

УДК 539.42

РАЗРУШЕНИЕ СТЕКЛА ВБЛИЗИ ОБЛАСТИ КОНТАКТА СО СТАЛЬНЫМИ ШАРАМИ

М. А. Леган^{*,**}, А. Н. Новоселов^{*}, Н. В. Федорова^{*,**}

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия
E-mails: legan@ngs.ru, aleksey.novoselov@gmail.com, veter-nata@mail.ru

Представлены результаты экспериментов по вдавливанию стальных шаров различного диаметра в стеклянные образцы в форме прямоугольного параллелепипеда. Экспериментально определялись предельная нагрузка при образовании кольцеобразной трещины в окрестности области контакта и радиус этой трещины. Для определения поля контактных напряжений в зоне разрушения использовалось решение Губера задачи Герца о вдавливании шара в упругое полупространство. Для моделирования разрушения при контактном взаимодействии применялись локальный критерий максимальных напряжений и нелокальные критерии разрушения: критерий средних напряжений, критерий Нуизмера и градиентный критерий. Для вычисления параметра, имеющего размерность длины и входящего в нелокальные критерии разрушения, на балках без надреза и с надрезом экспериментально определены предельное растягивающее напряжение и критический коэффициент интенсивности напряжений стекла. Показано, что среди рассмотренных критериев наиболее близкие к экспериментальным данным значения радиуса кольцеобразной трещины позволяет получить градиентный критерий. Значения предельного растягивающего напряжения, полученные с использованием этого критерия, превышают значения, полученные при изгибе балок, что обусловлено масштабным фактором.

Ключевые слова: стекло, хрупкое разрушение, кольцеобразная трещина, задача Герца, вдавливание шара в упругое полупространство, эксперимент, нелокальные критерии разрушения.

DOI: 10.15372/PMTF20180418

Введение. Согласно решению задачи Герца о вдавливании шара в упругое полупространство [1–3] максимальное растягивающее напряжение достигается на поверхности полупространства на границе круговой области контакта и действует на площадке, перпендикулярной радиусу, проведенному из точки начального контакта, т. е. является радиальным напряжением. Следовательно, в соответствии с локальным критерием максимальных напряжений разрушение должно начинаться на границе области контакта. Однако в работе [4] экспериментально установлено, что при вдавливании шаров в стеклянные образцы радиус возникающей на поверхности образцов кольцеобразной трещины больше радиуса области контакта. Поэтому требуется экспериментальное исследование хрупкого разрушения в окрестности области контакта и моделирование этого разруше-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-07631, 16-08-00713), а также Правительства РФ (грант № 14.W03.31.0002).

© Леган М. А., Новоселов А. Н., Федорова Н. В., 2018



Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — стеклянный образец, 2 — стальная защита микроскопа, 3 — USB-микроскоп

ния с помощью нелокальных критериев разрушения, учитывающих неоднородность поля контактных напряжений. Для применения этих критериев необходимо учитывать поле напряжений не только на поверхности, но и внутри полупространства. Распределение напряжений для задачи Герца о вдавливании шара в упругое полупространство получено в работе [2].

В настоящей работе определены значения предельной нагрузки на шар при образовании кольцеобразной трещины и радиуса этой трещины. При моделировании разрушения в зоне контактных напряжений получены оценки предельной нагрузки при образовании кольцеобразной трещины и радиуса этой трещины. Проведено сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальными данными. При этом основное внимание в работе уделено соответствию теоретических и экспериментальных значений радиуса кольцеобразных трещин. Поскольку известно, что кольцеобразные трещины появляются за пределами области контакта [4–8], теоретические оценки радиуса таких трещин можно также проверить путем сравнения с радиусом области контакта.

1. Методика испытаний и результаты экспериментов. Для определения усилия, при котором образуется трещина, использовался метод видеофиксации. Испытания проводились на машине Zwick/Roell Z100 в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева. Экспериментальная установка показана на рис. 1. USB-микроскоп устанавливался под стальную защиту. Объектив микроскопа направлен в центр сквозного отверстия диаметром 10 мм в крышке защиты. Сверху на эту крышку толщиной 10 мм помещается стеклянный образец, в который вдавливается стальной шар. С микроскопа изображение передается на компьютер в режиме реального времени, установленное программное обеспечение позволяет вести видеосъемку, а также получать фотографии. При возникновении трещины перемещение траверсы испытательной машины останавливается и фиксируется предельное усилие трещинообразования.

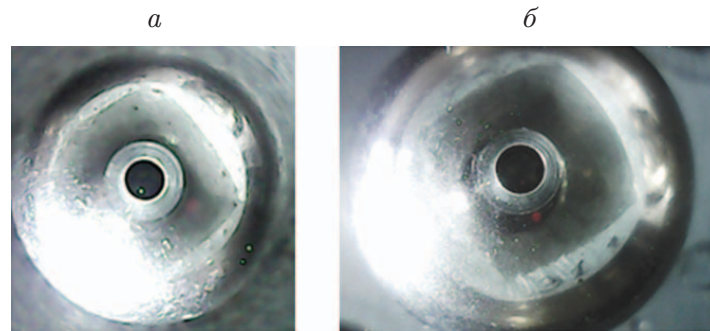


Рис. 2. Образование кольцеобразных трещин при вдавливании шаров различного диаметра:

a — $D = 5,5$ мм, *б* — $D = 12,0$ мм

Испытывались стеклянные образцы в форме прямоугольных параллелепипедов с размерами $10 \times 20 \times 20$ мм, изготовленные методом гидроабразивной резки из листового натрий-кальций-силикатного стекла марки М1 (ГОСТ Р 54170-2010) толщиной 10 мм.

В первой серии экспериментов инденторами являлись шары с диаметрами $D = 3,14; 5,50; 10,00; 12,00$ мм из подшипниковой стали марки ШХ 15. Шар определенного диаметра вдавливался в 10 образцов. Всего проведено 40 экспериментов. Вдавливание стальных шаров происходило со скоростью 3 мм/ч. Образование кольцеобразных трещин при вдавливании двух шаров различного диаметра показано на рис. 2. Видно, что при дальнейшем росте кольцеобразные трещины переходят в расширяющиеся конусообразные трещины.

Радиус кольцеобразных трещин r_c определялся с помощью измерительного микроскопа. Радиус области контакта a вычислялся по формуле [3]

$$a = \sqrt[3]{3RP/(4E^*)},$$

где R — радиус шара; P — усилие, при котором образовалась трещина; E^* — эффективный модуль упругости при контакте стального шара со стеклянным образцом, вычисляемый с использованием известных значений модулей упругости и коэффициентов Пуассона стали E_{st} , ν_{st} и стекла E , ν :

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu_{st}^2}{E_{st}} \right)^{-1}.$$

Для стали марки ШХ 15 $E_{st} = 2,11 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_{st} = 0,28$, для стекла марки М1 $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0,2$.

Значения отношений r_c/a радиуса кольцеобразных трещин к радиусу области контакта и соответствующих усилий P , при которых образовались эти трещины, приведены в табл. 1. В последних трех строках приведены средние значения и среднеквадратичные отклонения s соответствующих величин. Из табл. 1 следует, что значения усилия, при которых происходит образование трещин, имеют большой экспериментальный разброс даже при одном и том же диаметре шара. С увеличением диаметра шара это усилие увеличивается. Значения отношения радиуса кольцеобразной трещины к радиусу области контакта показывают, что радиус трещины практически всегда больше радиуса области контакта. Для шаров с диаметрами $D = 10, 12$ мм значения отношения радиусов трещины к радиусу области контакта меньше, чем для шаров с диаметрами $D = 3,14; 5,50$ мм. В среднем по 40 экспериментам радиус кольцеобразной трещины больше радиуса области контакта на 37 %.

Для того чтобы уменьшить повреждения поверхности образцов, возможные при гидроабразивной резке, образцы для второй серии экспериментов нарезались алмазным диском.

Таблица 1

Результаты испытаний первой серии образцов

Номер экспери- мента	$P, \text{ Н}$				r_c/a			
	$D =$ 3,14 мм	$D =$ 5,50 мм	$D =$ 10,00 мм	$D =$ 12,00 мм	$D =$ 3,14 мм	$D =$ 5,50 мм	$D =$ 10,00 мм	$D =$ 12,00 мм
1	87	259	429	425	2,10	1,50	0,92	1,00
2	176	303	483	534	1,32	1,40	0,97	1,36
3	204	338	596	559	1,62	1,21	1,47	0,95
4	217	356	615	584	2,18	1,37	1,16	1,00
5	238	378	642	589	1,76	1,40	1,03	1,34
6	255	418	713	882	1,31	1,64	1,29	1,22
7	301	431	808	927	2,02	1,85	1,66	1,34
8	441	704	923	1089	1,27	1,18	1,18	1,34
9	644	736	1149	1104	1,30	1,43	1,20	1,44
10	1084	841	1332	1202	1,27	1,22	1,34	1,27
$\langle P \rangle$	365	476	769	790	—	—	—	—
$\langle r_c/a \rangle$	—	—	—	—	1,62	1,42	1,22	1,23
s	297	205	290	283	0,37	0,21	0,23	0,18

Таблица 2

Результаты испытаний второй серии образцов

Номер экспери- мента	$P, \text{ Н}$			r_c/a		
	$D =$ 5,5 мм	$D =$ 10,0 мм	$D =$ 17,0 мм	$D =$ 5,5 мм	$D =$ 10,0 мм	$D =$ 17,0 мм
1	145	256	550	1,17	1,37	1,19
2	245	258	685	1,25	1,11	1,41
3	275	408	853	1,46	1,12	1,27
4	294	530	867	1,38	1,16	1,40
5	519	576	880	1,84	1,26	1,30
6	545	582	909	1,91	1,12	1,12
7	660	696	953	1,21	1,32	1,33
8	690	815	1430	1,62	1,41	1,42
9	715	828	1480	1,20	1,22	1,12
10	1300	1020	1510	1,07	1,36	1,58
11	1430	1200	1600	1,01	1,72	1,31
12	1486	1440	1660	1,19	1,11	1,62
$\langle P \rangle$	692	717	1115	—	—	—
$\langle r_c/a \rangle$	—	—	—	1,36	1,27	1,34
s	470	365	391	0,29	0,18	0,16

Затем для уменьшения остаточных напряжений в стеклянных образцах проводился их отжиг при температуре 520 °С в течение 12 ч. Скорость вдавливания шаров была уменьшена до 1 мм/ч. В качестве инденторов использовались шары диаметром $D = 5,5; 10,0; 17,0$ мм. Шар определенного диаметра вдавливался в 12 образцов. На образцах второй серии проведено 36 экспериментов, результаты которых приведены в табл. 2.

Из табл. 2 следует, что большой экспериментальный разброс значений усилия P при образовании трещин сохраняется. С увеличением диаметра шара это усилие также увеличивается. Различия средних значений отношения радиуса кольцеобразной трещины к радиусу области контакта для шаров различного диаметра уменьшаются. В среднем по 36 экспериментам радиус кольцеобразной трещины больше радиуса области контакта на 32 %.

2. Определение предельного растягивающего напряжения и критического коэффициента интенсивности напряжений стекла. Для моделирования разрушения стекла при контактном взаимодействии необходимо экспериментально определить предельное растягивающее напряжение и критический коэффициент интенсивности напряжений исследуемого материала.

Предельное растягивающее напряжение стекла определялось при трехточечном симметричном изгибе балок [9, 10]. Испытывались четыре стеклянные балки, полученные при гидроабразивной резке и имеющие размеры $120 \times 12 \times 10$ мм, при скорости перемещения пуансона 50 мм/ч, а также четыре балки размерами $100 \times 10 \times 10$ мм, вырезанные алмазным диском и отожженные при температуре 520 °С в течение 12 ч, при скорости перемещения пуансона 1 мм/ч. Длина балок на 20 мм превышала расстояние между опорами. Максимальное растягивающее напряжение достигалось на гладкой стороне балки (поверхности листового стекла). Получены следующие значения предельных растягивающих напряжений: для стекла после гидроабразивной резки $\sigma_p = 57,76$ МПа, для стекла после алмазной резки и отжига $\sigma_p = 41,85$ МПа.

Для определения критического коэффициента интенсивности напряжений стекла применялся четырехточечный изгиб балок с надрезом [9, 10], который выполнялся алмазным диском толщиной 1 мм в среднем сечении балок размерами $100 \times 10 \times 10$ мм. На трех балках, изготовленных методом гидроабразивной резки, с надрезом длиной 2,5 мм испытания проводились при скорости перемещения нагружающего устройства 3 мм/ч. Еще четыре балки, вырезанные алмазным диском и отожженные при температуре 520 °С в течение 12 ч, с надрезом длиной 2 мм испытывались при скорости перемещения нагружающего устройства 1 мм/ч. Надрез выполнялся на гладкой стороне балки и при испытаниях находился снизу посередине между нижними опорами балки, расположенными на расстоянии 80 мм друг от друга. Сверху балка нагружалась двумя симметричными пуансонами, расстояние между которыми составляло 30 мм. Критический коэффициент интенсивности напряжений вычислялся по формуле, приведенной в [11] для описанной схемы изгиба балки с надрезом. В результате получены следующие значения критических коэффициентов интенсивности напряжений: для стекла после гидроабразивной резки $K_{Ic} = 1,152$ МПа \cdot м^{1/2}, для стекла после алмазной резки и отжига $K_{Ic} = 1,271$ МПа \cdot м^{1/2}.

Полученные значения превышают значение $K_{Ic} = 0,906$ МПа \cdot м^{1/2}, найденное по приведенным в [5] характеристикам стекла, что можно объяснить использованием другого стекла и влиянием радиуса закругления в вершине надреза.

В критерии средних напряжений и в градиентном критерии разрушения используется параметр L_* [12], имеющий размерность длины. Этот параметр выражается через стандартные характеристики материала: предел прочности σ_B и критический коэффициент интенсивности напряжений [13, 14]

$$L_* = 2K_{Ic}^2 / (\pi\sigma_B^2). \quad (1)$$

Таблица 3

Осредненные экспериментальные данные и результаты расчета по этим данным

D , мм	P , Н	r_c , мм	a , мм	p_m , ГПа	σ_r^{\max} , МПа
5,5	692	0,376	0,281	2,79	837
10,0	717	0,456	0,355	1,81	543
17,0	1115	0,670	0,498	1,43	429

Для стекла вместо предела прочности при одноосном однородном растяжении, значение которого экспериментально определить трудно, будем использовать предельное растягивающее напряжение, полученное при трехточечном симметричном изгибе балок. Тогда для стеклянных образцов после гидроабразивной резки $L_* = 0,253$ мм, для образцов после алмазной резки и отжига $L_* = 0,587$ мм.

3. Анализ результатов экспериментов. Поскольку во второй серии экспериментов образцы подвергались отжигу с целью уменьшения остаточных напряжений, проанализируем результаты этой серии. Для моделирования разрушения сначала используем локальный критерий максимальных растягивающих напряжений. При вдавливании шара в упругое полупространство растягивающие радиальные напряжения имеют место в окрестности границы области контакта и за ее пределами. Максимальное значение радиального напряжения достигается на поверхности полупространства в точках границы круговой области контакта. Следовательно, в соответствии с локальным критерием максимальных напряжений разрушение должно начинаться на границе области контакта. На поверхности полупространства за пределами области контакта радиальное напряжение зависит от радиуса r следующим образом [2, 5, 6]:

$$\sigma_r = p_m \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{a^2}{r^2} \quad (2)$$

($p_m = P/(\pi a^2)$ — среднее давление в области контакта; ν — коэффициент Пуассона).

Осредненные экспериментальные данные, полученные при вдавливании шаров различного диаметра, и результаты расчета по этим данным приведены в табл. 3.

С использованием данных табл. 3 и формулы (2) построена зависимость максимального растягивающего напряжения на поверхности полупространства от радиуса (рис. 3, а). Также на рис. 3 показаны точки, координаты которых равны радиусам кольцеобразных трещин соответственно для каждого диаметра шара.

Из табл. 3 и рис. 3, а следует, что максимальные растягивающие напряжения при вдавливании шаров на порядок превышают предельное растягивающее напряжение для стекла $\sigma_p = 41,85$ МПа, полученное при изгибе балок, и радиусы кольцеобразных трещин больше радиусов области контакта.

Учитывая несоответствие экспериментальных данных критерию максимальных напряжений, для определения предельного растягивающего напряжения и радиуса трещины при вдавливании шара в стеклянные образцы использовались нелокальные критерии разрушения. Для применения этих критериев необходимо знать распределение напряжений не только на поверхности, но и внутри полупространства. Формулы, по которым для задачи Герца о вдавливании шара можно вычислить напряжения в любой точке полупространства, получены в работе [2]. В соответствии с решением Губера [2] радиальное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_r = \frac{3}{2} p_m \left[\frac{1 - 2\nu}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{z^3}{\sqrt{u^3}} \right) + \frac{a^2 z^3}{(u^2 + a^2 z^2) \sqrt{u}} + \frac{z}{\sqrt{u}} \left(\frac{(1 - \nu)u}{a^2 + u} + (1 + \nu) \frac{\sqrt{u}}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - 2 \right) \right], \quad (3)$$

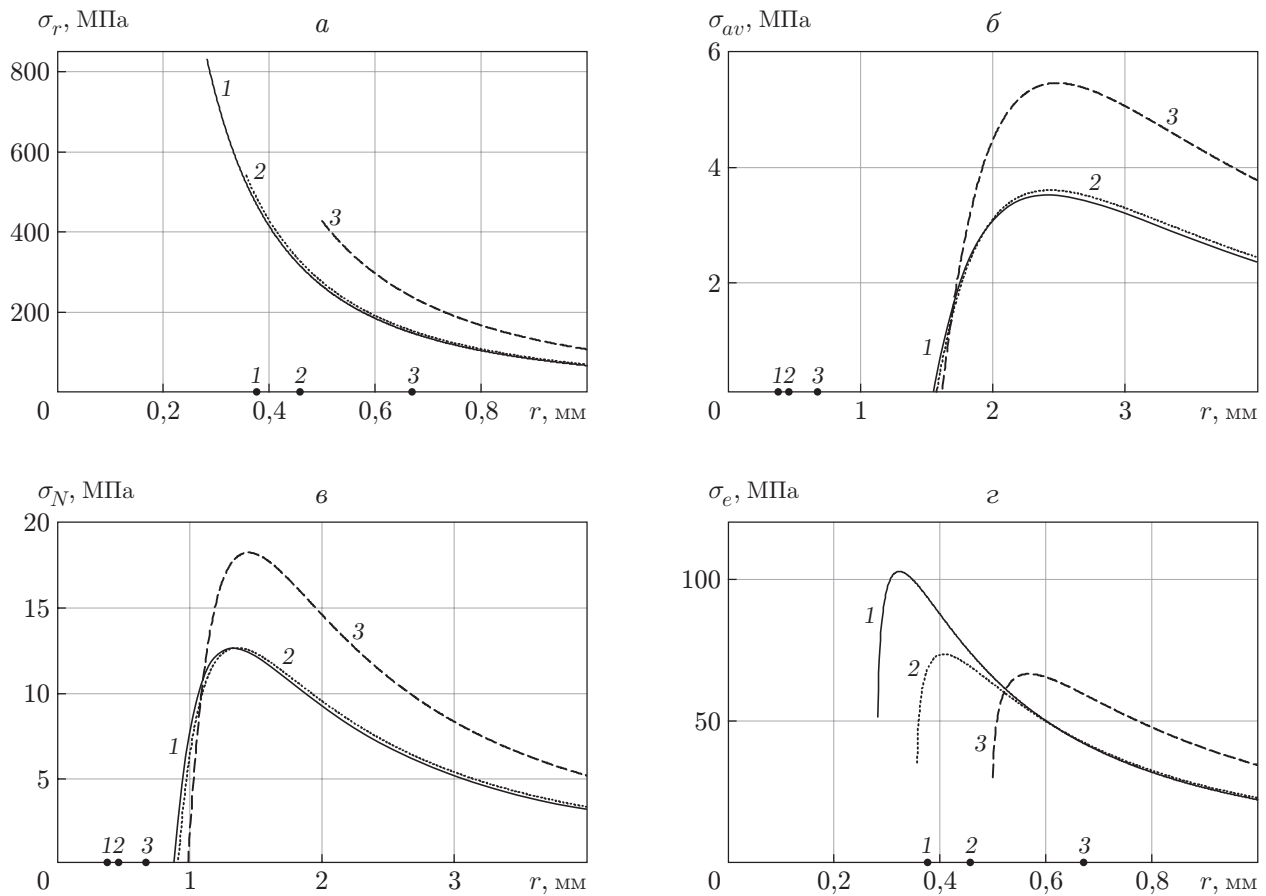


Рис. 3. Зависимости максимального растягивающего напряжения (а), среднего радиального напряжения (б), удаленного радиального напряжения (в), эффективного напряжения (г) от радиуса при вдавливании шаров различного диаметра (1 — $D = 5,5$ мм, 2 — $D = 10,0$ мм, 3 — $D = 17,5$ мм) и соответствующие точки, координаты которых равны радиусам кольцеобразных трещин

где z — координата, отсчитываемая от поверхности полупространства по нормали к ней,

$$u = (r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2})/2.$$

3.1. *Критерий средних напряжений.* В соответствии с критерием средних напряжений разрушение происходит в тот момент, когда максимальное значение среднего нормального напряжения достигает значения предела прочности материала σ_B :

$$\sigma_{av}^{\max} = \sigma_B,$$

где среднее напряжение вычисляется на площадке размером L_* , на которой действует нормальное напряжение σ_n , совпадающее с первым главным напряжением σ_1 в рассматриваемой точке тела:

$$\sigma_{av} = \frac{1}{L_*} \int_0^{L_*} \sigma_n dz.$$

Размер площадки осреднения L_* находится по формуле (1).

С использованием данного критерия получены зависимости осредненного на отрезке L_* радиального напряжения от радиуса (рис. 3,б). При вычислении среднего значения

Таблица 4

Результаты расчетов, полученные с использованием критерия средних напряжений

D , мм	r_c^{av} , мм	σ_{av}^{\max} , МПа
5,5	2,411	3,50
10,0	2,430	3,60
17,0	2,482	5,46

Таблица 5

Результаты расчета по критерию Нуизмера

D , мм	r_c^N , мм	σ_N^{\max} , МПа
5,5	1,321	12,6
10,0	1,357	12,6
17,0	1,442	18,2

радиального напряжения интегрирование проводилось по координате z от 0 до L_* . Напряжение в перпендикулярном направлении полагалось постоянным в силу симметрии задачи. Полученные зависимости имеют максимумы, координаты которых по оси r равны значениям r_c^{av} радиуса кольцеобразных трещин, а по оси σ_{av} равны значениям σ_{av}^{\max} предельного растягивающего напряжения стекла. Полученные данные приведены в табл. 4. На рис. 3,б показаны также точки, координаты которых, как и на рис. 3,а, равны радиусам кольцеобразных трещин соответственно для каждого диаметра шара.

Из табл. 4 и рис. 3,б следует, что значения предельного растягивающего напряжения, полученные с использованием критерия средних напряжений, на порядок меньше значения предельного растягивающего напряжения стекла $\sigma_p = 41,85$ МПа, полученного при изгибе балок, значения радиуса кольцеобразных трещин существенно больше экспериментальных значений. Следовательно, результаты, полученные с использованием критерия средних напряжений, плохо согласуются с экспериментальными данными о разрушении стекла при вдавливании стальных шаров.

3.2. *Критерий разрушения Нуизмера по напряжениям в удаленной точке.* В соответствии с критерием разрушения Нуизмера [13] разрушение происходит в тот момент, когда максимальное значение напряжения в некоторой точке, удаленной от рассматриваемой точки на расстояние $C_* = L_*/4$, достигает значения предела прочности материала σ_B :

$$\sigma_N^{\max} = \sigma_B.$$

С использованием данного критерия и формулы (3) при $z = C_*$ получены зависимости удаленного от поверхности полупространства на расстояние C_* радиального напряжения от радиуса (рис. 3,в). Полученные зависимости имеют максимумы, координаты которых по оси r равны значениям r_c^N радиуса кольцеобразных трещин, а по оси σ_N — значениям σ_N^{\max} предельного растягивающего напряжения стекла. Полученные данные приведены в табл. 5. На рис. 3,в показаны также точки, координаты которых, как и на рис. 3,а,б, равны радиусам кольцеобразных трещин соответственно для каждого диаметра шара.

Из табл. 5 и рис. 3,в следует, что значения предельного растягивающего напряжения, полученные с использованием критерия Нуизмера, существенно меньше значения предельного растягивающего напряжения стекла $\sigma_p = 41,85$ МПа, полученного при изгибе балок, и значения радиуса кольцеобразных трещин в несколько раз больше экспериментальных значений. Следовательно, критерий Нуизмера не позволяет удовлетворительно описать экспериментальные данные о разрушении стекла при вдавливании стальных шаров.

3.3. *Градиентный критерий разрушения.* В соответствии с градиентным критерием разрушения [12, 14, 15] разрушение происходит в тот момент, когда максимальное значение эффективного напряжения достигает предела прочности материала σ_B :

$$\sigma_e^{\max} = \sigma_B.$$

Эффективное напряжение σ_e пропорционально первому главному напряжению σ_1 в рассматриваемой точке тела и зависит от относительного градиента g_n положительного нормального напряжения σ_n , равного первому главному напряжению σ_1 в рассматриваемой точке тела:

$$g_n = |\text{grad } \sigma_n| / \sigma_n.$$

Относительный градиент находится с использованием решения соответствующей задачи теории упругости. Выражение для эффективного напряжения записывается в виде

$$\sigma_e = \sigma_1 / (1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L_* g_n}), \quad (4)$$

где L_* — параметр, который имеет размерность длины и выражается через известные характеристики материала σ_B и K_{Ic} по формуле (1); β — неотрицательный безразмерный параметр, который можно рассматривать в качестве параметра аппроксимации, определяемого для конкретного материала на основе экспериментальных данных о разрушении образцов с концентратором напряжений определенного вида. В дальнейшем значение параметра аппроксимации может быть использовано для элементов конструкций из того же материала с другими концентраторами напряжений. Для некоторых хрупких материалов, таких как пенополистирол, гипс и эбонит, значения параметра β близки к нулю, поэтому для стекла также примем $\beta = 0$.

Будем полагать, что разрушение в окрестности рассматриваемой точки начинается на площадке, на которой действует первое главное напряжение.

На поверхности полупространства при $z = 0$ в окрестности области контакта первым главным напряжением является радиальное напряжение σ_r , которое используется в градиентном критерии. Используя формулы (2), (3), вычислим радиальное напряжение и его производные по координатам r, z . Затем определим относительный градиент радиального напряжения и эффективное напряжение. На поверхности полупространства из выражения (2) находим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -p_m (1 - 2\nu) \frac{a^2}{r^3}.$$

Используя выражение (3), вычислим производную $\partial \sigma_r / \partial z$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = & \frac{3}{2} p_m \left\{ \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(-\frac{3z^2}{\sqrt{u^3}} + \frac{3z^3}{2\sqrt{u^5}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{(u^2 + a^2 z^2)^2 u} \left[3a^2 z^2 (u^2 + a^2 z^2) \sqrt{u} - a^2 z^3 \left(\frac{5\sqrt{u^3}}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + 2a^2 z \sqrt{u} + \frac{a^2 z^2}{2\sqrt{u}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ & + (1 - \nu) \frac{1}{(a^2 + u)^2} \left[\left(\sqrt{u} + \frac{z}{2\sqrt{u}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) (a^2 + u) - z \sqrt{u} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \\ & \left. + (1 + \nu) \left(\frac{1}{a} \arctg \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - \frac{z}{2\sqrt{u}(u + a^2)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{u} \left(2\sqrt{u} - \frac{z}{\sqrt{u}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(1 + \frac{r^2 + z^2 + a^2}{\sqrt{(r^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}} \right) z.$$

Таблица 6

Результаты расчета, полученные с использованием градиентного критерия

D , мм	r_c^e , мм	σ_e^{\max} , МПа
5,5	0,322	102,6
10,0	0,407	73,4
17,0	0,568	66,6

При $z = 0$, $r \neq a$ имеем $\partial u / \partial z = 0$. Тогда

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = \frac{3}{2} p_m \left[\frac{(1 - \nu) \sqrt{u}}{a^2 + u} + \frac{1 + \nu}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{\sqrt{u}} \right) - \frac{2}{\sqrt{u}} \right]$$

$$(u(r) = r^2 - a^2).$$

Относительный градиент вычисляется по формуле

$$g_n = |\operatorname{grad} \sigma_r| / \sigma_r,$$

где $|\operatorname{grad} \sigma_r| = \sqrt{(\partial \sigma_r / \partial r)^2 + (\partial \sigma_r / \partial z)^2}$. Подставляя выражение для относительного градиента в (4), находим эффективное напряжение при $\beta = 0$.

С использованием градиентного критерия построены зависимости эффективного напряжения от радиуса при вдавливании шаров различного диаметра (рис. 3,з). Эти зависимости имеют максимумы, координаты которых по оси r равны значениям r_c^e радиуса кольцеобразных трещин, а по оси σ_e — значениям σ_e^{\max} предельного растягивающего напряжения стекла. Полученные данные приведены в табл. 6. На рис. 3,з показаны также точки, координаты которых, как и на рис. 3,а–в, равны радиусам кольцеобразных трещин соответственно для каждого диаметра шара.

Из табл. 6 и рис. 3,з следует, что значения предельного растягивающего напряжения, полученные с использованием градиентного критерия, больше предельного растягивающего напряжения стекла $\sigma_p = 41,85$ МПа, полученного при изгибе балок (это можно объяснить влиянием масштабного фактора), и значения радиуса кольцеобразных трещин близки к экспериментальным значениям, но меньше их. Таким образом, результаты, полученные с использованием градиентного критерия, хорошо согласуются с экспериментальными данными о разрушении стекла при вдавливании стальных шаров.

Заключение. Проведены две серии экспериментов по вдавливанию стальных шаров различного диаметра в стеклянные образцы, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда. В первой серии испытывались 40 образцов (по 10 для каждого диаметра шара). Для уменьшения остаточных напряжений образцы второй серии подвергались отжигу при температуре 520°C в течение 12 ч. Во второй серии испытывались 36 образцов (по 12 для каждого диаметра шара).

Экспериментально определены предельные усилия при образовании кольцеобразных трещин в окрестности области контакта и радиусы этих трещин. Практически во всех испытаниях кольцеобразные трещины возникали за пределами области контакта. Поскольку диаметр области контакта существенно меньше размеров образцов, стеклянные образцы рассматривались в качестве упругого полупространства. Для определения поля контактных напряжений в зоне разрушения использовалось решение Губера задачи Герца о вдавливании шара в упругое полупространство.

Для моделирования контактного разрушения образцов второй серии применялись локальный критерий максимальных напряжений и нелокальные критерии разрушения (критерий средних напряжений, критерий Нуизмера и градиентный критерий). Для вычисления параметров, входящих в нелокальные критерии разрушения, экспериментально на

балках без надреза и с надрезом определялись предельное растягивающее напряжение и критический коэффициент интенсивности напряжений стекла.

Показано, что среди рассмотренных критериев разрушения наиболее близкие к экспериментальным данным значения радиуса кольцеобразной трещины позволяет получить градиентный критерий. Значения предельного растягивающего напряжения, полученные с использованием этого критерия, превышают значения, полученные при изгибе балок, что можно объяснить влиянием масштабного фактора.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hertz Н.** Über die Berührung fester elastischer Körper // *Z. angew. Math.* 1881. Bd 92. S. 156–171.
2. **Huber М. Т.** Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper // *Ann. Physik.* 1904. Bd 14. S. 153–163.
3. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
4. **Argon А. S., Hori Y., Orowan E.** Indentation strength of glass // *J. Amer. Ceramic Soc. Ceramic Abstr.* 1960. V. 43, N 2. P. 86–96.
5. **Wilshaw Т. R.** The Hertzian fracture test // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1971. V. 4. P. 1567–1581.
6. **Колесников Ю. В.** Механика контактного разрушения / Ю. В. Колесников, Е. М. Морозов. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
7. **Fischer-Cripps А. С.** Introduction to contact mechanics. N. Y.: Springer, 2007.
8. **Батанова О. А., Матвиенко Ю. Г.** Закономерности образования трещин при скалывании кромки образца и индентировании хрупких материалов // *Физ. мезомеханика.* 2015. Т. 18, № 2. С. 22–36.
9. **Новоселов А. Н., Леган М. А.** Образование кольцевых трещин в стекле при контактном взаимодействии // *Наука. Промышленность. Оборона: Тр. 17-й Всерос. науч.-техн. конф., Новосибирск, 20–22 апр. 2016 г.: В 4 т. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2016. Т. 1. С. 151–156.*
10. **Новоселов А. Н., Леган М. А.** Формирование кольцевых трещин в стекле в результате контактного взаимодействия // *Проблемы оптимального проектирования сооружений: Сб. докл. 4-й Всерос. конф., Новосибирск, 11–13 апр. 2017 г. Новосибирск: Новосиб. гос. арх.-строит. ун-т (Сибстрин), 2017. С. 201–209.*
11. **Браун У.** Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации / У. Браун, Дж. Строули. М.: Мир, 1972.
12. **Леган М. А.** Хрупкое разрушение элементов конструкций с концентраторами напряжений // *Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика.* 2013. Т. 13, вып. 3. С. 70–76.
13. **Whitney J. M., Nuismer R. J.** Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations // *J. Composite Materials.* 1974. V. 8, N 3. P. 253–265.
14. **Леган М. А.** О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // *ПМТФ.* 1993. Т. 34, № 4. С. 146–154.
15. **Леган М. А.** Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода // *ПМТФ.* 1994. Т. 35, № 5. С. 117–124.

*Поступила в редакцию 1/VI 2017 г.,
в окончательном варианте — 16/X 2017 г.*