

## НИЗКОЧАСТОТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НОМИНАЛЬНОГО РЕЖИМА ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

К. С. Колесников

(Москва)

Для анализа медленно протекающих процессов, характерное время которых несоизмеримо больше времени распространения волны давления по камере, рабочая модель камеры жидкостного ракетного двигателя (ЖРД) характеризуется тем, что все частицы топлива после впрыска в камеру через некоторое время, необходимое для распыла, нагревания, испарения, смещения, химических реакций, превращаются в конечные продукты сгорания. Это время, одинаковое в данной модели для всех частиц топлива, называется временем превращения (запаздывания горения). В простейшем варианте модели время превращения не зависит от давления в камере сгорания.

Предложено несколько механизмов неустойчивого горения в камере. Один из первых механизмов был указан Карманом [1,2]. Он основан на том, что скорость впрыска топлива в камеру по отношению к перепаду давления на форсунках имеет запаздывание порядка времени релаксации топливоподающей магистрали, а горение следует за скоростью впрыска с задержкой, равной времени превращения. Полупериод колебаний приблизительно равен времени превращения и времени релаксации системы.

Другой механизм возникновения низкочастотных колебаний, не зависящий от процесса впрыска топлива в камеру и названный поэтому внутрикамерной неустойчивостью, предложен в работе [3]. Он основан на том, что время запаздывания горения в колебательном режиме также является колеблющейся величиной. Скорость горения достигает максимума при наибольшей скорости уменьшения времени запаздывания и минимума — при наибольшей скорости возрастания времени запаздывания. Если эти колебания совпадают по фазе с колебаниями давления в камере, то создаются благоприятные условия для самовозбуждения.

В монографии [4] проведен подробный анализ одновременного действия обоих механизмов возбуждения.

Анализ устойчивости работы двигательной установки с учетом сжимаемости жидкости в трубопроводе для простейшей однокомпонентной системы показывает, что критическое время запаздывания зависит от длины трубы, причем с увеличением частоты волновых колебаний жидкости в трубе критическое время запаздывания уменьшается [5]. Наилучшие условия для самовозбуждения создаются в том случае, когда частота колебаний в трубе близка к одной из собственных частот колебаний газов в камере. Такие колебания принято называть высокочастотными. Для случая чисто продольных колебаний газов механизм высокочастотной неустойчивости при постоянной скорости впрыска топлива в камеру рассмотрен в монографии [4].

Устойчивость работы ЖРД зависит от упругих свойств корпуса летательного аппарата, на котором установлен двигатель. Через упругий корпус образуется мощная дополнительная обратная связь между камерой сгорания и топливными магистралями. Этот вопрос рассмотрен на примере однокомпонентной системы с несжимаемым топливом в работе [6].

На практике могут быть случаи, когда собственные частоты волновых процессов в топливоподающих магистралях имеют тот же порядок или находятся ниже частот колебаний, определяемых временем превращения. Они приобретают особую важность, если характеристические частоты упругих колебаний корпуса летательного аппарата или стэнда, на котором установлена камера, близки к частотам волновых процессов в магистралях. Рассмотрению таких случаев посвящена данная работа.

В работе дается дальнейшее расширение понятия низкочастотной неустойчивости ЖРД. Замкнутая система может быть неустойчивой, даже если время запаздывания горения в камере равно нулю. Частота, отличающая этот вид неустойчивости, определяется временем распространения упругой волны в магистрали и корпусе и может изменяться в широких пределах. Время запаздывания в камере изменяет фазовые соотношения и может служить дополнительной причиной возбуждения колебаний.

Динамическая схема состоит из отдельных звеньев, объединенных на основе граничных условий. Определение параметров звеньев представляет, вообще говоря, самостоятельную и весьма сложную задачу. Замкнутая система представлена блок-схемой и является многоконтурной. Передаточные функции топливных магистралей получены в таком виде, чтобы их сопряжение с корпусом было полным. Решение проведено в линейной постановке, свойства передаточных функций отдельных звеньев и всей системы анализируются при помощи частотных методов теории автоматического регулирования.

1. Воспользуемся предположением о том, что для низкочастотных колебаний а) давление газа  $p_3$  в каждый момент времени практически одинаково по всей камере, б) время превращения  $\tau^0$  имеет одинаковые значения для всех частиц топлива, в) по-

ток газов через сопло квазистационарный; в работе [3] получено линеаризованное уравнение баланса массы газов в камере

$$\frac{d\beta}{dz} + (1 - \nu)\beta + \nu\beta(z - \tau^*) = A[\mu_1(z - \tau^* - 1) - \mu_2(z - \tau^* - 1)] + (1/2 - H - 2A)\mu_1(z - \tau^*) + (1/2 + H + 2A)\mu_2(z - \tau^*) \quad (1.1)$$

Здесь

$$\beta = \frac{p_3 - p_3^0}{p_3^0}, \quad \mu_1 = \frac{m_1 - m_1^0}{m_1^0}, \quad \mu_2 = \frac{m_2 - m_2^0}{m_2^0} \\ H = \frac{1}{2} \frac{r - 1}{r + 1}, \quad r = \frac{m_2^0}{m_1^0}, \quad z = \frac{t}{\theta}, \quad \tau^* = \frac{\tau^0}{\theta} \quad (1.2)$$

$m_2^0, m_1^0$  — скорости впрыска в камеру массы окислителя и массы горючего;  $p_3^0, m_2^0, m_1^0$  — давление в камере и скорости впрыска масс окислителя и горючего в невозмущенном режиме;  $\theta$  — время релаксации камеры;  $\nu$  — показатель взаимодействия между процессом горения и колебаниями в камере сгорания.

Коэффициент  $A$  учитывает влияние колебаний температуры. Он характеризует выбранные компоненты топлива и зависит от соотношения  $r$  их расходов в невозмущенном режиме и от давления в камере сгорания. Для обычных двухкомпонентных двигателей коэффициент  $A$  — очень малая положительная величина.

Для анализа низкочастотной неустойчивости замкнутой системы представляет интерес в первом приближении рассмотреть более простую модель камеры сгорания, в которой время превращения  $\tau^0$  не зависит от давления ( $\nu = 0$ ), а температура газа в камере постоянно независимо от колебаний давления и соотношения топливных компонентов ( $A = 0$ )

$$\frac{d\beta}{dz} + \beta = (1/2 - H)\mu_1(z - \tau^*) + (1/2 + H)\mu_2(z - \tau^*) \quad (1.3)$$

Эта модель аналогична модели однокомпонентного двигателя, однако, если свойства топливоподающих магистралей окислителя и горючего будут различными, то следует ожидать, что двухкомпонентная система будет все же значительно сложнее однокомпонентной.

Безразмерные вариации  $\mu_1, \mu_2$  должны быть определены из уравнений динамики магистралей окислителя и горючего.

Динамические свойства камеры сгорания выразим через комплексные передаточные числа. Так как вариация впрыска топлива в камеру предполагается происходящей по гармоническому закону, то с учетом запаздывающих аргументов  $z - \tau^*$  и  $z - \tau^* - 1$  имеем [7]

$$\mu_1(z - \tau^*) = \mu_1(z) e^{-is\tau^*} = \mu_1 e^{is(z - \tau^*)} \quad (sz = \Omega t, s = \Omega\theta) \\ \mu_1(z - \tau^* - 1) = \mu_1 e^{is(z - \tau^* - 1)}$$

Здесь  $\Omega$  — частота колебаний. Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$\beta(z) = \beta e^{isz}, \quad \beta(z - \tau^*) = \beta e^{is(z - \tau^*)}$$

Тогда комплексные передаточные числа, определяющие отношения выходных координат к входным, найдутся из выражений

$$K[\beta, \mu_1] = \beta / \mu_1 = d_1 / d, \quad K[\beta, \mu_2] = d_2 / d \\ d = \nu + (is + 1 - \nu) e^{is\tau^*}, \quad d_1 = 1/2 - H - 2A + A e^{-is} \\ d_2 = 1/2 + H + 2A + A e^{-is} \quad (1.4)$$

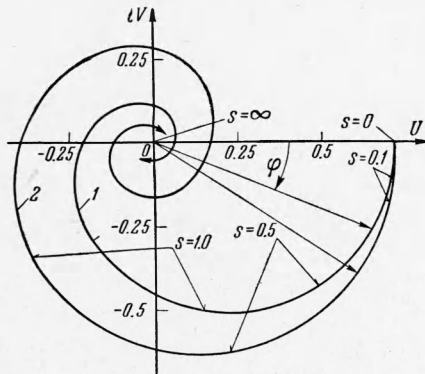
Годографы векторов  $K[\beta, \mu_1], K[\beta, \mu_2]$  на комплексной плоскости  $Z = U + iV$  в промежутке  $0 \leq s \leq \infty$  представляют собой свертывающиеся к началу координат спирали. Чем меньше  $\tau^*$ , тем более сжатой становится спираль и меньшее фазовое запаздывание  $\varphi$  возникает для одних и тех же значений  $s$ . Это типичные аperiодические звенья первого порядка с запаздыванием.

Графики годографов векторов  $K[\beta, \mu_2]$  для  $H = 0.214$  показаны на фиг. 1, 2. Кривые 1, 2 построены при  $A = \nu = 0$ , кривая 1 соответствует  $\tau^* = 0.5$ , кривая 2 — для  $\tau^* = 1.5$ . На фиг. 2 показано влияние коэффициента  $A$ . Графики здесь изображены для  $\tau^* = 0.5$  и  $\nu = 0$ , причем кривая 3 — для  $A = 0$ , кривая 4 — для  $A = 0.05$ , кривая 5 — для  $A = 0.1$ . Если принять, например,  $A = 0, \nu = 0.2$ , то график практически совпадает с кривой 3.

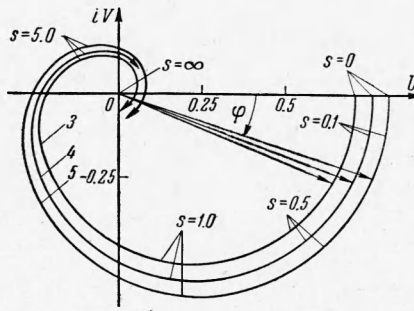
Для малых значений  $s$  коэффициент  $\nu$  почти не оказывает влияния ни на модуль, ни на аргумент комплексного передаточного числа, увеличение коэффициента  $A$  приводит к возрастанию модуля и почти не изменяет аргумент.

2. Вариация давления в камере сгорания вызывает вариацию ускорения летательного аппарата или, если ЖРД установлен на жестком стенде, — изменение деформированного состояния стенда, включая топливные магистрали. В обоих случаях движение корпуса и связанных с ним топливных магистралей приводит к изменению давления перед форсунками камеры сгорания.

Рассмотрим возмущенное движение корпуса. Под невозмущенным (номинальным) режимом системы будем понимать такое ее состояние, когда подача топлива в камеру сгорания и тяга двигателя являются постоянными, и летательный аппарат совершает прямолинейный полет. Так как масса летательного аппарата вследствие



Фиг. 1



Фиг. 2

расхода топлива за время десятков периодов изучаемых колебаний практически не изменяется, то для исследования уравнений движения будем «замораживать» коэффициенты уравнений, т. е. уровни заполнения топливных баков, массу летательного аппарата, частоты и формы собственных упругих колебаний корпуса на небольшом отрезке времени будем считать неизменными.

Вариацию смещения любого поперечного сечения корпуса в направлении его продольной оси представим в виде суммы

$$q(x, t) = q_c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t) \quad (2.1)$$

Здесь  $q_c(t)$  — вариация смещения центра масс летательного аппарата,  $f_n(x)$  — форма  $n$ -го нормального тона продольных колебаний корпуса,  $q_n(t)$  — смещение относительно центра масс при колебаниях  $n$ -го тона того сечения корпуса, для которого  $f_n(x) = 1$ .

Вопрос об определении собственных частот  $\Omega_n$  и собственных функций  $f_n(x)$  для упругого корпуса представляет собой самостоятельную сложную задачу и здесь не обсуждается. Будем считать их известными, причем начало отсчета выберем так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^l m(x) f_n(x) dx + \sum_{k=1}^N m_k f_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

в котором  $l, m(x)$  — длина и масса единицы длины корпуса,  $m_k$  — сосредоточенные массы. Такими массами в первом приближении можно считать массы двигателя, топливных насосов, топлива в баках и др., причем со стенками корпуса, как правило, они связаны упруго.

Колебания в топливных магистралях практически не могут вызвать продольных колебаний корпуса и поэтому последние происходят только под действием вариации тяги двигателя.

Обозначим через  $m$  массу летательного аппарата,  $\Omega$  — частоту собственных упругих продольных колебаний корпуса,  $k^\circ$  — коэффициент пропорциональности между вариацией давления в камере сгорания и вариацией силы тяги двигателя; предполагаем, что направление вектора силы тяги совпадает с направлением продольной оси корпуса. Тогда с учетом (2.1) и (2.2) линеаризованные уравнения возмущенного движения центра масс летательного аппарата и упругих колебаний корпуса

относительно центра масс представим в виде

$$\frac{d^2 q_c(t)}{dt^2} = \frac{k^{\circ} p_3^{\circ}}{m} \beta, \quad \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \Omega_n^2 q_n(t) = \frac{k^{\circ} p_3^{\circ} f_{nv}}{m_n} \beta \quad (2.3)$$

Здесь  $m_n$  — приведенная масса корпуса,  $f_{nv}$  — значение собственной функции в том сечении, в котором давление в камере сгорания преобразуется в силу тяги двигателя. Для определенности это сечение совместим с форсуночной головкой камеры.

$$m_n = \int_0^l m(x) f_n^2(x) dx + \sum_{k=1}^N m_k f_{nk}^2$$

Введем безразмерные смещения и время

$$\eta_c = \frac{q_c}{l}, \quad \eta_n = \frac{q_n}{l}, \quad \sigma = t \frac{a_0}{l}$$

где  $a_0$  — приведенная скорость звука в упругом корпусе.

Принимая во внимание, что  $\beta(z) = \beta \exp izs$ ,  $sz = \Omega t = \omega \sigma$ , решение уравнений (2.3) представим в виде

$$\eta_c(\sigma) = \eta_c e^{i\omega\sigma}, \quad \eta_n(\sigma) = \eta_n e^{i\omega\sigma}$$

Отношения координат  $\eta_c, \eta_n$  к вариации  $\beta$  выражаются передаточными числами

$$K[\eta_c, \beta] = -\frac{k^*}{\omega^2}, \quad K[\eta_n, \beta] = \frac{k_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.4)$$

Безразмерная собственная частота  $\omega_n$  и коэффициенты усиления  $k^*, k_n$  определяются по формулам

$$\omega_n = \Omega \frac{l}{a_0}, \quad k^* = \frac{k^{\circ} p_3^{\circ} l}{m a_0^2}, \quad k_n = k^* \frac{m}{m_n} f_{nv} \quad (2.5)$$

При изменении частоты в пределах  $0 \leq \omega \leq +\infty$  годографы векторов  $K[\eta_c, \beta]$   $K[\eta_n, \beta]$  на комплексной плоскости  $Z = U + iV$  будут прямыми линиями, совпадающими с действительной осью.

Вследствие рассеяния энергии в материале и сочленениях корпуса собственные колебания последнего всегда затухают, и поэтому бесконечно большие значения вектора  $K[\eta_n, \beta]$  при  $\omega = \omega_n$  не имеют физического смысла. Когда приходится определять колебания при резонансе, в практических расчетах в уравнения упругих колебаний вводятся силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости. Передаточное число  $K[\eta_n, \beta]$  в этом случае будет комплексным

$$K[\eta_n, \beta] = k_n / D_n, \quad D_n = \omega_n^2 - \omega^2 + 2\varepsilon_n i \omega \quad (2.6)$$

где  $\varepsilon_n$  — коэффициент затухания собственных колебаний.

Анализ устойчивости системы упрощается, если вынужденные колебания корпуса не раскладывать в ряд по собственным функциям  $f_n(x)$ , а представить в виде

$$q(x, t) = \beta(z) l f\left(\frac{x}{l}, \omega\right) = l f(\xi, \omega) e^{i\omega\sigma} \quad (2.7)$$

где  $f(\xi, \omega)$  — форма вынужденных колебаний корпуса. Для расчетной схемы неоднородного стержня со ступенчатым изменением массы и жесткости по длине даже при наличии упруго подвешенных сосредоточенных масс функции  $f(\xi, \omega)$  без учета диссипации энергии имеют вещественные значения и оказываются сравнительно простыми. При их определении не возникает принципиальных трудностей, и поэтому для таких расчетных схем вынужденные колебания корпуса можно вместо (2.1) представлять в виде (2.7). С учетом диссипации энергии функции  $f(\xi, \omega)$  будут комплексными.

3. Для анализа примем магистрали, в которых подача компонентов из бака в камеру сгорания производится насосами. Такие системы являются наиболее распространенными для двигателей большой тяги, как частный случай это могут быть магистрали, по которым подача компонентов осуществляется сжатым газом. Жидкие компоненты и линии подачи не абсолютно жесткие, а обладают некоторой упругостью, которая может оказывать большое влияние на колебательные процессы в магистралях.

Схемы топливных магистралей для окислителя и горючего имеют одинаковую структуру. Каждая схема состоит из трех последовательно соединенных физических

звеньев: трубы для подачи компонента от бака к насосу, насоса и трубы между насосом и форсунками [8]. Первая труба во многих случаях бывает однородной и прямой. Вторая труба обычно имеет сложную конструкцию. Она включает в себя клапан, емкость головок двигателя, а для охлаждающего компонента — дополнительно систему разветвленных труб и межрубашечный щелевой тракт. Здесь нет правильных геометрических форм, позволяющих провести точное решение задачи о совместных колебаниях упругой емкости с жидкостью. Однако вследствие упругости топливопроводов их объем при колебаниях давления меняется, и поэтому вариация впрыска топлива в камеру сгорания не совпадает с вариацией расхода через насос. Количественные различия зависят от емкости трубопровода и соотношения частот колебаний.

Для решения гидродинамической задачи топливопровод, соединяющий насос с камерой, заменим моделью в виде прямой трубы постоянного сечения. Форсуночную головку и внутренние стенки камеры сгорания в первом приближении примем жесткими. Тогда вариация давления в камере не вызывает изменения объема топливопровода, этот объем будет изменяться только за счет упругости наружных стенок. В действительности внутренние стенки камеры и форсуночная головка обладают некоторой податливостью и если последняя соизмерима с податливостью наружных стенок или податливостью жидкости, то ее нужно учитывать.

Расчетная схема для топливных магистралей окислителя и горючего, таким образом, состоит из двух прямых однородных труб, между которыми встроен топливный насос. На концах труб могут быть установлены компенсаторы (сильфоны), обладающие пренебрежимо малой жесткостью в осевом направлении (фиг. 3). В расчетной схеме сильфон примем как емкость, вариация давления в любой точке объема которой одинакова, а вариация объема пропорциональна вариации давления и изменению расстояния между концевыми сечениями.

Конструктивно топливные магистрали соединены с корпусом: передний конец первой трубы соединен с днищем бака, задний конец второй трубы — с форсуночной головкой камеры сгорания, насос подвешивается к корпусу на раме или крепится к камере сгорания [8]. Топливные магистрали совершают вынужденные колебания, закон которых определяется движением соответствующих сечений корпуса. Наличие сильфонов позволяет трубам и насосу совершать колебания с различными амплитудами.

Обозначим величины собственных функций:  $f_{n1}$  — для флянца днища бака,  $f_{nw}$  — насоса,  $f_{nv}$  — форсуночной головки. Так как днище бака и рама двигателя обладают некоторой упругостью, то значения функций  $f_{n1}$ ,  $f_{nw}$ ,  $f_{nv}$  не совпадают со значениями функций для соответствующих шпангоутов корпуса. Это различие тем больше, чем ближе собственная частота колебаний корпуса и парциальные частоты колебаний днища бака с топливом, двигателя, насоса. Значения функций  $f_{n1}$ ,  $f_{nw}$ ,  $f_{nv}$  можно в некоторых пределах изменять конструктивными мерами, и поэтому они могут быть отнесены к числу варьируемых параметров системы.

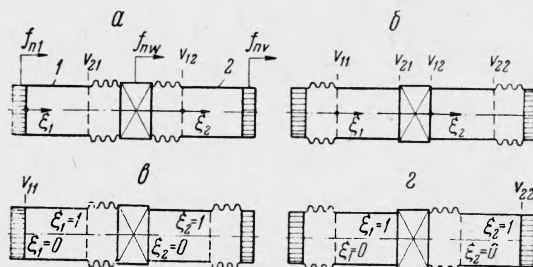
Гидродинамическая задача для топливных магистралей заключается в том, чтобы определить вариацию впрыска топлива в камеру в зависимости от малых продольных колебаний корпуса и вариации давления в камере сгорания.

Будем предполагать, что топливные компоненты представляют собою идеальную жидкость, невозмущенный поток в трубах однородный — скорость  $v_0$ , давление  $p_0$  и плотность  $\rho_0$  постоянны; упругость труб учтем через приведенную скорость звука.

Так как эквивалентные трубы принимаются жесткими, а трение между их стенками и жидкостью в расчет не принимается, то малые движения труб в осевом направлении не приводят к изменению скорости потока.

Воздействие на поток жидкости движений форсуночной головки, насоса, днища бака, а также изменение объемов сильфонов отнесем к возмущениям граничных условий потока. С учетом принятых выше допущений о квазистационарности невозмущенного движения гидродинамическую задачу можно решать так, как если бы трубы были неподвижными.

К полученной расчетной схеме применим способ решения, изложенный в работе [13]. Введем аналогичные обозначения. Обозначим размерные величины вариаций давления и скорости в  $j$ -й трубе через  $p_{xj}$ ,  $v_{xj}$ , координату поперечного сечения потока



Фиг. 3

в  $j$ -й трубе —  $x_j$ , время —  $t$ , примем следующие соотношения между размерными и безразмерными величинами

$$v_j = \frac{v_{xj}}{a_{0j}}, \quad p_j = \frac{P_{xj}}{\rho_{0j} a_{0j}^2}, \quad s_j = \Omega \frac{l_j}{a_{0j}}, \quad \tau_j = t \frac{a_{0j}}{l_j}, \quad \xi_j = \frac{x_j}{l_j}$$

где  $a_{0j}$  — скорость звука в невозмущенном потоке,  $l_j$  — длина  $j$ -й трубы. Для трубы до насоса  $j = 1$ , после насоса  $j = 2$ .

Рассмотрим граничные условия. Если давление газов над зеркалом жидкости в баке при колебаниях корпуса остается неизменным, то возмущение давления на выходе из бака в трубу возникает только вследствие колебаний днища бака. Пренебрегая образованием волн на свободной поверхности в баке, можем записать

$$p_x = \rho_{01} h_1 \frac{d^2}{dt^2} \left[ q_c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n f_{n1} q_n(t) \right]$$

Здесь  $\rho_{01}$ ,  $h_1$  — плотность и высота столба жидкости в баке;  $\kappa_n$  — некоторый коэффициент, зависящий от соотношения диаметров бака и трубы, формы днища и условий выхода жидкости из бака в трубу. Отнесем эту вариацию к  $\rho_{01} a_{01}^2$  — параметрам невозмущенного потока в трубе перед насосом. Получим

$$p^* = -\omega^2 (N_c \eta_c + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \eta_n), \quad p^* = \frac{p_x}{\rho_{01} a_{01}^2}, \quad N_c = \frac{h_1 a_{01}^2}{l a_{01}^2}, \quad N_n = N_c \kappa_n f_{n1} \quad (3.1)$$

Вариации скоростей на концах труб определяются из условий неразрывности потока в магистрали. Они зависят от свойств сиффонов и мест их расположения.

Свойства сиффонов выразим двумя независимыми безразмерными характеристиками. Геометрическая характеристика  $\lambda_j$  будет учитывать изменение геометрии гофр и площадь поперечного сечения сиффона

$$\lambda_j = \frac{F_1}{F_{0j}} \left( \frac{\partial V_{xj}}{\partial x} \right)_{x=x_{0j}} - 1$$

Здесь  $F_{0j}$  — площадь проходного сечения  $j$ -й трубы,  $V_{xj}$  — объем сиффона,  $x_{0j}$  — расстояние между торцами сиффона в условиях невозмущенного режима.

Упругая характеристика  $r_j$  будет учитывать изменение объема компенсатора за счет вариации давления

$$r_j = r_{xj} \frac{a_{0j}^2 \rho_{0j}}{F_{0j} l_j} \quad \left( r_{xj} = \left[ \frac{\partial V_{xj}}{\partial p_x} \right]_{p_x=p_{0j}} \right)$$

Геометрия гофр сиффона изменяется пропорционально разности значений  $f_{nw} - f_{n1}$  и  $f_{nv} - f_{nw}$ . Для характеристик сиффонов, давлений, скоростей на концах труб введем дополнительные индексы: 1 — для входа в трубу, 2 — для выхода из трубы.

За масштаб безразмерной вариации  $w$  скорости потока через насос примем  $a_{02}$ , безразмерные вариации обобщенных скоростей корпуса обозначим через

$$u_c = -\frac{1}{a_{02}} \frac{dq_c(t)}{dt} = -i\omega \frac{a_0}{a_{02}} \eta_c, \quad u_n = -\frac{1}{a_{02}} \frac{dq_n(t)}{dt} = -i\omega \frac{a_0}{a_{02}} \eta_n \quad (3.2)$$

Так как за положительное смещение корпуса  $q(x, t)$  принято смещение в направлении, противоположном положительному направлению скорости  $v_j$  потока жидкости в трубах, то для сопряжения координат  $q(x, t)$  и  $v_j$  в формулах (3.2) введены знаки «минус».

Приняв  $p_j(\xi_j, \tau_j) = p_j(\xi_j) \exp i s_j \tau_j$  и обозначив через  $v \exp i s_2 \tau_2$  отнесенную к  $a_{02}$  вариацию скорости впрыска жидкости в камеру  $h = a_{02} / a_{01}$ , составим уравнения неразрывности. Чтобы в большей степени применить результаты решения [9], представим их в виде

$$\begin{aligned} v_{21} &= wh + h u f_{w2} + i s_1 r_{21} p_{21} \\ v_{21} &= w + u f_{w1} - i s_2 r_{12} p_{12} \\ v_{22} &= v + u f_v + i s_2 r_{22} p_{22} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $u f_{w2}$ ,  $u f_{w1}$ ,  $u f_v$  — скорости, названные движением характерных сечений топливной магистрали вместе с корпусом.

Во всасывающей части насоса вследствие кавитационных явлений могут находиться некоторые газовые объемы [10]. Если принять, что вариация величины этих объемов обратно пропорциональна вариации давления перед насосом, то уравнения неразрывности потока в магистралях будут иметь тот же вид, если под  $r_{21}$  понимать обобщенную упругую характеристику сиффона совместно с газовыми объемами.

Возможные схемы расположения сиффонов в топливной магистрали представлены на фиг. 3. Для фиг. 3, а

$$uf_{w2} = u_c + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{nw} (1 + \lambda_{21}) - \lambda_{21} f_{n1}] u_n \quad (3.4)$$

$$uf_{w1} = u_c + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{nw} (1 + \lambda_{12}) - \lambda_{12} f_{nv}] u_n$$

Для фиг. 3, б, в

$$uf_v = u_c + \sum_{n=1}^{\infty} [f_{nv} (1 + \lambda_{22}) - \lambda_{22} f_{nw}] u_n \quad (3.5)$$

Выражения  $uf_{w2}$  для фиг. 3, б, в,  $uf_{w1}$  — для фиг. 3, б, в и  $uf_v$  — для фиг. 3, а, в можно получить из формул (3.4), (3.5), если положить в них соответственно равными нулю коэффициенты  $\lambda_{21}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{22}$ . В равенствах (3.3) надо при этом соответственно принять равными нулю коэффициенты  $r_{21}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{22}$ .

В случае расположения сиффона между трубой и баком (фиг. 3, б, в) вариация скорости потока при выходе из бака будет отличаться от вариации  $v_{11}$  скорости входа в трубу, и поэтому вариация перепада давления  $p^* - p_{11}$  будет выражаться зависимостью

$$p^* - p_{11} = \psi_1 M_1 \left\{ v_{11} - \sum_{n=1}^{\infty} [f_{n1} (1 + \lambda_{11}) - f_{nw} \lambda_{11}] + i s_1 r_{11} p_{11} \right\} \quad (3.6)$$

где  $\psi_1$  — отнесенный к скорости коэффициент сопротивления на выходе жидкости из бака.

Для фиг. 3, а, и 3, в,

$$p^* - p_{11} = \psi_1 M_1 v_{11} \left( M_1 = \frac{v_{01}}{a_{01}} \right)$$

Формулы (3.4), (3.5) можно применить и в случае, когда движение корпуса представлено в виде (2.7). В них надо положить  $u_c = 0$  и вместо бесконечных сумм собственных функций надо взять просто разности форм вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} uf_{w2} &= -i\omega \frac{a_0}{a_{01}} \beta [f(\xi_w, \omega) (1 + \lambda_{21}) - f(\xi_1, \omega) \lambda_{21}] \\ uf_{w1} &= -i\omega \frac{a_0}{a_{02}} \beta [f(\xi_w, \omega) (1 + \lambda_{12}) - f(\xi_v, \omega) \lambda_{12}] \\ uf_v &= -i\omega \frac{a_0}{a_{02}} \beta [f(\xi_v, \omega) (1 + \lambda_{22}) - f(\xi_w, \omega) \lambda_{22}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

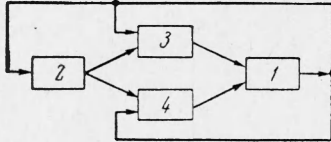
где  $f(\xi_1, \omega)$ ,  $f(\xi_w, \omega)$ ,  $f(\xi_v, \omega)$  — формы вынужденных колебаний фланца днища бака, насоса, форсуночной головки.

Схема топливной магистрали и граничные условия задачи посредством введения суммирующих звеньев  $uf_{w2}$ ,  $uf_{w1}$ ,  $uf_v$  сведены к структуре, которая подробно обследована в работе [9]. Здесь используются результаты этой работы без их воспроизведения. Формулы для комплексных передаточных чисел  $K[p_{21}, p^*]$ ,  $K[p_{21}, w]$ ,  $K[v, p_{12}]$ ,  $K[v, p]$ ,  $K[w, p]$ ,  $K[w, p_{12}]$  сохраняют свой прежний вид, формулы для  $K[p_{21}, uf_{w2}]$ ,  $K[v, uf_v]$ ,  $K[w, uf_{w1}]$ ,  $K[w, uf_v]$  можно получить из выражений  $K[p_{21}, u]$ ,  $K[v, u]$ ,  $K[w, u]$ , представленных в [9], положив в них  $f_{w1} = f_{w2} = f_v = 1$ . Вместо одного блока  $K[w, u]$  здесь в схеме будут два параллельных блока с передаточными числами  $K[w, uf_v]$  и  $K[w, uf_{w1}] = -1$ . Последнее различие является следствием того, что изменение геометрии сиффона второй трубы в общем случае происходит одновременно от двух смещений — насоса и форсуночной головки.

Передаточные числа для первой трубы будут выражаться другими формулами, если сиффон расположен между трубой и баком (фиг. 3, б, в). Их можно получить с учетом (3.6) по методике, изложенной в [9]. Влияние места расположения сиффона на динамические свойства магистрали становится заметным, если коэффициенты  $r_{11}$

и  $r_{21}$  податливости сиффона значительны или геометрические характеристики  $|\lambda_{11}| \gg 0$ ,  $|\lambda_{21}| \gg 0$ .

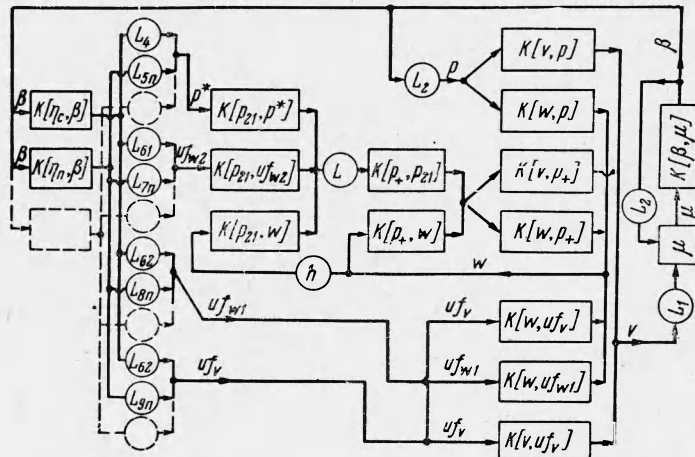
4. Блок-схема, составленная из физических звеньев, изображена на фиг. 4. Здесь 1 — камера, 2 — корпус летательного аппарата (стенда), 3 — магистраль горючего, 4 — магистраль окислителя. Возмущение движения корпуса вызывает вариации давления в топливоподающих магистралях и, следовательно, вариацию впрыска топлива в камеру. В камере сгорания возникает вариация давления, которая воздействует на топливные магистрали и на движение корпуса. Система, таким образом, оказывается замкнутой и имеет, кроме того, дополнительные обратные связи.



Фиг. 4

На фиг. 5 показана развернутая блок-схема, в которую включена только одна топливная магистраль. Вторая топливная магистраль должна быть подключена согласно фиг. 4. Движение корпуса принято в форме (2.1). Здесь изображено только одно звено для  $n$ -го тона колебаний корпуса. На самом деле  $n = 1, 2, 3 \dots$ , причем звенья расположены параллельно, как показано пунктиром.

Система имеет три внутренние обратные связи: между камерой и второй трубой — по давлению  $p = L_2\beta$ , между второй и первой трубой — по скорости  $w$ , третья обратная связь охватывает камеру, она появилась вследствие того, что передаточная функция камеры составлена по скорости впрыска массы топлива, а выходной координатой для трубы служит скорость впрыска топлива.



Фиг. 5

Так как безразмерные параметры физических звеньев различные, а изменение граничных условий на концах каждой трубы определяется смещениями двух сечений корпуса, при объединении звеньев в общую схему введены масштабные коэффициенты и суммирующие звенья. Состав суммирующих звеньев  $uf_{w2}$ ,  $uf_{w1}$  и  $uf_v$  для фиг. 5 определяется формулами (3.4) и (3.5).

Вариация скорости впрыска массы топливного компонента в камеру зависит от вариации скорости  $v$  и вариации плотности  $\rho_{22}$  на правом конце второй трубы. Так, например, для окислителя

$$m_2 = (v_0 + a_{02}v)(1 + p_{22})\rho_{02}F_{02}, \quad m_2^{\circ} = v_{02}\rho_{02}F_{02}$$

Удерживая малые только первого порядка и принимая во внимание, что  $p_{22} = \rho_{22}$ , на основании (1.2) получим

$$\mu_2 = p_{22} + \frac{v}{M_2}$$

Давление  $p_{22}$  удобно выразить при помощи формулы (2.12) из [9] для  $j = 2$ . Принимая во внимание, что  $p\rho_{02}a_{02}^2 = \beta p_3^{\circ}$ , будем иметь

$$\mu_2 = L_1v + L_2\beta, \quad L_1 = (M_2^{-1} + \psi_2M_2), \quad L_2 = p_3^{\circ} / \rho_{02}a_{02}^2 \quad (4.1)$$



На основании равенств (3.1) заключаем, что

$$L_4 = -\omega^2 N_c, \quad L_{5n} = -\omega^2 N_n \quad (4.2)$$

Выражения для коэффициентов  $L_{61}, L_{62}, L_{7n}, L_{8n}, L_{9n}$  найдем из сопоставления равенств (3.2) и (3.4), (3.5)

$$\begin{aligned} L_{61} &= -i\omega a_0 / a_{01}, & L_{62} &= -i\omega a_0 / a_{02} \\ L_{7n} &= L_{61} [f_{nw} (1 + \lambda_{21}) - \lambda_{21} f_{n1}] \\ L_{8n} &= L_{62} [f_{nv} (1 + \lambda_{12}) - \lambda_{12} f_{nv}] \\ L_{9n} &= L_{62} [f_{nv} (1 + \lambda_{22}) - \lambda_{22} f_{nv}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

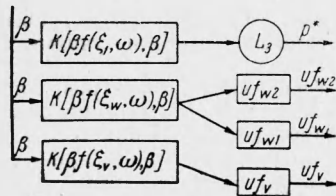
Часть блок-схемы, соответствующая представлению смещений корпуса в виде (2.7), показана на фиг. 6. Вместо бесконечно большого числа блоков, выражающих динамические свойства корпуса, здесь всего три блока, что имеет преимущество при анализе системы. Выражения  $uf_{w2}, uf_{w1}, uf_v$  определяются из равенств (3.7), вариация давления  $p^*$  вычисляется по формуле

$$p^* = L_3 f(\xi_1, \omega) \beta, \quad L_3 = -\omega^2 \frac{h_1 a_0^2 \kappa(\omega)}{a_{01}^2 l} \quad (4.4)$$

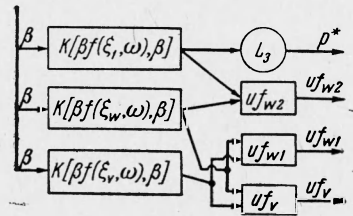
причем коэффициент  $\kappa(\omega)$  зависит от частоты колебаний и отнесен к полной вариации смещения флянца днища бака. Остальная часть блок-схемы такая же, как и на фиг. 5.

Если геометрические характеристики сильфонов таковы, что можно принять  $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{22} = 0$ , то на основании (3.7) скорости  $uf_{w2}, uf_{w1}, uf_v$  определяются без суммирования; и блок-схема упрощается. Вариант измененной части блок-схемы, соответствующий этому случаю, представлен на фиг. 7.

Здесь колебания  $\beta f(\xi_1, \omega)$  днища бака вызывают только вариацию давления  $p^*$  на входе в первую трубу, колебания  $\beta f(\xi_w, \omega)$  насоса изменяют скорости движения жидкости при выходе из первой трубы и входе во вторую трубу, колебания  $\beta f(\xi_v, \omega)$  форсуночной головки изменяют скорость движения жидкости на выходе из второй трубы.



Фиг. 7



Фиг. 6

Соотношения между безразмерными частотами колебаний для различных звеньев установим из равенств

$$\Omega = \frac{s}{\theta} = \omega \frac{a_0}{l} = s_1 \frac{a_{01}}{l_1} = s_2 \frac{a_{02}}{l_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда} \\ s &= s_1 q, \quad s_2 = s_1 q_2, \quad \omega = s_1 q_1 \\ q &= \theta \frac{a_{01}}{l_1}, \quad q_1 = \frac{l}{l_1} \frac{a_{01}}{a_0}, \quad q_2 = \frac{l_2}{l_1} \frac{a_{01}}{a_{02}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Многоконтурную систему, представленную на фиг. 5, можно упростить, заменив звенья с контурами обратной связи эквивалентными им звеньями без обратной связи. Пример такой замены показан на фиг. 8. Эквивалентное звено с комплексным передаточным числом  $K^*[\beta, v]$  выражает отношение вариации давления в камере к вариации скорости впрыска топлива

$$K^*[\beta, v] = \frac{K[\beta, u] L_1}{1 - K[\beta, \mu] L_2} \quad (4.6)$$

Годограф вектора  $K^*[\beta, v]$  в масштабе  $L_1$  почти не отличается от годографа  $K[\beta, \mu]$ , показанного на фиг. 1, 2.

Анализ свойств системы показывает, что наиболее благоприятные условия для возникновения неустойчивости движения существуют в случаях, когда собственные частоты низших тонов корпуса и топливной магистрали оказываются близкими. На частотах, близких к собственной частоте  $\omega_n$  корпуса, как следует из формул (2.4),  $\eta_n \gg \eta_c, \eta_n \gg \eta_m$  ( $n \neq m$ ), и поэтому в первом приближении можно положить  $\eta_c = \eta_m = 0$  ( $m = 1, 2, \dots, m \neq n$ ). Блок-схема системы в этом случае наиболее простая; с учетом одной топливной магистрали она представлена на фиг. 9.

Комплексные передаточные числа  $K^*[v, p], K^*[v, p^*]$  эквивалентных звеньев для топливной магистрали могут быть определены по схеме фиг. 5. Комплексное передаточное число  $K^*[v, u]$  более сложное. Его можно получить или по схеме фиг. 5,

объединив воздействия  $uf_{w2}$ ,  $uf_{w1}$ ,  $uf_v$  с учетом формул (3.4), (3.5), (4.3), или использовать формулы [9], приняв на основании (3.4), (3.5)

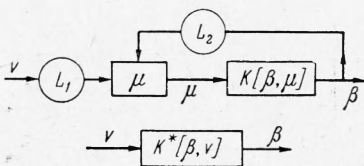
$$f_{w2} = f_{nw} (1 + \lambda_{21}) - \lambda_{21} f_{n1}, \quad f_{w1} = f_{nw} (1 + \lambda_{12}) - \lambda_{12} f_{nv}$$

$$f_v = f_{nv} (1 + \lambda_{22}) - \lambda_{22} f_{nw}$$

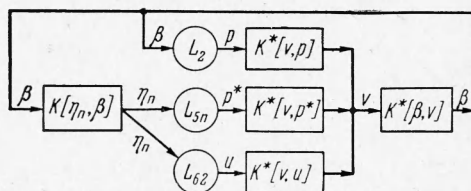
Дальнейшее упрощение схемы получим заменой звеньев с комплексными передаточными числами  $K^* [\beta, v]$ ,  $K [v, p]$  эквивалентным звеном (фиг. 10), причем

$$K^{**} [\beta, v] = \frac{K^* [\beta, v]}{1 - K^* [\beta, v] K^* [v, p] L_2} \quad (4.7)$$

Комплексное передаточное число  $K^{**} [\beta, v]$  выражает отношение вариации  $\beta$  давления в камере к вариации  $v$  скорости впрыска топлива с учетом реакции топливной магистрали на это давление. Теперь вариация  $v$  вызывается только вариацией



Фиг. 8



Фиг. 9

давления  $p^*$  при входе топлива в магистраль и движением насоса и форсуночной головки относительно невозмущенного потока, символически обозначенными на схеме вариацией скорости  $u$ .

5. Динамические схемы, представленные на фиг. 4—10, дают возможность решать различные задачи: обследовать влияние параметров и их комбинаций на устойчивость номинального режима системы, назначать такие соотношения параметров, чтобы система была устойчива, выбирать средства и способы стабилизации (включая применение автоматических устройств для управления подачей топлива в камеру) и формулировать требования к ним [11, 12], определять допустимые области изменения некоторых параметров, считая значения остальных параметров заданными; наконец, учитывать колебания впрыска топлива при изучении высокочастотных вибраций в камере.

Свойства системы зависят от значительного числа физических параметров, многие из которых тесно связаны между собой. Например, вследствие расхода топлива во время полета уменьшаются  $h_1$ ,  $m$ , увеличивается  $\Omega_n$ , изменяются значения  $f_{n1}$ ,  $f_{nw}$ ,  $f_{nv}$ . Увеличение или уменьшение толщины днища топливного бака или изменение жесткости подвески двигателя приводит к изменению значений  $\Omega_n$ ,  $f_{n1}$ ,  $f_{nw}$ ,  $f_{nv}$ . Анализ системы в общем случае становится поэтому очень сложным. В практических случаях он несколько упрощается, поскольку приходится иметь дело с конкретным летательным аппаратом и ЖРД, параметры которых или известны, или допускают варьирование в небольших пределах.

Отметим некоторые общие свойства системы, оставляя в стороне особенности, связанные с изменением многих параметров в широких пределах. Анализ уравнения

$$1 - K^* [\beta, v] K^* [v, p] L_2 = 0$$

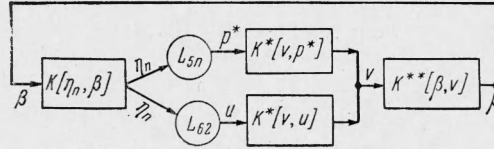
которое является характеристическим для звена (4.7), показывает, что его комплексные корни при некоторых соотношениях параметров камеры и топливной магистрали располагаются в правой полуплоскости, и поэтому звено (4.7) может быть неустойчивым. Это соответствует выводам [9].

Особенность динамической системы состоит в том, что она может быть неустойчивой, даже если камеру сгорания считать идеальным звеном  $\theta = \tau^0 = \nu = A = 0$ . Формула (4.7) в этом случае будет более простой

$$K^{**} [\beta, v] = \frac{k_0}{1 - K^* [v, p]_{k=0} L_2} \quad (5.1)$$

Установим важное свойство комплексного передаточного числа  $K^{**} [\beta, v]$ , которое в целях наглядности сформулируем для случая, когда  $K^* [v, p] = K [v, p]$ . Будем считать, что на обоих концах трубы имеются сопротивления, отвечающие условиям  $\psi_1 M_1 < 1$ ,  $\psi_2 M_1 < 1$  (в практических случаях эти условия всегда выполняются). Безразмерная собственная частота колебаний потока жидкости в трубе такая же, как и для «открытой» с обоих концов трубы [13]; она равна  $(1 - M_1^2) n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

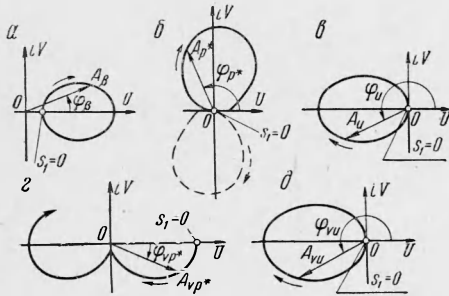
Так как годограф вектора  $K[v, p]$  располагается в левой полуплоскости  $Z = U + iV$  и модуль вектора  $K[v, p]$  имеет минимальное значение при  $s_{1n} = (1 - M_1^2) (2n - 1) \pi / 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то из (5.1) можно установить, что годограф вектора  $K^{**}[\beta, v]$  будет находиться в правой полуплоскости  $Z$  (фиг. 11, а); а модуль этого вектора достигает максимального значения при  $s_1 = s_{1n}$ . Этому значению равна частота потока в трубе, закрытой с одного конца. Таким образом, наличие у камеры обратной связи в виде трубы, «открытой» с обоих концов, формирует эквивалентное звено, собственная частота которого как бы равна частоте трубы, закрытой с одного конца. Первая собственная частота эквивалентного звена (5.1) в два раза ниже первой собственной частоты потока жидкости в трубе между баком и камерой.



Фиг. 10

Анализ устойчивости замкнутой системы, представленной на фиг. 10,

удобно проводить при помощи амплитудно-фазового критерия [7]. На фиг. 11 показан примерный вид амплитудно-фазовых частотных характеристик звеньев системы применительно к простейшему случаю, когда магистраль состоит из однородной трубы  $K^*[v, p^*] = K[v, p^*]$ , камера сгорания является идеальным звеном. Кривые б, в, г, д изображают соответственно годографы векторов



Фиг. 11

$$\begin{aligned}
 K[\eta_n, \beta] L_{5n} &= A_p e^{i\varphi_p^*} \\
 K[\eta_n, \beta] L_{62} &= A_u e^{i\varphi_u} \\
 K[v, p^*] &= A_{vp^*} e^{i\varphi_{vp^*}} \\
 K[v, u] &= A_{vu} e^{i\varphi_{vu}} \\
 K^{**}[\beta, v] &= A_\beta e^{i\beta}
 \end{aligned}$$

Каждое отдельно взятое звено схемы на фиг. 10 устойчиво, и поэтому замкнутая система будет неустойчива только в том случае, если при  $0 \leq s_1 \leq \infty$  амплитуднофазовая характеристика разомкнутой цепи

$$[A_p A_{vp^*} \exp i(\varphi_{p^*} + \varphi_{vp^*}) + A_u A_{vu} \exp i(\varphi_u + \varphi_{vu})] A_\beta \exp i\beta \quad (5.2)$$

на плоскости  $Z = U + iV$  будет охватывать точку  $c(1, i0)$ .

На основании формул (2.5), (2.6), (3.1) и (3.2) из [9] можно заключить, что модули комплексных передаточных чисел  $A_p A_{vp^*}$ ,  $A_u A_{vu}$  пропорциональны соответственно  $n_x f_{n1} f_{nv} h_1 / l$ ,  $n_x f_{nv}^2$ , где  $n_x$  — коэффициент осевой перегрузки летательного аппарата. Если  $f_{nv} = 0$ , то цепь разрывается, и замкнутой системы не существует.

Когда  $f_{n1} = 0$  ( $p^* = 0$ ), система остается замкнутой, вариация впрыска топлива в камеру вызывается движением форсуночной головки. Как видно из фиг. 11, а, в, г, в промежутке  $0 \leq s_1 \leq \infty$  найдется  $s_1 = s_1^\circ$  такое, что  $\varphi_u + \varphi_{vu} + \varphi_\beta = 0$ . Система будет неустойчивой, если при  $s_1 = s_1^\circ$  имеем  $A_u A_{vu} A_\beta > 1$ . Наилучшие условия для такой ситуации возникают, когда  $\omega_n \approx s_{1n}$ .

Чаще всего бывает  $f_{n1} \neq 0$ ,  $f_{nv} \neq 0$ , и вариация впрыска топлива в камеру вызывается движением днища бака и форсуночной головки. Существуют две возможности:  $f_{n1} f_{nv} > 0$  — сплошная кривая и  $f_{n1} f_{nv} < 0$  — пунктирная кривая на фиг. 11, б. Из анализа выражения (5.2) и кривых на фиг. 11 можно установить, что в случае  $f_{n1} f_{nv} > 0$  возможность для потери устойчивости на низших собственных частотах увеличивается, а при  $f_{n1} f_{nv} < 0$  уменьшается по сравнению с тем, когда  $f_{n1} = 0$ . При прочих равных условиях возможность возникновения неустойчивости увеличивается с возрастанием  $n_x$ , а для  $f_{n1} f_{nv} > 0$  она тем больше, чем больше  $h_1 / l$ . Демпфирование корпуса ( $\epsilon_n$ ) и сопротивления в трубопроводе ( $\psi_1 M_1, \psi_2 M_1$ ) способствуют устойчивости движения. Чем больше перепад давления на форсунках, тем система более устойчива.

Критерии устойчивости системы менее очевидны, когда камеру нельзя считать идеальным звеном, а топливоподающая магистраль имеет насос. Они становятся еще

менее обозримыми для двухкомпонентной системы. Для многих конструкций летательных аппаратов с ЖРД (особенно с жидкостным газогенератором, работающим на основных компонентах) динамическая схема более сложная и может включать автоматические устройства для управления подачей топлива в камеру [4].

По линеаризованным уравнениям можно получить заключение только об устойчивости или неустойчивости системы. Если система неустойчива и случайно возникшие колебания будут нарастать, то предположение о линейности становится несправедливым. Нелинейности в уравнениях для камеры сгорания, возможность возникновения кавитационных явлений в магистралях и др. приводят к изменению динамических свойств системы. В системе может устанавливаться автоколебательный режим.

Поступила 7 XII 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G u n d e r D. F., F r i a n t D. R., Stability of flow in a rocket motor. J. Appl. Mech., 1950, vol. 17.
2. S u m m e r f i e l d M., A theory of unstable combustion in liquid propellant rocket systems. J. Amer. Rocket Soc., 1951, vol. 21, No. 5.
3. G r o s s o L. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors. Part 1: Fundamentals low-frequency instability with monopropellants. J. Amer. Rocket Soc., 1951, vol. 21, No. 6.
4. К р о к о Л., Ч ж е н ь С и н ь - и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях Изд. иностр. лит., 1958.
5. S a b e r s k y R. H. Effect of wave propagation in feed lines on low-frequency rocket instability. Jet. Propulsion, 1954, vol. 24.
6. W i c k R. S. The effect of vehicle structure on propulsion system dynamics and stability. Jet. Propulsion, 1956, vol. 26, No. 10.
7. П о п о в Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.
8. Ф е о д о с ь е в В. И., С и н я р е в Г. Б. Введение в ракетную технику. Оборонгиз, 1960.
9. К о л е с н и к о в К. С. Вынужденные колебания впрыска идеальной сжимаемой жидкости в камеру. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
10. К а р е л и н В. Я. Кавитационные явления в центробежных и осевых насосах. Машгиз, 1963.
11. L i Y. T. Stabilization of low-frequency oscillations of liquid propellant rockets with fuel line stabilizer. Jet. Propulsion, 1956, vol. 26, No. 1.
12. D e e Y. C., P i c l e s A. M., M i e s s e C. C. Experimental aspects of rockets system stability. Jet. Propulsion, 1956, vol. 26, No. 1.
13. К о л е с н и к о в К. С. Вынужденные колебания потока идеальной сжимаемой жидкости в однородной прямой трубе. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 4.

#### ТОЧНЫЙ ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Г. И. Назаров (Томск)

Для некоторого класса сжимаемых жидкостей при плоско-параллельном или осесимметричном движении найдены точные общие решения в физических переменных, зависящие от произвольной функции двух аргументов. Эти решения могут быть полезными для апробации численных методов, используемых при решении краевых задач нелинейных уравнений газовой динамики с учетом внешних консервативных сил.

Известно [1], что движение газа при наличии напряженности магнитного поля, перпендикулярной к плоскости течения (или направленной по трансверсале при осесимметричном течении), определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho y^k} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho y^k} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{v^2}{2} + U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\mu \rho}{4\pi} = \text{const} \quad (1)$$

$$p = f(\rho) \quad (2)$$

Здесь  $\phi$  — потенциал скорости,  $\psi$  — функция тока,  $v$  — модуль скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $U$  — потенциальная энергия,  $\mu$  — параметр, характеризующий магнитное поле невозмущенного потока на бесконечности [2].

При  $k = 0$  уравнения (1), (2) описывают плоско-параллельное движение, при  $k = 0$  ( $y > 0$ ) — осесимметричное течение. При  $\mu = 0$  уравнения переходят в обычные уравнения движения сжимаемой жидкости. Зависимость (2) предполагается известной.