ПМТФ, № 1, 1972

УДК 539.32 + 518.6

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИНГУЛЯРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Г. Фокин

(Москва)

В рамках теории случайных полей развивается метод расчета упругих полей и эффективных модулей микронеоднородных твердых тел. Решение получено в виде операторного ряда, каждый член которого построен на базе формальной составляющей второй производной тензора Грина уравнений равновесия. Нулевое приближение такого ряда учитывает локальную часть взаимодействий между зернами неоднородности. Возможности метода иллюстрируются на примере изотропной смеси двух изотропных компонентов.

Одной из важных задач теории упругости микронеоднородных твердых тел является нахождение тензоров эффективных упругих модулей и упругих полей статистически однородных сред. При решении этой задачи могут быть использованы как классические методы теории упругости [1-3], так и методы теории случайных нолей [4-9].

Наличие взаимодействия между зернами неоднородностей переводит указанную проблему в класс известных многочастичных задач, точное решение которых может быть найдено лишь в наиболее простых случаях. В связи с этим представляет интерес разработка приближенных методов расчета упругих свойств неоднородных материалов [1-10], использующих различного рода упрощения задачи с целью ее решения до конца.

Наибольшую точность, по-видимому, дают три метода: самосогласования [2, 10], вариационный [3] и случайных полей [4-9]. При этом в последнем случае было предложено несколько модификаций, из которых модель Болотина — Кренера [6,9] позволяет дать наиболее прозрачную физическую интерпретацию.

Несмотря на различие между упомянутыми методами, приближенные значения эффективных упругих модулей, полученные с их помощью, могут быть приведены к единому аналитическому виду. Этот факт наталкивает на мысль об их принципиальном единстве.

В данной статье развивается единый подход к решению задачи об описании неоднородной упругой среды, удовлетворяющей уравнениям равновесия. Без особого труда он может быть распространен на решение других задач [5].

1. Пусть рассматриваемая статистически однородная неограниченная среда характеризуется тензором упругих модулей λ_{ijkl} (r). Очевидно, ноле этого тензора будет обладать постоянным средним значением и случайной составляющей. Наряду с этим введем в рассмотрение поле сравнения, упругие свойства которого характеризуются некоторым однородным тензором $\overset{\circ}{\lambda}_{ijkl}$.

Поля u_i и u_i°, соответствующие обоим тензорам упругих модулей, удовлетворяют уравнениям

$$L_{ik}u_k = -f_i, \quad L_{ik} = \nabla_j\lambda_{ijkl}\nabla_l, \; \overset{\circ}{L}_{ik}\; u_k^\circ = -f_i, \quad L_{ik}^\circ = \nabla_j\lambda_{ijkl}^\circ\nabla_l \quad (1.1)$$

где f_i — вектор плотности объемных сил.

Задача состоит в нахождении тензоров деформаций $\varepsilon_{ij} = {}^1/_2 (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) = u_{(i,j)}$ и эффективных упругих модулей λ^*_{ijkl}. Последний определяет средние деформации $\langle\varepsilon_{ij}\rangle = \langle u_{(i,j)}\rangle$ уравнением

$$L^*_{ik}\langle u_k\rangle = -f_i, \qquad L^*_{ik} = \nabla_j \lambda^*_{ijkl} \nabla_l \tag{1.2}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций, которое для эргодических полей совпадает с усреднением по объему.

Обозначая избыточные относительно тела сравнения функции и операторы штрихами, из уравнений (1.1) найдем

$$\overset{\circ}{L}_{ik} u_k' = -L'_{ik} u_k, \quad L'_{ik} = L_{ik} - \overset{\circ}{L}_{ik}, \quad u_k' = u_k - u_k^{\circ} \tag{1.3}$$

Решение (1.3) с помощью тензора Грина G_{ik} оператора L_{ik}° имеет вид

$$u_i' = G_{ik} * L'_{kl} u_l \tag{1.4}$$

где звездочкой обозначена операция интегральной свертки.

Для избыточной деформации из (1.4) имеем

$$\varepsilon'_{ij} = u'_{(i,j)} = G_{k)(i,j)} *_{(l} \lambda'_{klmn} \varepsilon_{mn} \tag{1.5}$$

Используя представления теории обобщенных функций, запишем вторую производную тензора Грина в виде суммы сингулярной и формальной частей [4]

$$G_{ik,jl} = G^S_{ik,jl} + G^f_{ik,jl} \tag{1.6}$$

Введем тензор g_{ijkl} и интегральный оператор p_{ijkl} согласно равенствам

$$g_{ijkl} F = G^S_{i)(k,l)(j} * F, \qquad p_{ijkl} F = G^f_{i)(k,l)(j} * F \tag{1.7}$$

где F — произвольная функция.

Первое из соотношений (1.7) возможно в силу того, что координатная часть $G^S_{ik,jl}$ есть $\delta(\mathbf{r})$. Кроме того, будем в дальнейшем опускать тензорные индексы, рассматривая тензоры второго ранга как векторы, а четвертого — как квадратные матрицы в шестимерном пространстве [11].

Легко видеть, что с учетом (1.7) уравнение (1.5) может быть преобразовано к виду

$$e = \varepsilon^{\circ} + ple, \quad e \equiv (1 - g\lambda')\varepsilon \tag{1.8}$$

Здесь тензор l определяется соотношением

$$l^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} - g \tag{1.9}$$

Преимущество (1.8) по сравнению с (1.5) состоит в том, что в нем основной член, связанный с сингулярной производной тензора Грина, отделен от члена, описывающего нелокальную часть взаимодействий между зернами неоднородности.

Уравнения (1.8) и (1.9) позволяют определить тензор эффективных упругих модулей λ_* и полей деформаций ε. Действительно, из (1.8) и (1.9) имеем

$$le = (\lambda - \lambda_0)\varepsilon \tag{1.10}$$

что после усреднения дает

$$l_*\langle e\rangle = \langle le\rangle = \langle(\lambda - \lambda_0)\varepsilon\rangle = (\lambda_* - \lambda_0)\langle\varepsilon\rangle \tag{1.11}$$

В силу аналитической тождественности (1.10) и (1.11), а также с учетом соотношения между $\langle e\rangle$ и $\langle\varepsilon\rangle$, вытекающего из определения (1.8), связь между эффективными тензорами l_* и λ_* будет описываться формулой (1.9).

Нетрудно видеть, что поле e из (1.8) можно представить в виде

$$e = (1 - pl)^{-1} \varepsilon_0 = \Sigma (pl)^n \varepsilon_0 \tag{1.12}$$

Усредняя (1.12), получим

$$\langle e \rangle = \langle (1 - pl)^{-1} \rangle \varepsilon_0 \tag{1.13}$$

Исключая из (1.12) и (1.13) поле ε_0, найдем

$$e = (1 - pl)^{-1} \langle (1 - pl)^{-1} \rangle^{-1} \langle e \rangle \tag{1.14}$$

Подстановка (1.14) в (1.11) дает

$$l_* = \langle l (1 - pl)^{-1} \rangle \langle (1 - pl)^{-1} \rangle^{-1} \tag{1.15}$$

2. Решения (1.14) и (1.15) хотя и просты по форме, в действительности представляют собой операторные ряды [4, 5], требующие для своего вычисления знания многоточечных моментных функций упругих постоянных. Поскольку трудности математического характера, связанные с вычислением высших приближений, велики, а моделирование не дает пока адекватного отображения микронеоднородных сред, обычно ограничиваются учетом лишь низших приближений в операторных рядах типа (1.14) и (1.15).

Рассмотрим сингулярное приближение, состоящее в пренебрежении взаимодействиями между элементами неоднородности, связанными с оператором p, которые учитывают отклонение поля ε в данной точке от среднего по зерну значения.

Этому соответствуют нулевые приближения в формулах (1.14) и (1.15), имеющие вид

$$e_S = \langle e \rangle, \ l_S = \langle l \rangle \tag{2.1}$$

где индекс S означает, что поле e и тензор l_* вычислены в сингулярном приближении. Поле ε_S легко находится из определения e согласно (1.8)

$$\varepsilon_S = (1 - g\lambda')^{-1} e_S \tag{2.2}$$

Усредняя (2.2) и исключая e_S, получим

$$\varepsilon_S = (1 - g\lambda')^{-1} \langle (1 - g\lambda')^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon \rangle \tag{2.3}$$

С помощью формулы (2.3) тензор эффективных упругих модулей λ^*, определяемый равенством

$$\langle \lambda\varepsilon \rangle = \lambda_* \langle \varepsilon \rangle \tag{2.4}$$

имеет вид

$$\lambda_S = \langle \lambda (1 - g\lambda')^{-1} \rangle \langle (1 - g\lambda')^{-1} \rangle^{-1} \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) может быть получено и непосредственно из (1.9), где нужно вместо l и λ подставить l_S и λ_S.

Если ввести некоторый тензор b_0, удовлетворяющий соотношению

$$g (\lambda_0 + b_0) = -1 \tag{2.6}$$

формулы (2.3) и (2.5) упрощаются и приводятся к виду

$$\varepsilon_S = (\lambda + b_0)^{-1} \langle (\lambda + b_0)^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon \rangle = A_S \langle \varepsilon \rangle, \ (\lambda_S + b_0)^{-1} = \langle (\lambda + b_0)^{-1} \rangle \tag{2.7}$$

Поскольку обобщенные функции, а следовательно, и их производные, являются функциями области, ограничивающей начало координат [12], тензоры g и b_0 должны зависеть от формы поверхности этой области. Выберем в качестве указанной области эффективное зерно, под которым следует понимать усредненное по ансамблю реализацией зерно неоднородности.

Пусть эффективное зерно имеет в декартовой системе координат форму эллипсоида с главными осями a_1, a_2, a_3, а тензор λ_0 изотропен. Тогда тензор g будет иметь симметрию кристалла орторомбической системы [11] и запишется в виде

$$-\mu_0 g_{ijkl} = \delta_{i)(k} J_{l)(j} - \chi J_{ijkl}, \qquad \chi = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \tag{2.8}$$

Здесь λ_0 и μ_0 — постоянные Ляме, определяющие тензор λ_{ijkl}, а компоненты тензоров J_{ij} и J_{ijkl} определяются интегралами [7]

$$J_{11} = \frac{1}{4\pi a_1^2} \int \frac{n_1^2 d\Omega}{\Sigma n_i^2 a_i^{-2}}, \qquad n_i = r_i / r$$

$$J_{1111} = \frac{1}{4\pi a_1^4} \int \frac{n_1^4 d\Omega}{(\Sigma n_i^2 a_i^{-2})^2}, \qquad J_{1122} = \frac{1}{4\pi a_1^2 a_2^2} \int \frac{n_1^2 n_2^2 d\Omega}{(\Sigma n_i^2 a_i^{-2})^2} \tag{2.9}$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Остальные компоненты тензоров J_{ij} и J_{ijkl} получаются при соответствующей перестановке индексов. Тензор деполяризации J_{ij} в рассматриваемом случае выражается через эллиптические интегралы [13], а тензор J_{ijkl} — через их производные.

Соотношения (2.7) — (2.9) представляют собой решение в сингулярном приближении задачи о нахождении поля деформаций и эффективных упругих модулей микронеоднородной среды. Полученное решение позволяет обсчитывать различные структуры: смеси, компоненты которых могут обладать произвольной симметрией, многофазные поликристаллы, механическую и ориентационную текстуры. Однако в данном приближении не делается различия между матричной и статистической смесями, что связано с пренебрежением неоднородностью упругого поля внутри зерна. Последняя, по-видимому, должна существенно зависеть от распределения упругих полей в соседних зернах.

3. В качестве примера рассмотрим случай нетекстурированной механической смеси двух изотропных компонентов. В этом случае эффективное зерно имеет форму сферы, а тензоры J_{ij} и J_{ijkl} равны

$$J_{ij} = {}^1/_3 \delta_{ij}, \qquad J_{ijkl} = {}^1/_3 V_{ijkl} + {}^2/_{15} D_{ijkl} \tag{3.1}$$
$$3V_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \qquad V_{ijkl} + D_{ijkl} = \delta_{i(k}\delta_{l)j}$$

Подставляя (3.1) в (2.8) и используя (2.6), найдем явный вид тензора $\overset{\circ}{b}_{ijkl}$

$$\overset{\circ}{b}_{ijkl} = 3b_0 V_{ijkl} + 2d_0 D_{ijkl} \tag{3.2}$$
$$3b_0 = 4\mu_0, \quad d_0 = \frac{\mu_0}{6} \frac{9K_0 + 8\mu_0}{K_0 + 2\mu_0}, \qquad 3K_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0$$

Вследствие того что симметрия тензоров λ_{ijkl}, $\overset{\circ}{\lambda}_{ijkl}$ и $\overset{\circ}{b}_{ijkl}$ одинакова, формулы (2.7) легко вычисляются и вместе с (3.2) приводят к результату

$$A^S_{ijkl} = \frac{K_S + b_0}{K + b_0} V_{ijkl} + \frac{\mu_S + d_0}{\mu + d_0} D_{ijkl} \tag{3.3}$$
$$\lambda^S_{ijkl} = 3K_S V_{ijkl} + 2\mu_S D_{ijkl}$$

где K_S и μ_S имеют вид

$$K_S = \langle K \rangle - \frac{D_K}{c_1K_2 + c_2K_1 + b_0}, \quad \mu_S = \langle \mu \rangle - \frac{D_\mu}{c_1\mu_2 + c_2\mu_1 + d_0}$$

$$D_x = c_1c_2(x_1 - x_2)^2 \tag{3.4}$$

а индексы 1 и 2 означают номер компонента.

Поскольку величины b_0 и d_0 определяются через постоянные Ляме λ_0 и μ_0 тела сравнения, выражения (3.3) и (3.4) также являются функциями λ_0 и μ_0. Придавая им различные значения, получим результаты приближенных методов, о которых говорилось выше. Ограничимся при этом анализом выражений (3.4).

Пусть K_0 и μ_0 принимают следующие значения:

а) $K_0 = K_S$, $\mu_0 = \mu_S$; в) $K_0^+ = K_2$, $\mu_0^+ = \mu_2$; $K_0^- = K_1$, $\mu_0^- = \mu_1$, при условии $K_1 < K_2$, $\mu_1 < \mu_2$; с) $K^u{}_0 = \langle K \rangle$, $\mu^u{}_0 = \langle \mu \rangle$; $K_0{}^l = \langle 1 / K \rangle^{-1}$, $\mu_0{}^l = \langle 1 / \mu \rangle^{-1}$

Подстановка их в (3.4) дает эффективные упругие модули в приближении самосогласования [2, 10] — случай а); границы Хашина — Штикмана [3], полученные с помощью вариационных принципов,— случай в); приближенные значения, найденные путем использования теории случайных полей [4, 5, 8],— случай с).

Аналогичные результаты могут быть получены и при рассмотрении микронеоднородных сред более сложных типов.

Поступила 16 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях смеси. Физика металлов и металловедение, 1959, т. 8, № 2.
2. Hershey A. V. The elastisity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic cristal. J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, No. 3.
3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach on the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 2.
4. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
5. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3.
6. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
7. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Упругие модули текстурированных материалов. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
8. Хорошун Л. П. К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 9.
9. Kröner E. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 4.
10. Hill R. A self — consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol. 13, No. 4.
11. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., «Мир», 1967.
12. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
13. Osborn J. A. Demagnetizing factors of the general ellipsoid. Phys. Rev., 1945, vol. 67, No. 11.