время в этой задаче играет роль параметра). Условие равенства тепловых потоков в момент зажигания τ_q имеет вид

$$\sqrt{2} \exp(\Theta_q/2) = Q_0 \left[1 - \frac{\omega K_\epsilon}{\sqrt{\pi \tau_q}} \right]. \quad (25)$$

Температуру Θ_q найдем из (15) при $\tau = \tau_q$.

Для $\omega = 0$ из (15), (25) имеем $\Theta_q^0 + \Theta_n = 2Q_0 \sqrt{\tau_q/\pi}$, $\sqrt{2} \exp(\Theta_q/2) = Q_0$. Принимая в качестве масштаба температуру зажигания T_q^0 для $\omega = 0$, найдем для ее определения формулу $Q_0 = \sqrt{2}$, что в размерных переменных имеет вид

$$T_q^{02} = \frac{q_0^2}{2} \frac{E_2}{R} \frac{\exp(E_2/RT_q^0)}{\rho \lambda_2 Q_2 k_2}.$$

Для времени зажигания без преграды имеем $\tau_q^0 = \pi \Theta_n^2/8$ [1, 4]. Далее, оставляя в качестве масштабной температуру T_q^0 , аналогично предыдущему придем к соотношениям

$$\Theta_q \approx \frac{\Theta_n}{\Theta_n - 2} \ln \left[\frac{1}{x_q} \left(1 + \frac{\omega K_\epsilon 2\sqrt{2}}{\pi \Theta_n \sqrt{x_q}} (\pi - 2) + \frac{4\omega^2}{\pi \Theta_n^2 x_q} \left[1 - \left(6 + \frac{3}{2} \pi + \frac{2}{\pi} \right) K_\epsilon^2 \right] \right) \right],$$

$$x_q \approx 1 + \frac{\omega K_\epsilon 2\sqrt{2}}{\Theta_n \sqrt{x_q}} + \frac{4\omega^2}{\pi \Theta_n^2 x_q} \left(1 - 2K_\epsilon^2 + \frac{3}{2} K_\epsilon^2 \pi \right),$$

где $x_q = \tau_q/\tau_q^0$. В первом приближении можно оставить только слагаемые первого порядка по ω :

$$x_q \approx 1 + \frac{\omega K_\epsilon 2\sqrt{2}}{\Theta_n \sqrt{x_q}}, \quad \Theta_q \approx -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\omega K_\epsilon}{\Theta_n \sqrt{x_q}} < 0. \quad (26)$$

Следовательно, $T_q' < T_q^0$.

Двучленную формулу для температуры зажигания удобно представить в виде

$$\Theta_q \approx -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\omega K_\epsilon}{\Theta_n \sqrt{x_q}} + 3,74 \frac{\omega^2}{\Theta_n^2 x_q}.$$

В размерных переменных вид формулы для t_q не отличается от (24), но вместо t_a^0 следует использовать t_q^0 .

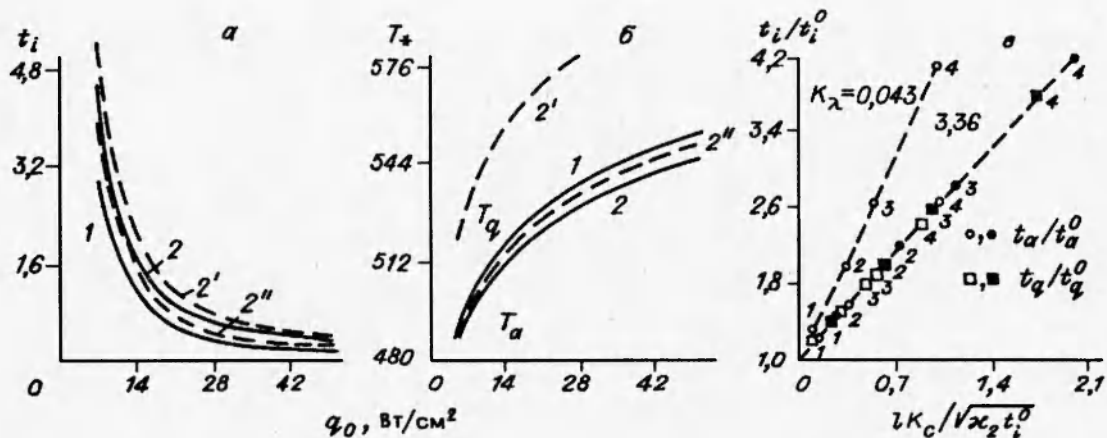


Рис. 1. Зависимость времени (а, в) и температуры зажигания (б) от параметров: а) 1, 2, 2' — t_a ; 2' — t_q ; $l = 0$ (1) и 0,006 см (2, 2', 2''); $\sigma = \infty$ (2, 2') и 0 (2''); $\lambda_1 = 7,9 \cdot 10^{-3}$ Вт/см²; $K_\lambda = 3,36$; б) 1, 2, 2' — T_a ; 2' — T_q ; $l = 0$ (1) и 0,006 см (2, 2', 2''); $\sigma = \infty$ (2, 2') и 0 (2''); в) $q_0 = 5$ (1), 15 (2), 25 (3) и 40 Вт/см² (4)

Время и температуру зажигания, определенные с помощью адиабатического критерия, называют, как известно [1], временем и температурой подключения химических реакций, а найденные с помощью (25) — временем и температурой срыва квазистационарного равновесия. Иллюстративный расчет характеристик зажигания проведен для следующего набора параметров: $c_2 = 1,467$ Дж/(г·К), $\rho_2 = 1,6$ г/см³, $\lambda_2 = 2,35 \cdot 10^{-3}$ Дж/(см·с·К); $\bar{E}_2 = 1,467 \cdot 10^3$ кДж/моль, $Q_2 k_2 = 1,027 \cdot 10^{17}$ Дж/(г·с) (данные взяты из [7]); $c_1 = 3,01$ Дж/(г·К), $\rho_1 = 1,42$ г/см³, $\lambda_1 = 7,9 \cdot 10^{-3}$ Дж/(см·с·К) (приведены теплофизические характеристики полиамидной пленки [8, 9]). Естественно, с ростом толщины преграды время зажигания растет. Время t_q превышает адиабатическое время (рис. 1, а). С увеличением l разница температур T_q и T_a (рис. 1, б) возрастает, так как одно из условий достижения квазистационарного равновесия — «почти равномерный» нагрев преграды, играющей в данном случае роль источника тепла. Время зажигания, определенное с помощью разных критериев, представлено на рис. 1, в. Видно, что наклон прямой зависит только от величины параметра K_λ ; основным параметром модели остается комплекс $(lK_c)/\sqrt{\chi_2 t_i^0}$, $i = a, q$ независимо от выбора критерия зажигания.

Термически толстая преграда. Пусть преграда является термически толстой, т. е. $\omega \gg 1$. В этом случае, как сказано выше, решение задачи в пространстве изображений (12) удобно представить в виде ряда по степеням малого параметра $|\varepsilon \exp(-2\omega\sqrt{p})|$. Переходя к оригиналам в (14), найдем

$$\Theta_2(\tau, \delta) = -\Theta_n + \frac{2Q_0}{1 + K_\varepsilon} \left[2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp(-\omega^2/4\tau) - \omega \operatorname{erfc}\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\tau}}\right) - 2\varepsilon\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp(-9\omega/4\tau) + \right. \\ \left. + 3\omega\varepsilon\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \operatorname{erfc}\left(\frac{3\omega}{8\sqrt{\tau}}\right) + \dots \right]. \quad (27)$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением функции $\operatorname{erfc}(z)$ для большого z [10]: $\operatorname{erfc}(z) \approx \exp(-z^2)[1 - 1/(2z^2) + \dots]/(z\sqrt{\pi})$, выражение для температуры представим в

виде

$$\Theta_2(\tau, \delta) \approx -\Theta_n + \frac{Q_0}{1 + K_\epsilon} \frac{8\tau\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi\omega^2}} \exp(-\omega^2/4\tau). \quad (28)$$

Отброшенные слагаемые имеют более высокий порядок малости

$$\sqrt{\tau}\epsilon \exp(-9\omega^2/4\tau), \quad \tau\sqrt{\tau}/\omega^4 \exp(-\omega^2/4\tau), \dots,$$

так как τ имеет порядок Θ_n , а $\omega \gg 1$. Скорость роста температуры найдем непосредственным дифференцированием (27). Тогда, пользуясь адиабатическим критерием, запишем

$$\exp(\Theta_a) = \frac{2Q_0}{1 + K_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_a}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\tau_a}\right], \quad (29)$$

где температура зажигания определяется из (28) при $\tau = \tau_a$. Полагая, что зажигание происходит при температуре, существенно отличной от начальной, т. е. $|\Theta_a/\Theta_n| \ll 1$, из (28), (29) найдем

$$\Theta_a \approx \frac{\Theta_n}{\Theta_n - 1} \ln\left(\frac{\Theta_n\omega^2}{4\tau_a}\right). \quad (30)$$

Подставляя последнее в (29), получим

$$\ln\left[\frac{\Theta_n\omega^2}{4\tau_a^2}\right]^{\Theta_n/(\Theta_n-1)} = \ln\left[\frac{2Q_0}{K_\epsilon + 1} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_a}}\right] - \frac{\omega^2}{4\tau_a}. \quad (31)$$

Для применения квазистационарного критерия требуется знание теплового потока на границе вследствие инертного нагрева. Его можно определить аналогично температуре, используя решение в пространстве изображений. Квазистационарный критерий приводит к соотношению

$$\sqrt{2} \exp\left(\frac{\Theta_q}{2}\right) = \frac{4Q_0}{K_\epsilon + 1} \frac{\sqrt{\tau_q}}{\omega\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\tau_q}\right], \quad (32)$$

где Θ_q определяется из (28) при $\tau = \tau_q$. Простые преобразования в (28), (32) дают следующие уравнения:

$$\Theta_q \approx \frac{2\Theta_n}{\Theta_n - 2} \ln\left[\frac{\Theta_n\omega}{2\sqrt{2}\tau_q}\right], \quad \ln\left[\frac{\Theta_n\omega}{2\sqrt{2}\tau_q}\right]^{\Theta_n/(\Theta_n-2)} = \ln\left[\frac{2\sqrt{2}Q_0}{K_\epsilon + 1} \frac{\sqrt{\tau_q}}{4\sqrt{\pi}}\right] - \frac{\omega^2}{4\tau_q}. \quad (33)$$

При $\Theta_n \gg 1$ оба критерия дают одинаковый результат для времени зажигания τ_i , $i = a, q$:

$$\frac{\omega^2}{4\tau_i} = \ln\left[\frac{8Q_0}{K_\epsilon + 1} \frac{\tau_i\sqrt{\tau_i}}{\Theta_n\omega^2\sqrt{\pi}}\right]. \quad (34)$$

Температуры подключения химических реакций и срыва квазистационарного равновесия различны:

$$\Theta_a = \ln\left[\frac{\Theta_n\omega^2}{4\tau_a^2}\right], \quad \Theta_q = \ln\left[\frac{\Theta_n^2\omega^2}{8\tau_q^2}\right]. \quad (35)$$

Так как выбор масштабной температуры произвольный, то одна из формул (35) может служить ее определением, $\Theta_i = 0$. Это дает, естественно, разные формулы для τ_a и τ_q . Например, для времени срыва квазистационарного равновесия определение $\Theta_q^0 = 0$ дает

$\tau_q = \Theta_n \omega / 2\sqrt{2}$. Исключая из (34) τ_q , найдем

$$\ln \left[\frac{Q_0^2}{(1 + K_\epsilon)^2} \frac{\omega \Theta_n^3}{2\sqrt{2\pi}} \right] = \frac{\omega\sqrt{2}}{\Theta_n}, \quad \omega \gg 1.$$

Преграда, способная к химическому превращению. Предположим, что оболочка, отделяющая топливо от внешнего источника, способна к экзотермическому химическому превращению. Тепловыделение в соответствующей реакции определяется законом Аррениуса с формально-кинетическими параметрами E_1 , Q_1 , k_1 . Тогда в безразмерных переменных уравнение теплопроводности для непрозрачной оболочки примет вид

$$K_c \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = K_\lambda \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + q_{12} \exp \left[\frac{\Theta_1 + (1 - \epsilon_{12})/\beta}{1 + \beta \Theta_1} \right], \quad (36)$$

где $q_{12} = k_1 Q_1 / (k_2 Q_2)$, $\epsilon_{12} = E_1 / E_2$. Естественно, абсолютно непрозрачная оболочка на стадии инертного прогрева всегда имеет температуру выше температуры топлива. Выпишем соответствующее решение инертной сопряженной задачи теплопроводности в пространстве изображений по Лапласу

$$u_1(p, \xi) = -\frac{\Theta_n}{p} + \frac{Q_0}{p\sqrt{p}K_\epsilon} \frac{\exp \left[-\sqrt{\frac{pK_c}{K_\lambda}} \xi + \omega\sqrt{p} \right] - \epsilon \exp \left[-\sqrt{\frac{pK_c}{K_\lambda}} \xi + \omega\sqrt{p} \right]}{\exp[\omega\sqrt{p}] + \epsilon \exp[-\omega\sqrt{p}]}$$

Для малых ω ограничимся приближением

$$u_1(p, 0) = -\frac{\Theta_n}{p} + \frac{Q_0}{p\sqrt{p}} \left[1 + \omega\sqrt{p} \left(\frac{1}{K_\epsilon} + K_\epsilon \right) - \omega^2 p \right], \quad \omega \ll 1.$$

Для больших ω справедливо

$$u_1(p, 0) = -\frac{\Theta_n}{p} + \frac{Q_0}{p\sqrt{p}} \frac{1}{K_\epsilon} \left[1 - 2\epsilon \exp(-2\omega\sqrt{p}) \right], \quad \omega \gg 1.$$

Далее поступаем аналогично предыдущему. Используем для нахождения характеристик зажигания адиабатический критерий, который для времени и температуры подключения химических реакций тонкой оболочки дает систему трансцендентных уравнений

$$\Theta_{a,1} + \Theta_n = Q_0 \left[2\sqrt{\frac{\tau_{a,1}}{\pi}} + \omega \left(\frac{1}{K_\epsilon} - K_\epsilon \right) - \frac{\omega^2}{\sqrt{\pi\tau_{a,1}}} \right], \quad (37)$$

$$q_{12} \exp(\Theta_{a,1} + (1 - \epsilon_{12})/\beta) = Q_0 \left[\frac{1}{\pi\tau_{a,1}} + \frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi\tau_{a,1}^3}} \right].$$

Формулы (37) справедливы для не очень малых τ , по крайней мере $\tau > \omega^4$. Как будет видно из окончательных формул, для интересующих нас значений времени $\tau \sim \Theta_n$ это соотношение выполняется всегда.

В качестве масштабов в этой задаче разумно выбрать характеристики зажигания топлива. С точностью до слагаемых второго порядка малости по $\omega \ll 1$ и для $\Theta_n \gg 1$ из (37) найдем

$$\Theta_{a,1} = -\ln \left(\frac{z_{12}}{z} \right) - \frac{1 - \epsilon_{12}}{\beta} - \frac{\omega(1 - K_\epsilon^2)\sqrt{\pi}}{K_\epsilon\sqrt{2\Theta_n z}} + \frac{2\omega^2}{\Theta_n z} \left[1 - \frac{(1 - K_\epsilon^2)^2 \pi}{4K_\epsilon^2} \right], \quad (38)$$

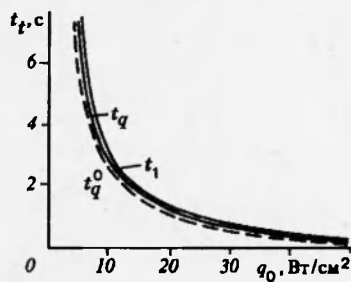


Рис. 2. Зависимость времени зажигания топлива (t_a^0, t_a) и пленки (t_1) от величины теплового потока.

$l = 0,006$ см; $\lambda_1 = 7,9 \cdot 10^{-3}$ Вт/см²; $K_\lambda = 3,36$; $K_\epsilon = 2,47$

$$z = \left[1 + \frac{\omega(1 - K_\epsilon^2)\sqrt{2\pi}}{K_\epsilon\sqrt{\Theta_{\text{H}}z}} + \frac{2\omega^2}{\Theta_{\text{H}}z} \left[\frac{(1 - K_\epsilon^2)^2\pi}{4K_\epsilon^2} - 1 \right] \right]^{-1},$$

где $z = \tau_{a,1}/\tau_a^0$; $\tau_{a,1}$ — время подключения химических реакций в оболочке. Если оболочка имеет низкую тепловую активность, $K_\epsilon \ll 1$, можем ограничиться формулой

$$z \approx \left[1 + \frac{\omega\sqrt{2\pi}}{K_\epsilon\sqrt{\Theta_{\text{H}}z}} + \frac{2\omega^2}{\Theta_{\text{H}}z} \left[\frac{\pi}{4K_\epsilon^2} - 1 \right] \right]^{-1} < 1,$$

т. е. если теплопроводность преграды низкая, то она воспламеняется быстро, в то время как скорость нагрева топлива мала и определяется относительной теплопроводностью преграды K_λ : $\omega\sqrt{2\pi}/(K_\epsilon\sqrt{\Theta_{\text{H}}z}) = \sqrt{\pi}l/(\sqrt{\chi_2 t_a^0} K_\lambda \sqrt{z})$.

Для $K_\epsilon \gg 1$ справедливо приближение

$$z \approx 1 + \frac{\omega K_\epsilon \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\Theta_{\text{H}}z}} + \frac{\omega^2}{\Theta_{\text{H}}z} \frac{3\pi K_\epsilon^2}{2} > 1.$$

В этом случае условие зажигания преграды определяется ее относительной способностью аккумулировать тепло K_c : $\omega K_\epsilon \sqrt{2\pi}/\sqrt{\Theta_{\text{H}}z} = l K_c \sqrt{\pi}/\sqrt{\chi_2 t_a^0 z}$.

Из сравнения последнего равенства и (22) следует, что оболочка с высокой тепловой активностью может не зажегаться до подключения химической реакции в топливе независимо от величин формально-кинетических параметров реакций. Иллюстрацией этого эффекта служит рис. 2. Расчет проведен для тех же свойств топлива.

Для термически толстой оболочки с помощью адиабатического критерия найдем

$$\Theta_{a,1} \approx \ln \left[\frac{\Theta_\epsilon}{2\tau_{a,1} q_{12}} \right] - \frac{1 - \epsilon_{12}}{\beta} - 2 \exp(-\omega^2/\tau_{a,1}) - \dots, \quad \frac{\Theta_{\text{H}}\sqrt{\pi}K_\epsilon}{2\sqrt{\tau_{a,1}}Q_0} = 1 + \frac{\epsilon}{\omega^2} \exp(-\omega^2/\tau_{a,1}), \quad (39)$$

т. е. время зажигания $\tau_{a,1}$ и температура $\Theta_{a,1}$ для $\omega \gg 1$ слабо зависят от толщины оболочки, а определяются ее свойствами. Малыми слагаемыми порядка $\exp(-\omega^2/\tau_{a,1})$ в формулах можно пренебречь, что приводит к предельному случаю зажигания характеристик топлива со свойствами оболочки. В используемых переменных имеем

$$\tau_{a,1}^\infty = \frac{\Theta_{\text{H}} \exp((1 - \epsilon_{12})/\beta)}{2q_{12}} = \frac{Q_0^2}{\pi K_\epsilon^2} \frac{\exp(2(1 - \epsilon_{12})/\beta)}{q_{12}^2}.$$

В целом, если преграда способна к химическому превращению, то в оценках времени зажигания следовало бы учитывать дополнительный приход тепла (или потери) вследствие химической реакции в оболочке. Например, при численном решении различных задач с реагирующей преградой [11] показано, что экзотермическая реакция в ней может способствовать зажиганию топлива.

Абсолютно прозрачная преграда. Полагая $g = 0$ в уравнениях (3), (7) и принимая,

что на свободной поверхности преграды, т. е. при $\xi = 0$, отсутствуют всяческие источники и стоки тепла, получим задачу о зажигании топлива через прозрачную преграду. Соответствующие решения инертной задачи для температуры в преграде и реагенте в пространстве изображений по Лапласу имеют вид

$$u_1(p, \xi) = -\frac{\Theta_{\text{н}}}{p} + \frac{Q_0}{1 + K_\varepsilon} \frac{1}{p\sqrt{p}} \frac{\exp\left(\sqrt{p} \frac{K_\varepsilon}{K_\lambda} \xi\right) + \exp\left(-\sqrt{p} \frac{K_\varepsilon}{K_\lambda} \xi\right)}{\exp(\omega\sqrt{p}) + \varepsilon \exp(-\omega\sqrt{p})}, \quad 0 < \xi < \delta; \quad (40)$$

$$u_2(p, \xi) = -\frac{\Theta_{\text{н}}}{p} + \frac{Q_0}{1 + K_\varepsilon} \frac{1}{p\sqrt{p}} \frac{\exp(\omega\sqrt{p}) + \exp(-\omega\sqrt{p})}{\exp(\omega\sqrt{p}) + \varepsilon \exp(-\omega\sqrt{p})} \exp(-\sqrt{p}(\xi - \delta)), \quad \xi > \delta.$$

Очевидно, что в случае $g = 0$ вещества быстрее нагреваются в окрестности границы $\xi = \delta$. Поэтому независимо от того, способна преграда к химическому превращению или нет, в оценках будем использовать только уравнение (40), так как по условию задачи $\Theta_1(\tau, \delta) = \Theta_2(\tau, \delta)$. Для малых ω температуру $u_2(p, \xi)$ в точке $\xi = \delta$ удобно представить в виде

$$u_2(p, \delta) = \frac{Q_0}{p\sqrt{p}} [1 - \omega K_\varepsilon \sqrt{p} + \omega^2 K_\varepsilon p + o(\omega^3)] - \frac{\Theta_{\text{н}}}{p}.$$

Если $\omega \gg 1$, имеем приближение

$$u_2(p, \delta) = -\frac{\Theta_{\text{н}}}{2} + \frac{Q_0}{1 + K_\varepsilon} \frac{1}{p\sqrt{p}} [1 + (1 - \varepsilon) \exp(-2\omega\sqrt{p})].$$

Термически тонкая преграда. Опуская промежуточные выкладки, выпишем систему уравнений, полученную с помощью адиабатического критерия:

$$\Theta_a + \Theta_{\text{н}} = Q_0 \left[2\sqrt{\frac{\tau_a}{\pi}} - \omega K_\varepsilon + \frac{\omega^2 K_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi\tau_a}} \right], \quad s \exp(\Theta_a) = \frac{Q_0}{\sqrt{\pi\tau_a}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 K_\varepsilon^2}{\tau_a} \right], \quad (41)$$

где $s = 1$ для топлива, $s = q_{12} \exp((1 - \varepsilon_{12})/\beta)$ — для преграды. Как и в случае непрозрачной преграды, для $\omega \ll 1$ в качестве масштабной выберем температуру зажигания без преграды (19). Это позволяет привести систему (41) к виду

$$s \left[\frac{\Theta_{\text{н}}}{2s\tau_a} \frac{1 - \omega^2 K_\varepsilon^2 / (2\tau_a)}{1 - \omega K_\varepsilon \sqrt{\pi} (2\sqrt{\tau_a})^{-1} + \omega^2 K_\varepsilon^2 (2\tau_a)^{-1}} \right]^{\Theta_{\text{н}} / (\Theta_{\text{н}} - 1)} = \frac{Q_0}{\sqrt{\pi\tau_a}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 K_\varepsilon^2}{\tau_a} \right],$$

$$\Theta_a = \frac{\Theta_{\text{н}}}{\Theta_{\text{н}} - 1} \ln \left[\frac{\Theta_{\text{н}}}{2s\tau_a} \left(1 + \frac{\omega K_\varepsilon \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau_a}} + \frac{\omega^2 K_\varepsilon^2}{4\tau_a} \sqrt{\pi} \right) \right].$$

Для больших $\Theta_{\text{н}}$, когда $\Theta_{\text{н}} / (\Theta_{\text{н}} - 1) \rightarrow 1$, имеем трансцендентное уравнение

$$x_a = 1 + \frac{\omega K_\varepsilon}{\sqrt{x_a \Theta_{\text{н}}}} \sqrt{2\pi} + \frac{\omega^2 K_\varepsilon^2}{x_a \Theta_{\text{н}}} \left[\frac{3}{2} \pi - 2 \right]. \quad (42)$$

Следовательно, в первом приближении время зажигания топлива через абсолютно прозрачную тонкую преграду совпадает со временем зажигания самой преграды. Расчет по формуле (32) отличается от оценок времени зажигания с помощью (22) (полученной для абсолютно непрозрачной преграды) только в слагаемом второго порядка по ω . В размерных переменных результат слабо отличается от (24): коэффициент при $(lK_\varepsilon)^2 / (\chi_2 t_a^0 x_a)$ имеет вид $(3\pi/2 - 2)/2$, и различие проявится только при малой тепловой активности пре-

градусы. Используя (42), выражение для температуры подключения химических реакций в топливе представим в виде

$$\Theta_a \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega K_\epsilon}{\sqrt{x_a \Theta_n}} + \frac{2\omega^2 K_r^2}{x_a \Theta_n}, \quad (43)$$

что отличается от (23) наличием слагаемого второго порядка малости. Можно ожидать, что при больших K_ϵ температура зажигания Θ_a будет положительной, т. е. $T_a > T_a^0$. Это объясняется сильным стоком тепла в преграду с большой тепловой активностью. Соответствующие расчеты по (42), (43), записанные в размерных переменных,

$$x_a = 1 + \sqrt{\pi} \frac{lK_c}{\sqrt{\chi_2 t_a^0}} \frac{1}{\sqrt{x_a}} + \frac{(lK_c)^2}{\chi_2 t_a^0} \frac{0,36}{x_a}, \quad x_a = \frac{t_a}{t_a^0}, \quad (44)$$

$$T_a - T_a^0 = \left[-\sqrt{\pi} \frac{lK_c}{\sqrt{\chi_2 t_a^0}} + \frac{(lK_c)^2}{\chi_2 t_a^0} \right] \frac{RT_a^{02}}{E_2},$$

представлены на рис. 1 штриховой линией.

Оценки характеристик зажигания с помощью квазистационарного критерия могут быть проведены аналогично предыдущему.

Толстая инертная преграда. Если инертная преграда термически толстая, то изложенный выше подход для $\omega \gg 1$ и адиабатический критерий приводят к системе уравнений

$$\Theta_a + \Theta_n = \frac{Q_0}{1 + K_\epsilon} \left[2\sqrt{\frac{\tau_a}{\pi}} + (1 - \epsilon) \frac{\tau_a \sqrt{\tau_a}}{\omega^2 \sqrt{\pi}} \exp(-\omega^2/\tau_a) \right],$$

$$\exp(\Theta_a) = \frac{Q_0}{1 + K_\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \tau_a}} + \left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\tau_a}}{\omega^2} - \tau_a \sqrt{\tau_a} \right) \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{\pi}} \exp(-\omega^2/\tau_a) \right],$$

откуда для больших Θ_n найдем

$$\tau_a = \frac{\Theta_n^2 (1 + K_\epsilon)^2}{Q_0^2} \frac{\pi}{4} \frac{1}{1 + (1 - \epsilon) \tau_a \omega^{-2} \exp(-\omega^2/\tau_a)}, \quad (45)$$

$$\Theta_n = \ln \left[\frac{Q_0}{(1 + K_\epsilon)^2} \frac{2}{\pi \Theta_n} \right] + \left[\frac{3\tau_a}{2\omega^2} - \tau_a^2 \right] (1 - \epsilon) \exp(-\omega^2/\tau_a).$$

При $\omega \rightarrow \infty$ из (45) получим характеристики зажигания топлива без преграды, но с учетом теплоотдачи по кондуктивному механизму в среду со свойствами преграды, что эквивалентно уменьшению теплового потока в $(1 + K_\epsilon)$ раз [1]. Здесь можно выбрать масштабную температуру, равной температуре подключения химических реакций при зажигании с теплоотдачей, $\Theta_a = \Theta_a^\infty = 0$:

$$\tau_a^\infty = \frac{Q_0^2}{\pi(1 + K_\epsilon)^2} = \frac{\Theta_n}{2}. \quad (46)$$

Для $\omega \neq \infty$, но $\omega \gg 1$, используя определение масштабной температуры (46), вместо (45) запишем

$$\Theta_a = \left[\frac{3\tau_a}{2\omega^2} - \tau_a^2 \right] (1 - \epsilon) \exp(-\omega^2/\tau_a), \quad \frac{\tau_a}{\tau_a^\infty} = \frac{1}{1 + (1 - \epsilon) \tau_a \omega^{-2} \exp(-\omega^2/\tau_a)}.$$

С помощью квазистационарного критерия получим аналогичный результат, полагая

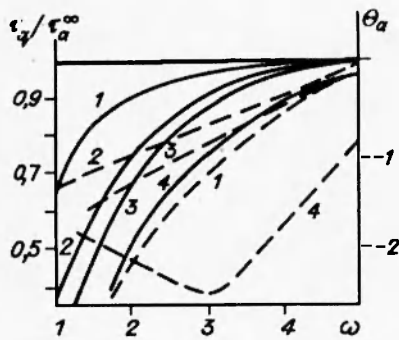


Рис. 3. Влияние толстой преграды на характеристики зажигания.

$\tau_a^\infty = 5$ (1-3) и 10 (4); K_ϵ : 1 — 0,1, 2 — 2,0, 3 — 10, 4 — 2; сплошные кривые — τ_a/τ_a^∞ ; штриховые — Θ_a

$\Theta_q(\omega \rightarrow \infty) = \Theta_q^\infty = 0$. Для температуры зажигания теперь имеем

$$\Theta_q = (1 - \epsilon) \sqrt{\frac{\tau_q}{\pi}} \frac{1}{\omega} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\tau_q}\right).$$

В формуле для времени зажигания меняются только обозначения: τ_a на τ_q , а τ_a^∞ на τ_q^∞ , где $\tau_q^\infty = \Theta_n^2 \pi / 8$. В этом случае масштабная температура определяется из равенства $Q_0(1 + K_\epsilon)^{-1} = \sqrt{2}$. Характер зависимостей времени и температуры зажигания для $\omega \gg 1$ показан на рис. 3.

На основе монотонного стремления времени зажигания τ_a к τ_a^∞ при $\omega \rightarrow \infty$ и представленного выше анализа можно предложить вполне приемлемую аппроксимацию зависимости времени зажигания от параметра ω для любых толщин преграды. Так, для $g = 0$ в [6] предложена формула

$$\frac{\tau_a - \tau_a^\infty}{\tau_a^\infty - \tau_a^0} = -\exp(-\nu\omega), \quad (47)$$

где для определения ν использовано стремление τ_a к τ_a^0 при $\omega \rightarrow 0$ в соответствии с приближенным решением (здесь это соответствует формуле (43) без учета слагаемых второго порядка малости по ω или (23)):

$$\nu = K_\epsilon \sqrt{\pi \tau_a^0 / (\tau_a^\infty - \tau_a^0)}.$$

Влияние теплоотдачи в окружающую среду. Для оценки роли кондуктивных теплопотерь в среду требуется решать трехслойную сопряженную задачу теплопроводности. Так, для абсолютно непрозрачной преграды ($g = \infty$) решение инертной задачи в пространстве изображений имеет вид

$$u_2(p, \delta) = -\frac{\Theta_n}{p} + \frac{2K_\epsilon}{p\sqrt{p}} \frac{Q_0}{(B_\epsilon + K_\epsilon)(1 + K_\epsilon)} \frac{1}{\exp(\omega\sqrt{p}) + \epsilon\beta \exp(-\omega\sqrt{p})}, \quad (48)$$

где $B_\epsilon = \sqrt{c_3 \lambda_3 \rho_3 / (c_2 \lambda_2 \rho_2)}$ — тепловая активность окружающей среды по отношению к топливу, $|\beta| = |(1 - B_\epsilon / K_\epsilon)(1 + B_\epsilon / K_\epsilon)^{-1}| < 1$. Естественно, что при $\beta \rightarrow 0$ уравнение (48) совпадает с (12) для $\xi = \delta$. Если $B_\epsilon \neq 0$, но преграды нет, то адиабатический критерий приводит к известным соотношениям (46) [1], где вместо K_ϵ стоит B_ϵ .

Общее решение задачи, полученное с помощью адиабатического критерия и справедливое для любых значений параметров K_ϵ , K_λ , δ , может быть представлено следующим

образом:

$$\Theta_a + \Theta_n = \frac{2K_\epsilon Q_0}{(B_\epsilon + K_\epsilon)(1 + K_\epsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon\beta)^n \left\{ 2\sqrt{\frac{\tau_a}{\pi}} \exp\left[-\frac{(1+2n)^2\omega^2}{4\tau_a}\right] - (1+2n)\omega \operatorname{erfc}\left[\frac{(1+2n)\omega}{2\sqrt{\tau_a}}\right] \right\},$$

$$\sqrt{\pi\tau_a} \exp(\Theta_a) = \frac{2K_\epsilon Q_0}{(B_\epsilon + K_\epsilon)(1 + K_\epsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\epsilon\beta)^n \exp\left[-\frac{(1+2n)^2\omega^2}{4\tau_a}\right],$$

где первое равенство, в принципе, может служить для определения масштабной температуры T_* , принятой равной температуре зажигания T_a . Тогда $\Theta_a = (T_a - T_*)E_2/(RT_*^2) = 0$.

Для $g = 0$ изображение температуры в точке $\xi = \delta$

$$u_2(p, \delta) = -\frac{\Theta_n}{p} + \frac{Q_0}{p\sqrt{p}} \frac{1}{(1 + K_\epsilon)} \frac{\exp(\omega\sqrt{p}) + \beta \exp(-\omega\sqrt{p})}{\exp(\omega\sqrt{p}) + \epsilon\beta \exp(-\omega\sqrt{p})}, \quad (49)$$

что при $B_\epsilon \rightarrow 0$ совпадает с (40). Система трансцендентных уравнений для нахождения масштабной температуры и времени зажигания, справедливая во всей области параметров этой частной задачи, имеет вид

$$\Theta_a + \Theta_n = \frac{Q_0}{(1 + K_\epsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-\epsilon\beta)^n \left[2\sqrt{\frac{\tau_a}{\pi}} \exp\left(-\frac{n^2\omega^2}{\tau_a}\right) - 2n\omega \operatorname{erfc}\left(\frac{n\omega}{2\sqrt{\tau_a}}\right) \right] + (-\epsilon)^n \beta^{2n} \left[2\sqrt{\frac{\tau_a}{\pi}} \exp\left(-\frac{(n+1)^2\omega^2}{\tau_a}\right) - 2(n+1)\omega \operatorname{erfc}\left(\frac{(n+1)\omega}{2\sqrt{\tau_a}}\right) \right] \right\},$$

$$\sqrt{\pi\tau_a} \exp(\Theta_a) = \frac{Q_0}{(1 + K_\epsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-\epsilon\beta)^n \exp\left(-\frac{n^2\omega^2}{\tau_a}\right) + (-\epsilon)^n \beta^{2n} \exp\left(-\frac{(n+1)^2\omega^2}{\tau_a}\right) \right\}.$$

Для термически тонкой преграды решения существенно упрощаются. Согласно предыдущему в этом случае в разложениях решений (48), (49) в ряд по малому параметру ω достаточно оставить слагаемые только первого порядка малости по ω . Результат можно представить в виде

$$x_a \approx 1 + \frac{\omega K_\epsilon \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\Theta_n x_a}} \mu, \quad (50)$$

где $\mu = \mu_0 = (K_\epsilon^2 - B_\epsilon^2)(1 + B_\epsilon)^{-1} K_\epsilon^{-2}$ для абсолютно прозрачной преграды, $\mu = \mu_\infty = (K_\epsilon^2 + B_\epsilon)(1 + B_\epsilon)^{-1} K_\epsilon^{-2}$ для абсолютно непрозрачной; $x_a = \tau_a/\tau_a^0$, $\tau_a^0 = \Theta_n/2 = [Q_0/(1 + B_\epsilon)]^2 (1/\pi)$. Множители μ_0 и μ_∞ отражают сложное взаимодействие трех сред. В размерных переменных имеем $x_a = t_a/t_a^0$ и

$$x_a \approx 1 + \sqrt{\pi} \frac{K_\epsilon l}{\sqrt{\chi_2 t_a^0}} \frac{\mu}{\sqrt{x_a}}.$$

Естественно, если $B_\epsilon \rightarrow 0$, т. е. теплоотводом в окружающую среду можно пренебречь, то из (50) получим формулу (23). Из (50) следует, что если тепловые активности вещества преграды и окружающей среды близки ($B_\epsilon \approx K_\epsilon$), то термически тонкая прозрачная преграда не влияет на время зажигания. Интересно, что при $B_\epsilon > K_\epsilon$ коэффициент μ для прозрачной преграды отрицателен. Это означает, что при зажигании в среде преграда, помещенная между источником и реагентом и удовлетворяющая условиям $B_\epsilon > K_\epsilon$, $\omega \ll 1$,

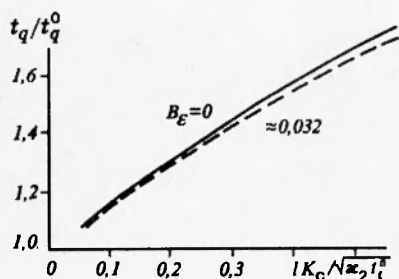


Рис. 4. Расчет времени зажигания через преграду для системы пироксилин — силикатное стекло — воздух

$g \rightarrow 0$, уменьшает период индукции по сравнению с зажиганием в среде без преграды (т. е., уменьшает теплоотвод).

Сделаем некоторые оценки. Примером уменьшения времени зажигания может быть расчет характеристик зажигания пироксилина на воздухе ($c_3 = 1,004$ Дж/(г·К), $\rho_3 = 0,029$ г/см³, $\lambda_3 = 1,1 \cdot 10^{-4}$ Дж/(см·с·К) [8, 9]) через силикатное стекло ($c_1 = 0,335$, $\lambda_1 = 7,123 \cdot 10^{-3}$, $\rho_1 = 2,35$ [8, 9]). В этом случае имеем $K_\epsilon \approx 1,538$, $B_\epsilon \approx 0,0137$, $\mu_0 \approx 0,964$, т. е. преграда с такими свойствами уменьшает сток тепла в окружающую среду. С увеличением толщины преграды, ее тепловой активности и потока q_0 разница между t_a и t_a^0 возрастает (рис. 4). Если преграда изготовлена из технического каучука ($c_1 = 1,89$, $\rho_1 = 0,911$, $\lambda_1 = 1,34 \cdot 10^{-3}$ [8, 9]), то имеем $K_\epsilon \approx 0,985$, $\mu_\infty \approx 1,001$, $g = \infty$. Время зажигания топлива через преграду в среде в этом случае незначительно увеличивается по сравнению со временем зажигания без учета теплоотдачи. Коэффициент μ_∞ может быть и меньше 1. Например, для вещества со свойствами стекла $\mu_\infty \approx 0,979$. Свойства пироксилина взяты из [1]: $c_2 = 1,257$, $\rho_2 = 1,5$, $\lambda_2 = 1,257 \cdot 10^{-3}$, $E_2 = 1,743 \cdot 10^5$ Дж/моль, $Q_2 k_2 = 1,97 \cdot 10^{20}$ Дж/(г·с).

Решение задачи для полупрозрачной преграды ($g \neq 0, \infty$) получается аналогично. Но вследствие характера решения инертной задачи (немонотонности по координате ξ) во всем диапазоне параметров более приемлем квазистационарный критерий. Некоторые оценки, проведенные в [6], показывают, что зависимость $t_q(\sigma)$ действительно имеет немонотонный характер, как это обнаружено при численном решении подобной задачи в [12], а учет кондуктивных теплопотерь в окружающую среду не меняет качественного характера зависимости $t_q(\sigma)$.

Решение задачи (2), (10) для любых значений параметров δ , g , K_ϵ , B_ϵ , ... может быть записано и в общем виде, как это сделано выше. В силу его громоздкости и неудобства в использовании для простых оценок полное решение здесь не приведено.

О влиянии выгорания. Все представленные аналитические оценки проведены для $n = 0$, т. е. когда в топливе протекает реакция нулевого порядка (см. формулы (4), (5)). Как правило, в теории зажигания, когда определяют время срыва квазистационарного равновесия или время подключения химических реакций, выгоранием пренебрегают. Это объясняется его малыми значениями в течение рассматриваемой начальной стадии процесса для нормальных режимов зажигания. В принципе, к нормальным режимам относят как раз те, для которых использованные здесь критерии применимы, а названные характеристики можно явно выделить на температурно-временной зависимости или из анализа пространственных температурных профилей. При зажигании через преграду приближение реакции нулевого порядка для схемы (1) вполне приемлемо. Это подтверждается численным счетом задачи (2)–(10) для больших Θ_n и малых β , γ : влияние выгорания на характеристики зажигания в этом случае несущественно.

Таким образом, в настоящей работе установлено:

