ПМТФ, № 6, 1965

О ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ

Ю. А. Березин

(*Новосибирск*)

Изучена структура плоской ударной волны произвольной силы, распространяющейся в горячей разреженной плазме поперек магнитного поля. Рассмотрен также вопрос о распространении при указанных условиях нестационарных волн конечной, но малой амплитуды.

Волны конечной амплитуды в холодной разреженной плазме изучены достаточно полно. Профиль таких волн формируется под влиянием нелинейных и дисперсионных эффектов, причем последние обусловливаются инерцией электронов и анизотропией плазмы. Если учесть газокинетическое давление плазмы, то появляются дисперсионные эффекты, связанные с тем, что ларморовский радиус ионов имеет конечную величину. Рассмотрение стационарных волн малой, но конечной амплитуды, распространяющихся поперек магнитного поля в горячей плазме (когда газокинетическое давление p сравнимо с магнитным давлением $H^2/8\pi$), проведено в работах [1,2]. В [1] найдена уединенная волна разрежения, получающаяся в горячей плазме вместо волны сжатия, характерной для холодной плазмы, а также приведены качественные соображения относительно структуры ударной волны. В [2] изучается ударная волна слабой амплитуды с учетом конечной величины ларморовского радиуса ионов. В настоящей работе исследуется структура ударных волн произвольной силы, которые распространяются поперек магнитного поля в достаточно горячей разреженной плазме, а также рассматриваются нестационарные волны конечной, но малой амплитуды, которые возбуждаются в плазме «магнитным поршнем», действовавшим в течение ограниченного промежутка времени.

Обозначения

p — газокинетическое давление;
H — магнитное поле;
u, v — макроскопические скорости по осям x и y;
ρ — плотность;
m_e (m_i) — масса электрона (иона);
σ — проводимость плазмы;
$\Omega_н$ — ионная циклотронная частота;
V_A — альфвеновская скорость;
c — скорость света;
γ — показатель адиабаты;
V — удельный объем;
ω_{0e} (ω_{0i}) — электронная (ионная) плазменная частота;
s_0 — скорость звука.

1. Основные уравнения. Исходная система уравнений состоит из уравнений движения электронной и ионной компонент плазмы, уравнений непрерывности и уравнений Максвелла. Плазма предполагается квазинейтральной. В уравнения движения введем газокинетическое давление, которое будет иметь тензорный характер, связанный с тем, что распределение ионов не обладает сферической симметрией. Будем считать движение одномерным, т. е. все величины зависят только от координаты x и времени t. Магнитное поле направлено по оси z. Запишем основную систему уравнений в виде законов сохранения массы, импульса (по осям x и y), энергии и магнитного потока

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \qquad (\rho = \rho_i + \rho_e)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{p + \frac{H^2}{8\pi} + \rho u^2 - \frac{p_i}{2\Omega_н}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c m_e p_i}{8\pi e \Omega_н}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u v + \frac{p_i}{2\Omega_н}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{p}{\gamma-1}+\frac{H^2}{8\pi}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)+\frac{1}{2}\frac{m_i m_e c^2}{(4\pi e)^2\rho_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right\}+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\left\{u\left[\frac{\gamma p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)+\frac{1}{2}\frac{m_i m_e c^2}{(4\pi e)^2\rho_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\right.\right. \\ \left.+\frac{H^2}{4\pi}-\frac{p_i}{2\Omega_H}\frac{\partial}{\partial x}\left(v-\frac{cm_e}{4\pi e\rho}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right]+\frac{p_i}{2\Omega_H}\left(v-\frac{cm_e}{4\pi e\rho}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}- \\ \left.-\frac{m_i m_e c^2}{(4\pi e)^2}H\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}H\frac{\partial H}{\partial x}\right\}=0\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uH)-\frac{m_i m_e c^2}{4\pi e^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x}\right)=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

$$v=\frac{1}{\rho}(\rho_i v_i+\rho_e v_e),\quad p=p_i+p_e,\quad \Omega_H=\frac{eH}{m_i c}$$

Здесь ρ — плотность плазмы, u — x-компонента макроскопической скорости, v — y-компонента скорости, p — давление, σ — проводимость плазмы, которую будем считать постоянной.

Если проводимость плазмы велика, то уравнения состояния электронного и ионного газов будут мало отличаться от адиабатических с эффективным показателем адиабаты $\gamma=2$ (поскольку рассматриваются движения поперек магнитного поля). Поэтому с достаточной степенью точности можно положить $p_i=\alpha p$, где $\alpha=\mathrm{const}$ — отношение давления ионного газа к полному давлению плазмы.

Для нахождения закона дисперсии волн, как обычно, линеаризуем систему уравнений (1.1) и будем искать решение в виде плоских волн, в результате чего получаем

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2=s_0^2+V_A^2\left\{\frac{1}{1+c^2k^2/\omega_{0e}^2}+\left(\frac{c}{\omega_{0i}}\right)^2\left(\frac{2\pi\alpha p_0}{H_0^2}\right)^2k^2\right\}$$

$$s_0=\sqrt{2p_0/\rho_0},\quad V_A=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}},\quad \omega_{0e}=\sqrt{4\pi\rho_0 e^2/m_i m_e}$$

$$\omega_{0i}=\sqrt{4\pi\rho_0 e^2/m_i^2} \tag{1.2}$$

где p_0 и ρ_0 — невозмущенные давление и плотность плазмы соответственно, s_0 — скорость звука.

Если газокинетическое давление ионов достаточно мало по сравнению с магнитным, то в выражении (1.2) в фигурных скобках преобладает первый член, обусловливающий отрицательную дисперсию (фазовая скорость малых возмущений убывает с уменьшением длины волны); в этом случае, как известно, характерный линейный размер стационарных волн сжатия порядка c/ω_{0e}. Если же газокинетическое давление ионов достаточно велико (горячая плазма), то имеет место положительная дисперсия (фазовая скорость малых колебаний возрастает с уменьшением длины волны); в этом случае, как видно из выражения (2.2), характерный размер стационарных волн разрежения порядка

$$\frac{c}{\omega_{0i}}\frac{2\pi\alpha p_0}{H_0^2}\gg\frac{c}{\omega_{0e}}$$

Таким образом, в горячей плазме дисперсионные эффекты в основном обусловлены конечной величиной ларморовского радиуса, а не инерцией электронов.

Приведем систему уравнений (1.1) к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{V}+\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{u}{V}=0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{u}{V}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{p+\frac{1}{2}h^2+\frac{u^2}{V}-\frac{\alpha p}{2h}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v-\beta^2 V\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{v}{V}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{uv}{V}+\frac{\alpha p}{2h}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{p+\frac{1}{2}h^2+\frac{u^2+v^2}{2V}+\frac{1}{2}\beta^2 V\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)^2\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{u\left[2p+\frac{u^2+v^2}{2V}+h^2+\frac{1}{2}\beta^2 V\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)^2-\frac{\alpha p}{2h}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v-\beta^2 V\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha p}{2h}\left(v-\beta^2 V\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\omega_{0i}^2}{4\pi\Omega_H\sigma}h\frac{\partial h}{\partial \xi}-\beta^2 h\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+u\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(V\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\right\}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \xi}(uh)-\beta^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+u\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(V\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)=\frac{\omega_{0i}^2}{4\pi\Omega_H\sigma}\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}$$

$$\xi=\frac{x\omega_{0i}}{c},\qquad h=\frac{H}{H_0},\qquad V\ \beta^2=\frac{\rho_0}{\rho},\qquad \beta^2=\frac{m_e}{m_i},\qquad \tau=\frac{V_A\omega_{0i}}{c}t$$

Здесь скорости и давление нормированы на альфвеновскую скорость V_A и величину $\rho_0 V_A^2$ соответственно, и для этих величин оставлены прежние обозначения.

2. Стационарные движения. Рассмотрим на основании системы уравнений (1.3) стационарные движения плазмы, для чего перейдем, как обычно, в систему координат, связанную с волной, движущейся с постоянной скоростью. В этой системе координат плазма движется в положительном направлении оси x. Для стационарных движений имеем уравнения

$$u=jV$$

$$p+\frac{1}{2}h^2+j^2V-\frac{\alpha p}{2h}\frac{d}{d\xi}\left(v-\beta^2 V\frac{dh}{d\xi}\right)=C_1$$

$$uv+\frac{\alpha p V}{2h}\frac{du}{d\xi}=0$$

$$u\left[2p+\frac{u^2+v^2}{2V}+h^2+\frac{1}{2}\beta^2 V\left(\frac{dh}{d\xi}\right)^2-\frac{\alpha p}{2h}\frac{d}{d\xi}\left(v-\beta^2 V\frac{dh}{d\xi}\right)-\right.$$
$$\left.-\beta^2 h\frac{d}{d\xi}\left(V\frac{dh}{d\xi}\right)\right]+\frac{\alpha p}{2h}\left(v-\beta^2 V\frac{dh}{d\xi}\right)\frac{du}{d\xi}-\frac{\omega_{0i}^2}{4\pi\Omega_H\sigma}h\frac{dh}{d\xi}=jC_2 \tag{2.1}$$

$$u\left[h-\beta^2\frac{d}{d\xi}\left(V\frac{dh}{d\xi}\right)\right]-\frac{\omega_{0i}^2}{4\pi\Omega_H\sigma}\frac{dh}{d\xi}=j$$

$$j=\mathrm{const},\qquad C_1=p_0+{}^1/_2+j^2,\qquad C_2=2p_0+{}^1/_2 j+1$$

Здесь j — поток вещества.

Для удобства дальнейшего анализа преобразуем систему уравнений (2.1) к уравнениям, разрешенным относительно первых производных, чтобы получить поле направлений. Будем считать плазму достаточно горячей ($8\pi p\ /\ H^2 \gg m_e\ /\ m_i$), что позволит пренебречь инерцией электронов. Тогда система уравнений (2.1) принимает вид

$$\frac{dV}{d\xi} = -\frac{2h}{\alpha p} v$$

$$\varkappa \frac{dh}{d\xi} = Vh - 1 \quad \left(\varkappa = \frac{\omega_{0i}^2}{4\pi \Omega_H \sigma_j}\right), \qquad \frac{dv}{d\xi} = \frac{2h}{\alpha p}\left(p + \frac{1}{2} h^2 + j^2 V - C_1\right) \tag{2.2}$$

$$p = V^{-1} \{C_2 - h + {}^1/_2 v^2 - (C_1 - {}^1/_2 j^2 V - {}^1/_2 h^2) V\} \tag{2.3}$$

Равновесные состояния 1 (перед фронтом волны) и 2 (за фронтом волны) определяются особыми точками уравнений (2.2). Приравнивая нулю правые части этих уравнений, получим:

в невозмущенном состоянии (перед фронтом)

$$v = v_1 = 0, \quad V = V_1 = 1, \quad h = h_1 = 1 \tag{2.4}$$

в возмущенном состоянии (за фронтом)

$$v = v_2 = 0, \qquad h = h_2 = V_2^{-1}, \qquad V = V_2 = \frac{2(1 + 2p_0) + j^2}{3j^2} \tag{2.5}$$

Если $j^2 < 1 + 2p_0$, то $V_2 > 1$, и не существует волны, связывающей два различных состояния (такая волна должна была бы быть волной разрежения). В этом случае стационарным решением является уединенная волна, найденная в [1], которая соединяет два одинаковых состояния. Заметим, однако, что в [1] основное уравнение, описывающее стационарную волну, приведено для случая $\gamma \neq 2$, хотя при движениях бесстолкновительной плазмы поперек магнитного поля $\gamma = 2$, и поэтому нельзя непосредственно перейти от результатов работы [1] к интересующему нас случаю. При малых амплитудах нетрудно получить

$$\begin{gathered} h = 1 - |\psi_{\max}| \operatorname{sch}^2 \left\{\frac{s}{\alpha p_0} \sqrt{|\psi_{\max}|} (\xi - w\tau)\right\} \\ \psi = h - 1 \ll 1, \quad w = s(1 - {}^1/_2 |\psi_{\max}|), \quad s = \sqrt{1 + 2p_0} \end{gathered} \tag{2.6}$$

где w — скорость уединенной волны. Уединенная волна является волной разрежения, и ее скорость меньше скорости звука. Если $j^2 > 1 + 2p_0$ (скорость волны больше скорости звука s), то $V_2 < 1$, и имеет место ударная волна, которая соединяет два поступательных потока плазмы с различными значениями параметров и распространяется без изменения своего профиля с некоторой постоянной скоростью. В дальнейшем уделим основное внимание структуре ударной волны, т. е. случаю $j > 1 + 2p_0$.

Исследуем особые точки системы уравнений (2.2). Для этого линеаризуем уравнения (2.2) вблизи особых точек, считая отклонения всех величин от значений (2.4), (2.5) малыми, т. е. полагаем

$$V = V_{1,2}(1 + \varphi), \qquad h = h_{1,2}(1 + \psi) \tag{2.7}$$

где $\psi, \varphi \ll 1$. Оставляя величины первого порядка малости, получим

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{2h_{1,2}}{\alpha A_1 V_{1,2}} v, \qquad \varkappa h_{1,2} \frac{d\psi}{d\xi} = \varphi + \psi \\ \frac{dv}{d\xi} = \frac{2h_{1,2}}{\alpha A_1} [(j^2 V_{1,2} - A_2)\varphi + h_{1,2}^2 \psi] \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= h_{1,2}[C_2 - h_{1,2} - (C_1 - j^2 V_{1,2} - {}^1/_2 h_{1,2}^2) V_{1,2}] \\ A_2 &= h_{1,2}(C_2 - h_{1,2} - {}^1/_2 j^2 V_{1,2}^2) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Предполагая зависимость $\varphi, \psi, v \sim \exp(\mu\xi)$, получим характеристическое уравнение

$$\varkappa h_{1,2}\mu^3 - \mu^2 + \left(\frac{2h_{1,2}}{\alpha A_1}\right)^2 \frac{j^2 V_{1,2} - A_2}{V_{1,2}} \varkappa h_{1,2}\mu -$$

$$- \left(\frac{2h_{1,2}}{\alpha A_1}\right)^2 h_{1,2}(j^2 V_{1,2} - A_2 - h_{1,2}^2) = 0 \qquad (2.10)$$

Проводимость плазмы считается достаточно большой, поэтому корни уравнения (2.10) можно искать в виде ряда по степеням $\varkappa$, т. е.

$$\mu = \mu^{(0)} + \varkappa\mu^{(1)} + \ldots \qquad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.10), найдем корни характеристического уравнения

$$\mu = \pm \frac{2h_{1,2}}{\alpha A_1}\left(\frac{h_{1,2}^2 + A_2 - j^2 V_{1,2}}{V_{1,2}}\right)^{1/2} + \frac{2\varkappa}{(\alpha A_1 V_{1,2}^3)^2} \qquad (2.12)$$

Третий корень равен

$$\mu = \frac{1}{\varkappa h_{1,2}} - \frac{4\varkappa}{(\alpha A_1 V_{1,2}^3)^2} \gg 1 \qquad (2.13)$$

Для возмущенного состояния корни характеристического уравнения вещественны, различны и два из них имеют разный знак; поэтому особая точка, соответствующая возмущенному состоянию, является обобщенным седлом (см. [3]), и интегральная кривая при достаточно больших положительных ξ входит в особую точку $V = V_2$, $h = h_2$, $v = 0$. Для невозмущенного состояния корни (2.12) равны

$$\mu = \pm i \frac{2}{\alpha p_0} \sqrt{j^2 - 1 - 2p_0} + \frac{2\varkappa}{(\alpha p_0)^2} \qquad (2.14)$$

Вещественные части корней отличны от нуля и имеют одинаковый знак. Поэтому при отрицательных ξ особая точка $V = h = 1$, $v = 0$, соответствующая невозмущенному состоянию плазмы перед ударной волной, является обобщенным узлом, и интегральные кривые асимптотически приближаются к рассматриваемой особой точке, «закручиваясь» вокруг нее.

Если перейти к случаю идеальной плазмы ($\sigma = \infty$, $\varkappa = 0$), то корни характеристического уравнения для невозмущенного состояния будут чисто мнимыми

$$\mu = \pm i \frac{2}{\alpha p_0} \sqrt{j^2 - 1 - 2p_0}$$

Как следует из теории дифференциальных уравнений [3], особая точка при наличии мнимых корней может быть как центром (интегральные кривые являются замкнутыми кривыми, окружающими особую точку и не проходящими через нее), так и фокусом (интегральные кривые «закручиваются» вокруг особой точки, приближаясь к ней асимптотически). Для выяснения типа особой точки в этом случае нужно учесть члены следующего порядка малости, которые нами при получении системы (2.8) были отброшены. Тогда нужные нам уравнения (для идеальной плазмы) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\alpha p_0 \frac{d\varphi}{d\xi} = -v, \qquad \frac{1}{2}\alpha p_0 \frac{dv}{d\xi} = (j^2 - 1 - 2p_0)\varphi + f(\varphi^2, \varphi^3, \ldots, v^2) \qquad (2.15)$$

где функция f содержит члены порядка φ^2, φ^3, ..., и v^2. Уравнения

(2.15) симметричны относительно оси φ (или V), т. е. они инвариантны относительно преобразования $\xi \to -\xi$, $v \to -v$. Поэтому, согласно теореме Пуанкаре [3], особая точка $V = 1$ ($\varphi = 0$), $v = 0$, соответствующая невозмущенному состоянию идеальной плазмы, является центром. Отсюда следует, что в случае плазмы с бесконечной проводимостью интегральная кривая, вышедшая из особой точки, соответствующей возмущенному состоянию, никогда не достигает особой точки, соответствующей невозмущенному состоянию. В идеальной плазме имеется, таким образом, бесконечный цуг незатухающих периодических волн; такую структуру, естественно, нельзя назвать ударной волной, как это сделано в [2].

Если $\sigma \neq \infty$ ($\varkappa \neq 0$), то амплитуда периодических волн будет затухать по мере продвижения в сторону невозмущенной плазмы (при $\xi \to -\infty$). Такая структура является ударной волной, соединяющей два различных состояния, причем область ударного перехода (точнее — передний фронт) имеет осцилляторную структуру, так что качественно ударная волна в горячей плазме похожа на ударную волну в бесстолкновительной холодной плазме, распространяющуюся под углом к магнитному полю, что отмечается в [1].

Рассмотрим структуру ударной волны вблизи равновесных состояний $V = h = 1$, $v = 0$ и $V = V_2$, $h = V_2^{-1}$, $v = 0$ на основании линеаризованной системы (2.8). Вблизи невозмущенного состояния профиль ударной волны начинается с малых осцилляций, амплитуда которых постепенно нарастает. Для этой части профиля (при $\xi < 0$) можно написать

$$h(\xi) = 1 + Ce^{\delta\xi} \cos k\xi$$

$$V(\xi) = 1 + C \frac{(\varkappa\delta - 1)\cos k\xi + \varkappa k \sin k\xi}{(\varkappa\delta - 1)^2 + \varkappa^2 k^2} e^{\delta\xi}$$

$$v(\xi) = -{}^1/_2 \alpha p_0 C (\delta \cos k\xi - k \sin k\xi) e^{\delta\xi} \tag{2.16}$$

$$C = \text{const}, \quad \delta = \frac{2\varkappa}{(\alpha p_0)^2}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi \alpha p_0}{\sqrt{j^2 - 1 - 2p_0}}$$

Здесь δ — инкремент нарастания амплитуды осцилляций, λ — длина волны осцилляций. Отсюда видно, что при увеличении невозмущенного давления затухание существенно проявляется на большей длине и линейный размер осцилляций возрастает. Заметим, что величина затухания определяется лишь проводимостью и давлением и не зависит от скорости ударной волны, в то время как размер осцилляций существенно зависит от скорости ударной волны, будучи при $j^2 \gg 1 + 2p_0$ обратно пропорциональным этой скорости. Вблизи равновесного возмущенного состояния (при $\xi > 0$) профиль ударной волны описывается формулами

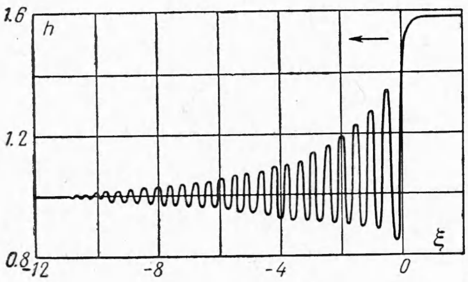
$$V(\xi) = V_2 \{1 + C(1 - \varkappa\mu h_2) e^{\mu\xi}\}, \qquad h(\xi) = h_2 (1 - Ce^{\mu\xi})$$

$$v(\xi) = -\frac{\alpha A_1}{2h_2} C\mu V_2 (1 - \varkappa\mu h_2) e^{\mu\xi} \tag{2.17}$$

Здесь $C > 0$ — произвольная постоянная, A_1 определяется выражением (2.9), а μ — выражением (2.12) со знаком минус при первом члене.

Полная структура ударной волны произвольной силы может быть найдена решением системы уравнений (2.2). Эта система была решена численно, причем в качестве начальных условий выбирались значения удельного объема V, магнитного поля h и поперечной скорости v, вычисленные по формулам (2.17) при некотором достаточно большом положительном $\xi = \xi_0$. Таким образом, решение системы (2.2) проводилось от точки ξ_0, близкой к равновесному возмущенному состоянию, до точки

$\xi = \xi_{\max}$, где амплитуды искомых функций приближались достаточно близко к значениям, соответствующим невозмущенному равновесному состоянию. На фигуре в качестве примера приведен профиль ударной волны для следующих значений параметров: $p_0 = 0.4$, $j = 2$, $\alpha = 0.5$.



В этом случае полная длина области ударного перехода составляет примерно 10 c / ω_{0i}. С ростом невозмущенного давления ионов эта область растягивается и линейный размер осцилляций увеличивается.

3. Нестационарные волны. Теперь рассмотрим нестационарные волны конечной, но малой амплитуды, распространяющиеся в горячей идеальной плазме поперек магнитного поля. Для слабых волн, полагая $V = 1 + \varphi$, $h = 1 + \psi$ $(\varphi, \psi \ll 1)$ и удерживая в уравнениях (1.3) члены до второго порядка малости включительно по отклонениям от невозмущенных значений аналогично тому, как это сделано в [4] для волн в холодной плазме, получим уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + s\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{3}{2}s\psi\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{1}{2s}\left[\beta^2 - \left(\frac{\alpha p_0}{2}\right)^2\right]\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} = 0 \qquad (3.1)$$

Если перейти к случаю холодной плазмы ($p_0 \to 0$), то $s \to 1$ и уравнение (3.1) с точностью до обозначений будет совпадать с уравнением (2.34) работы [4]. При помощи замены переменных

$$\eta = \left(\frac{2s}{\nu}\right)^{1/3}(\xi - s\tau), \quad \nu = \beta^2 - \left(\frac{\alpha p_0}{2}\right)^2, \quad f = 3\left(\frac{s^4}{4\nu}\right)^{1/3}\psi \qquad (3.2)$$

уравнение (3.1) приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} + f\frac{\partial f}{\partial\eta} + \frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3} = 0 \qquad (3.3)$$

Для этого уравнения в [4] было найдено решение, дающее асимптотическое поведение волн конечной, но малой амплитуды, которые возбуждаются «магнитным поршнем», действовавшим на границе плазма — вакуум в течение ограниченного промежутка времени. Такое же решение имеет место и для волн в горячей плазме. Если пренебречь инерцией электронов, то на рассматриваемый случай переносятся формулы, полученные в [4] для волн, распространяющихся в холодной плазме под углом θ к магнитному полю, причем роль характерного линейного масштаба волн будет играть величина $(c / \omega_{0i})(2\pi\alpha p_0 / H_0^2)$ вместо $c\theta / \omega_{0i}$.

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева и Н. Н. Яненко — за обсуждение работы, а также Р. Н. Макарову — за помощь в численных расчетах.

Поступила 15 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. Стационарные нелинейные волны в плазме конечной температуры. ПМТФ, 1964, № 6.
2. Патарая А. Д. Структура слабых ударных волн с учетом ларморовского радиуса иона. Ж. техн. физ., 1965, т. 35, № 2.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
4. Березин Ю. А., Карпман В. И. К теории нестационарных волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 46, № 5.