

О ХАРАКТЕРЕ ОСОБЕННОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ПРОВОДЯЩЕГО КЛИНА

УДК 537.8

В. И. Яковлев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
630090 Новосибирск

Одна из задач интенсивно развиваемой в последние годы «технологической гидродинамики» [1] связана с бестигельным зонным переплавом полупроводниковых материалов в переменном электромагнитном поле индуктора. Полное теоретическое изучение задач тепло- и массообмена в этом процессе, характеризующихся наличием неизвестных границ фазового перехода (где физические свойства среды терпят разрыв), свободных границ, а также нелинейностью управляющих уравнений и граничных условий, возможно только численными методами. Однако здесь имеются вопросы, которые предварительно можно и необходимо исследовать аналитическими средствами. Один из них, касающийся поведения переменных электромагнитных полей в области геометрической сингулярности вблизи линии пересечения областей с различными значениями электропроводности материала, обсуждается в данной работе.

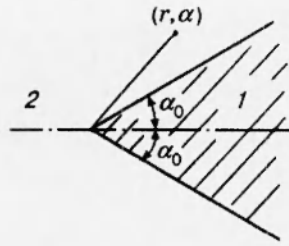
1. Особенности задачи, непредвиденные трудности, возникающие при ее изучении, и пути их преодоления здесь продемонстрированы с помощью простейшей плоской постановки. Рассматривается проводящий клин (проводимость σ) с углом при вершине $2\alpha_0$ и ребром, совпадающим с осью z , находящийся в переменном плоском магнитном поле (частота ω), перпендикулярном оси z . В окружающем пространстве $\sigma = 0$, диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице. Требуется определить характер электрического и магнитного полей вблизи вершины клина как внутри, так и вне его.

В квазистационарном приближении вектор-потенциал $\mathbf{A}(r, \alpha, t) = A(r, \alpha)e^{i\omega t}\mathbf{e}_z$, описывающий искомые поля $\mathbf{E} = -(1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, определяется из задачи

$$\Delta A^{(1,2)}(r, \alpha) - \frac{2i}{\delta^2} A^{(1,2)}(r, \alpha) = 0, \quad \delta^{(1,2)} = \begin{cases} 1 & \text{для области 1,} \\ 0 & \text{для области 2;} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$A^{(1)} = A^{(2)} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial A^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad A^{(1)} = A^{(2)} \Big|_{\alpha=2\pi-\alpha_0}, \quad \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial A^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=2\pi-\alpha_0}. \quad (1.2)$$

При исследовании асимптотического поведения полей вблизи вершины клина характерный масштаб клина l и граничные условия на удаленной замыкающей поверхности в задаче не фигурируют. В уравнениях (1.1) и условиях (1.2) переменные $A^{(1,2)}$, r рассматриваются как безразмерные, полученные с использованием масштабов $H_0 l$ и l соответственно. Здесь верхними индексами отмечена принадлежность данной функции либо к области 1 (проводящей), либо к области 2 свободного пространства (см. рисунок). Безразмерная толщина скин-слоя $\delta = c(\sqrt{2\pi\sigma\omega l})^{-1}$, коэффициенты $\delta^{(1,2)}$ введены для единой формы записи уравнения в областях 1, 2. Заметим, что граничные условия (1.2) выписаны для случая, когда магнитная проницаемость материала клина $\mu = 1$. Это сделано для исследования чистого влияния лишь проводимости на поведение полей, так как наличие



$\mu \neq 1$ уже в нулевом приближении определяет характер особенности вблизи вершины и делает неинтересными последующие приближения, учитывающие влияние проводимости.

С учетом известных решений $r^{\nu+n} e^{\pm i(\nu+n)\alpha}$, $J_{\nu+n}(((1-i)/\delta)r) e^{\pm i(\nu+n)\alpha}$ соответственно для уравнения Лапласа (область 2) и уравнения теплопроводности (область 1) вполне естественным представляется решение задачи (1.1), (1.2) для области $r \ll 1$ в виде разложения по степеням r

$$A^{(1,2)}(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\nu+n} B_n^{(1,2)}(\alpha), \quad (1.3)$$

где ν — константа, подлежащая определению как собственное число, обеспечивающее нетривиальное решение задачи. Заметим, что разложение (1.3) совпадает с разложением Мейкснера [2], если последнее освободить от неоправданных усложнений, вызванных одновременным рассмотрением компонент полей \mathbf{E} , \mathbf{H} вместо одной скалярной функции, в качестве которой в рассматриваемой задаче выступает $A(r, \alpha)$.

Проведенное исследование, однако, показало, что, начиная с $n = 2$, разложение (1.3) не позволяет удовлетворить всем граничным условиям (1.2), и, значит, на основе этого разложения невозможно получить достоверные данные даже о начальных приближениях $n = 0$, $n = 1$. Этот неожиданный отрицательный результат наталкивает на поиск возможного обобщения метода разделения переменных для получения новых решений уравнения Лапласа.

2. Поиск привел к следующему бесконечному набору решений уравнения Лапласа:

$$\varphi_n(r, \alpha) = r^{\nu+n} F_n(r, \alpha).$$

Здесь

$$F_n(r, \alpha) = \sum_{p=0}^{N(n)} C_{n,p}(\alpha) (\ln r)^p \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.1)$$

(Максимальный номер в сумме $p_{\max} = N(n)$ определяется в каждой конкретной задаче и в общем случае зависит от n .)

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n = r^{\nu+n-2} & \left\{ \sum_{p=0}^{N(n)} [C_{n,p}''(\alpha) + (\nu+n)^2 C_{n,p}(\alpha)] (\ln r)^p + \right. \\ & \left. + 2(\nu+n) \sum_{p=0}^{N(n)} p C_{n,p}(\alpha) (\ln r)^{p-1} + \sum_{p=0}^{N(n)} p(p-1) C_{n,p}(\alpha) (\ln r)^{p-2} \right\}, \end{aligned}$$

где выражение в фигурной скобке — полином относительно $\ln r$, то понятно, что если

коэффициенты при всех степенях $(\ln r)^p$ от $p = 0$ до $p_{\max} = N(n)$ обратить в нуль, то получим $\Delta\varphi_n = 0$. Значит, функции $C_{n,p}(\alpha)$ из (2.1) должны удовлетворять рекуррентной системе уравнений $[C''_{n,p} + (\nu + n)^2 C_{n,p}] + 2(\nu + n)(p + 1)C_{n,p+1} + (p + 1)(p + 2)C_{n,p+2} = 0$ ($p = 0, 1, \dots, N(n)$), которые решаются последовательно, начиная с максимального номера $p_{\max} = N(n)$. Это последнее уравнение для $C_{n,p_{\max}}$ однородное, и его решением будет комбинация $\sin(\nu + n)\alpha$, $\cos(\nu + n)\alpha$.

Понятно, что сумма решений типа (2.1)

$$\varphi(r, \alpha) = r^\nu \sum_{n=0}^{\infty} r^n F_n(r, \alpha)$$

также является решением уравнения Лапласа.

Для уравнения $\Delta A - (2i/\delta^2)A = 0$ аналогично можно построить решение в виде ряда

$$A(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\nu+n} F_n(r, \alpha), \quad F_n(r, \alpha) = \sum_{p=0}^{N(n)} C_{n,p}(\alpha)(\ln r)^p. \quad (2.2)$$

Подставив (2.2) в это уравнение, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{\nu+n-2} \left\{ \sum_{p=0}^{N(n)} [(C''_{n,p} + (\nu + n)^2 C_{n,p})(\ln r)^p + 2(\nu + n)pC_{n,p}(\ln r)^{p-1} + \right. \\ \left. + p(p-1)C_{n,p}(\ln r)^{p-2}] - \frac{2i}{\delta^2} \Lambda_n \sum_{p=0}^{N(n-2)} C_{n-2,p}(\ln r)^p \right\} = 0.$$

Здесь

$$\Lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 1, \\ 1 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что (2.2) — действительно решение рассматриваемого уравнения, если угловые функции $C_{n,p}(\alpha)$ удовлетворяют уравнениям

$$[C''_{n,p} + (\nu + n)^2 C_{n,p}] + 2(\nu + n)(p + 1)C_{n,p+1} + (p + 1)(p + 2)C_{n,p+2} = \frac{2i}{\delta^2} \Lambda_n C_{n-2,p} \quad (2.3) \\ (p = 0, 1, \dots, N(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots).$$

Следует обратить внимание, что правые части в (2.3) подключаются, только начиная с $n = 2$, причем в $C_{n-2,p}$ максимальное значение индекса p равно $N(n-2)$ и может отличаться от $N(n)$; если $N(n-2) < N(n)$, то правые части при $p > N(n-2)$ исчезают.

В решениях (2.1), (2.2) предполагалось, что номер n либо равен нулю, либо принимает положительные целые значения. Легко проверить, что имеется второй бесконечный набор решений уравнения Лапласа

$$\varphi_n^{(2)} = r^{\nu-n} \Phi_n(r, \alpha), \quad \Phi_n(r, \alpha) = \sum_{p=0}^{N(n)} D_{n,p}(\alpha)(\ln r)^p \quad (n = 0, 1, \dots),$$

причем угловые функции удовлетворяют системе уравнений

$$D''_{n,p} + (\nu - n)^2 D_{n,p} + 2(\nu - n)(1 + p)D_{n,p+1} + (1 + p)(2 + p)D_{n,p+2} = 0 \quad (p = 0, 1, \dots).$$

Аналогично (2.2) решения $\varphi_n^{(2)}$ могут быть использованы в качестве членов ряда для построения решения уравнения Гельмгольца.

3. Воспользуемся решениями типа (2.2) для исходной задачи (1.1), (1.2). Последовательное рассмотрение приближений $n = 0, 1, \dots$ показывает, что в качестве $N(n)$ в данной задаче надо брать $N(n) = [n/2]$, т. е. целую часть от $n/2$, и, следовательно, искомое регулярное разложение можно представить как

$$A^{1,2}(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\nu+n} \sum_{p=0}^{[n/2]} C_{n,p}^{(1,2)}(\alpha) (\ln r)^p. \quad (3.1)$$

Функции $C_{n,p}^{(1,2)}(\alpha)$ удовлетворяют уравнениям (2.3); необходимо только правые части этих уравнений дополнить множителем $\delta^{(1,2)}$, описанным выше, и записать в виде $(2i/\delta^2)\Lambda_n\delta^{(1,2)}C_{n-2,p}^{(1)}$.

В качестве области определения функций $A^{(1,2)}$ примем область $0 < \alpha < \pi$ по одну сторону от плоскости симметрии клина и отдельно рассмотрим два вида симметрии относительно этой плоскости:

$$\text{а) } A^{(1)}|_{\alpha=0} = 0, \quad A^{(2)}|_{\alpha=\pi} = 0; \quad \text{б) } \frac{\partial A^{(1)}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial A^{(2)}}{\alpha}\Big|_{\alpha=\pi} = 0.$$

В каждом из этих случаев коэффициенты разложения (3.1) удовлетворяют системе уравнений (2.3) с уточненными правыми частями и граничным условиям

$$C_{(n,p)}^{(1)}(0) = 0, \quad C_{(n,p)}^{(2)}(\pi) = 0, \quad C_{(n,p)}^{(1)}(\alpha_0) = C_{(n,p)}^{(2)}(\alpha_0), \quad \frac{dC_{(n,p)}^{(1)}}{d\alpha}(\alpha_0) = \frac{dC_{(n,p)}^{(2)}}{d\alpha}(\alpha_0); \quad (3.2a)$$

$$\frac{dC_{(n,p)}^{(1)}}{d\alpha}(0) = 0, \quad \frac{dC_{(n,p)}^{(2)}}{d\alpha}(\pi) = 0, \quad C_{(n,p)}^{(1)}(\alpha_0) = C_{(n,p)}^{(2)}(\alpha_0), \quad \frac{dC_{(n,p)}^{(1)}}{d\alpha}(\alpha_0) = \frac{dC_{(n,p)}^{(2)}}{d\alpha}(\alpha_0), \quad (3.2b)$$

вытекающим из (1.2) соответственно для симметрий типа а или б.

Рассмотрим задачу с симметрией б. Нулевой член разложения (3.1) определяется однородным уравнением $d^2 C_{0,0}^{(1,2)}/d\alpha^2 + \nu^2 C_{0,0}^{(1,2)} = 0$ и однородными граничными условиями (3.2б). Нетривиальное решение задачи существует при значениях ν , удовлетворяющих уравнению

$$\text{Det}(\nu) = \sin \nu\pi = 0. \quad (3.3)$$

Минимальное неотрицательное собственное значение $\nu_* = 0$, и, следовательно, соответствующее решение имеет вид $C_{0,0}^{(1,2)}(\alpha) = t_0 \cos \nu_* \alpha = t_0$ (t_0 — константа, одинаковая для областей 1, 2).

Так как $\nu = \nu_* + 1$ удовлетворяет уравнению (3.3), член ряда (3.1), отвечающий номеру $n = 1$, также имеет нетривиальное решение $C_{1,0}^{(1,2)} = t_1 \cos(\nu_* + 1)\alpha$, описывающее однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости симметрии клина, с безразмерной величиной, задаваемой неопределенной константой t_1 .

Заметим, что эти результаты получаются и из разложения (1.3). Однако тогда их трудно считать достоверными, поскольку последующие члены ($n \geq 2$) разложения (1.3) граничным условиям удовлетворять не могут.

Влияние проводимости начинает сказываться с номера $n = 2$. Соответствующий член

в (3.1)

$$A_2^{(1,2)}(r, \alpha) = r^2(C_{2,0}^{(1,2)}(\alpha) + C_{2,1}(\alpha) \ln r) \quad (3.4)$$

содержит слагаемое с логарифмическим множителем, и именно этот множитель определяет характер особенности у вершины проводящего клина. Угловые функции из (3.4) удовлетворяют уравнениям (2.3), которые для $n = 2$, $p = 0, 1$ запишем как

$$\frac{d^2 C_{2,0}^{(1,2)}}{d\alpha^2} + (\nu_* + 2)^2 C_{2,0}^{(1,2)} + 2(\nu_* + 2)C_{2,1}^{(1,2)} = \frac{2i}{\delta^2} C_{0,0}(\alpha) \delta^{(i,2)}; \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 C_{2,1}}{d\alpha^2} + (\nu_* + 2)^2 C_{2,1} = 0. \quad (3.6)$$

Так как $\text{Det}(\nu_* + 2) = 0$, однородное уравнение (3.6) допускает нетривиальное решение $C_{2,1}^{(1,2)}(\alpha) = t_{2,1} \cos(\nu_* + 2)\alpha$, удовлетворяющее граничным условиям (3.26) при произвольной константе $t_{2,1}$, которая войдет в решение неоднородного уравнения (3.5), и только благодаря этому функции $C_{2,0}^{(1,2)}$ способны удовлетворить граничным условиям. Результат вычисления таков:

$$C_{2,0}^{(1)} = t_{2,0}^{(1)} \cos(\nu_* + 2)\alpha - t_{2,1}\alpha \sin(\nu_* + 2)\alpha + \frac{2i}{\delta^2} \frac{t_0}{4(\nu_* + 1)},$$

$$C_{2,0}^{(2)} = t_{2,0}^{(2)} \cos(\nu_* + 2)\alpha + t_{2,1}(\pi - \alpha) \sin(\nu_* + 2)\alpha.$$

Здесь коэффициенты $t_{2,0}^{(1,2)}$, $t_{2,1}$ выражаются через t_0 соотношениями

$$t_{2,1} = \frac{2i}{\delta^2} \frac{t_0}{4\pi(\nu_* + 1)} \sin(\nu_* + 2)\alpha_0, \quad t_{2,0}^{(2)} - t_{2,0}^{(1)} = \frac{2i}{\delta^2} \frac{t_0}{4(\nu_* + 1)} \cos(\nu_* + 2)\alpha_0.$$

Следовательно, функция $C_{2,1}(\alpha)$ однозначно определяется через константу t_0 нулевого приближения, в то время как $C_{2,0}^{(1,2)}(\alpha)$ определены с точностью до произвольных слагаемых $\cos(\nu_* + 2)\alpha$, поскольку граничные условия (3.26) накладывают ограничения не на константы $t_{2,0}^{(1,2)}$, а лишь на их разность.

(На самом деле имеет место общий результат для всех n , следующий из уравнений (2.3) и граничных условий (3.26): функции $C_{n,0}^{(1,2)}(\alpha)$ определены с точностью до аддитивной функции $t_{n,0} \cos(\nu_* + n)\alpha$, где $t_{n,0}$ — произвольная (одинаковая в областях 1, 2) константа.) Таким образом, полученное решение содержит набор свободных параметров, состоящий из коэффициентов t_0 , t_1 нулевого и первого членов разложения, а также одного из двух коэффициентов $t_{n,0}^{(1)}$ или $t_{n,0}^{(2)}$ при $\cos(\nu_* + n)\alpha$ в выражениях $C_{n,0}^{(1,2)}(\alpha)$ для каждого последующего члена разложения $n \geq 2$. Эти свободные константы определяются лишь в результате решения полной задачи.

Так как характер особенности электромагнитных полей у вершины клина, обусловленный его проводимостью, в главном определяется найденным вторым членом разложения, выражения для последующих членов здесь не приводятся. Из выражения (3.4) легко заметить, что названная особенность состоит в появлении бесконечных производных $\partial H_\alpha / \partial r$, $\partial H_r / \partial r$ в точке $r = 0$, в то время как поля H_α , H_r в этой точке непрерывны. (Заметим, что в [3] собственное значение $\nu = 0$ не принималось во внимание, вследствие чего делалось ошибочное заключение об отсутствии особенностей.)

В задаче с симметрией типа а минимальное собственное значение равно единице

($\nu_* = 1$). Следовательно, нулевой и первый члены разложения (3.1), удовлетворяющие граничным условиям (3.2а), имеют вид

$$A_0^{(1,2)}(r, \alpha) = t_0 r \sin \nu_* \alpha, \quad A_1^{(1,2)}(r, \alpha) = t_1 r^2 \sin(\nu_* + 1)\alpha,$$

а во втором приближении (учитывающем проводимость клина)

$$A_2^{(1,2)} = r^3 (C_{2,0}^{(1,2)}(\alpha) + C_{2,1}(\alpha) \ln r)$$

логарифмический член появляется с множителем r^3 , освобождая решение от особенностей, описанных выше. Понятно, что в общем случае имеет место суперпозиция решений с двумя названными типами симметрии.

Таким образом, переменные электромагнитные поля вблизи линии пересечения областей с различными значениями проводимости описываются решениями типа (3.1). Значит, при численном исследовании полной магнитогидродинамической задачи с фазовыми переходами, на которых проводимость терпит разрыв, численную схему для электродинамической части задачи надо разрабатывать с учетом слабых особенностей, определяемых данным решением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00-446).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гидромеханика** и тепло- и массообмен при получении материалов / Под ред. В. С. Андруевского, В. И. Полежаева. М.: Наука, 1990.
2. **Meixner J.** The behavior of electromagnetic fields at edges // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1972. V. AP-20. P. 442-446.
3. **Яковлев В. И.** Об асимптотическом поведении переменных электромагнитных полей вблизи вершины проводящего клина // Новосибирск, 1994. (Препр. / Ин-т теорет. и прикл. механики СО РАН; № 8-94).

Поступила в редакцию 18/V 1995 г.