

## ЭФФЕКТЫ САМООРГАНИЗАЦИИ В РАЗРЯДЕ СВЕТОВОГО ГОРЕНИЯ ?

УДК 533.915:536.75

О. В. Климов, А. А. Тельнихин

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул

Квазиравновесная плотная плазма разряда при атмосферном давлении и температуре  $T \sim 1$  эВ, поддерживаемая излучением неодимового лазера, является объектом интенсивного изучения и используется для всевозможных практических целей в технике [1, 2]. Впервые разряд светового горения был получен в [3]. Дальнейшие исследования показали, что разряд имеет пороговый характер, связанный с интенсивностью излучения  $I_c$  ( $I_c \approx 10$  МВт/см<sup>2</sup>). При  $I > I_c$  фронт разряда движется вдоль светового канала со скоростью порядка десятков метров в секунду в обе стороны от фокуса. Плазма разряда оптически прозрачна (коэффициент поглощения  $\mu \sim 10^{-2}$  см<sup>-1</sup>), ее параметры (температура и плотность) в среднем постоянны во времени и однородны (в пределах светового канала) по пространству. Средняя плотность электронов в плазме  $n_e \sim 2 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>, а давление выравнено в пространстве вследствие дозвукового режима распространения. Скорость фронта волны разряда зависит от интенсивности внешнего источника и при превышении пороговой  $I_c$  в несколько раз увеличивается по закону  $V_f \propto \sqrt{I}$ . В области порога наблюдаются интересные эффекты, связанные с флуктуациями скорости фронта порядка  $\Delta V_f \sim 1 \div 2$  м/с. При этом профиль фронта вплоть до полной остановки почти не изменяет своей формы. Выполненные в [4] измерения температуры и плотности также указывают на сложный характер движений в плазме разряда, отражающийся в макроскопических флуктуациях параметров разряда.

Первая теоретическая модель разряда была предложена Ю. П. Райзером [1]. В этой модели, как и в последующих [2], использована аналогия между горением бикфордова шнура и движением разряда. В рамках данной модели, описываемой одномерным нелинейным уравнением теплопроводности, получена правильная зависимость скорости фронта от интенсивности излучения.

В настоящей работе при описании свойств светового разряда исходим из уравнений газовой динамики, в которых учтены существенные негидродинамические механизмы переноса энергии: теплопроводность и излучение. Пренебрегая расходимостью светового пучка и учитывая оптическую прозрачность плазмы, считаем, что канал имеет цилиндрическую симметрию, а поток излучения не меняется при углублении в плазму. Также полагаем, что основным механизмом потерь энергии является собственное излучение плазмы (это верно при достаточно большой ширине пучка  $d (> 0,1$  см) [1, 2]).

**1. Основные уравнения модели разряда.** При описании свойств разряда исходим из уравнений гидродинамики для полей плотности  $\rho$ , скорости  $\mathbf{V}$  и температуры  $T$ :

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho(\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}) = -\nabla p, \quad T_t + \mathbf{V} \nabla T = F + D \Delta T. \quad (1.1)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $p$  — давление;

$$F = (\mu I - \Phi)/(c_p \rho), \quad D = \kappa/(c_p \rho) \quad (1.2)$$

( $\Phi$  — плотность потока энергии собственного излучения плазмы,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $\kappa$  — теплопроводность). Пусть разряд распространяется вдоль оси  $z$ . Тогда из (1.1) следует, что установившееся движение фронта разряда подчиняется

следующим уравнениям:

$$\rho_0 V_z = 0, \quad V_f T_z = F + DT_{zz}. \quad (1.3)$$

Из теории автоволн [5] известно, что уравнения (1.3) с нелинейной функцией  $F(T)$  и монотонно меняющейся первой производной Фреше  $\partial F/\partial T$  имеют решение в виде фронта без осцилляций:

$$V_f \propto \sqrt{\nu D}, \quad (1.4)$$

где

$$\nu = \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{T=T_0, \rho=\rho_0}; \quad (1.5)$$

$$F(T_0, \rho_0) = \frac{\mu(T_0, \rho_0)I - \Phi(T_0, \rho_0)}{c_p \rho_0} = 0 \quad (1.6)$$

( $T_0, \rho_0$  — невозмущенные температура и плотность в разряде).

При исследовании на устойчивость в системе координат, связанной с разрядом, представим решения в виде

$$T = T_0 + \delta T, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad \mathbf{V} = \mathbf{e}_z V \quad (1.7)$$

( $\delta T, \delta \rho$  — малые возмущения:  $\delta \rho/\rho_0 \ll 1, \delta T/T_0 \ll 1$ ). Вводя параметр малости  $\varepsilon \approx V/c \ll 1$  ( $c$  — скорость звука), будем удерживать в уравнениях лишь члены второго порядка малости относительно  $\varepsilon$ . Считая возмущения адиабатическими ( $\omega \gg k^2 D, \omega, k$  — характерные частоты и волновые числа возмущений), функцию  $p$  запишем как

$$p = p_0 + c^2 \delta \rho + \frac{1}{2} (\gamma - 1) c^2 \rho_0 \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^2 + \rho_0 c^2 \beta \delta T \quad (1.8)$$

( $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения). Подставив в (1.1) решения в форме (1.7) и учитывая (1.8), получим основные уравнения модели в приближении Буссинеска ( $\delta \rho/\rho_0 \sim \varepsilon, \delta T/T_0 \sim \varepsilon^2$ ):

$$\begin{aligned} \delta \rho_t + \rho_0 V_z &= -(\delta \rho V)_z, \\ V_t + \frac{c^2}{\rho_0} \delta \rho_z &= -\frac{1}{2} (\gamma - 1) c^2 \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)_z^2 - \frac{1}{2} (V^2)_t - c^2 \beta \delta T_z, \\ \delta T_t &= \nu \delta T + D \Delta \delta T. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по  $z$ , а второе по  $t$ , находим

$$(V_t + cV_z)(V_t - cV_z) = -\frac{1}{2} \left[ V^2 + (\gamma - 1) c^2 \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^2 \right]_{zt} + \frac{c^2}{\rho_0} (\delta \rho V)_{zz} - c^2 \beta (\nu \delta T + D \Delta \delta T)_z. \quad (1.10)$$

Решения уравнения (1.10) будем искать в виде квазипростых волн [6]. Тогда в левой части (1.10) можно с должной точностью сделать замену  $\partial/\partial t - c\partial/\partial z = -2c\partial/\partial z$ , а в правой положить  $\partial/\partial t = c\partial/\partial z$  и  $\delta \rho/\rho_0 = V/c, \delta T/T_0 = (\gamma - 1)V/c$ . После выполнения этих преобразований и перехода к системе отсчета, движущейся со скоростью  $c$  относительно среды, уравнение (1.10) принимает более простую форму:

$$V_t = \frac{1}{2} \beta T_0 (\gamma - 1) (\nu + D \Delta) - \frac{2 - \gamma}{2} V V_z. \quad (1.11)$$

Здесь описана волна, бегущая в положительном направлении вдоль оси  $z$ ; нелинейные и диссипативные члены одного порядка величины;  $t$  — «медленное» время ( $t \rightarrow t - z/c$ ).

**2. Устойчивость линеаризованной системы.** Запишем уравнение (1.11) в виде

$$V_t = L(\lambda)V + h(V, \lambda), \quad (2.1)$$

где  $L = (1/2)(\gamma - 1)\beta T_0(\nu + D\Delta)$  — линейный оператор, действующий в пространстве, в котором определена функция  $V(\mathbf{r}, t)$ ; член  $h(V, \lambda)$  учитывает нелинейность правой части уравнения (1.11);  $\lambda$  отражает зависимость решения от параметров задачи  $(\nu, D)$ .

Обратимся вначале к поиску решений линейной вспомогательной задачи

$$V_t = L(\lambda)V. \quad (2.2)$$

Поскольку система (2.1) автономна, уравнение (2.2) допускает решения вида

$$V = u(\mathbf{r}) \exp(\lambda t). \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и используя явный вид оператора  $L$  в цилиндрической системе координат, имеем

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u = -K^2 u \quad \left( K^2 = \frac{1}{D} \left( \nu - \frac{2\lambda}{(\gamma - 1)\beta T_0} \right) \right). \quad (2.4)$$

Это уравнение, дополненное соответствующими краевыми условиями, определяет задачу на собственные значения. Например, для случая аксиальной симметрии с граничным условием  $u(r) = 0$  при  $r = r_0$  ( $r_0$  — радиус светового пучка) из (2.4) легко получить следующие собственные функции и собственные значения:

$$u = J_0(k_{\perp} r) \exp(ik_z z), \quad k_{\perp} \approx 2,40/r_0, \quad \lambda = (1/2)(\gamma - 1)\beta T_0(\nu - (k_{\perp}^2 + k_z^2)D). \quad (2.5)$$

Здесь  $J_0(k_{\perp} r)$  — функция Бесселя;  $k_z$  — волновое число.

Итак, решение линеаризованной задачи (2.2) есть

$$V(\mathbf{r}, t) = au(\mathbf{r}) \exp(\lambda t), \quad (2.6)$$

где  $u$  и  $\lambda$  определяются выражениями (2.5);  $a$  — постоянная. Легко заметить, что характер решения существенно зависит от собственного значения параметра  $\lambda$  (или, что то же самое, от управляющего параметра  $\nu$ ). При  $\nu \geq k^2 D$  в системе возникает неустойчивость; критическая точка

$$\nu_c = (k_{\perp}^2 + k_z^2)_c D, \quad \lambda_c = 0 \quad (2.7)$$

соответствует режиму, промежуточному между асимптотической устойчивостью и неустойчивостью системы, и определяет пороговое условие существования разряда. Важно отметить, что ввиду (2.5), (2.7) неустойчивая мода  $k_c$  целиком определяется системными параметрами и характеризует пространственную длину возмущения стационарного решения. Таким образом, имеем механизм генерации собственной длины волны в первоначально однородной системе. Можно ожидать, что при  $\lambda > \lambda_c$  это возмущение будет определять основные свойства системы [7].

**3. Эволюция нелинейной системы.** Вернемся к анализу динамики системы, описываемой нелинейным уравнением (2.1). Ограничимся в дальнейшем случае бифуркации решений вблизи критической точки  $\lambda_c$  (2.7). Из общих результатов теории самоорганизации [7], так как в нашем случае выполнено условие

$$\left. \frac{d}{d\nu} \lambda(\nu) \right|_{\lambda=\lambda_c} = (1/2)(\gamma - 1)\beta T_0 \neq 0,$$

следует, что решения, возникающие при  $\lambda \geq \lambda_c$ , являются устойчивыми и стационарными.

Это означает, что нужно найти решения уравнения

$$L(\lambda)V + h(V, \lambda) = 0, \quad h(V) \equiv -\frac{2-\gamma}{2} VV_z. \quad (3.1)$$

Учитывая характер нелинейности, будем искать решение (3.1) в виде ряда по параметру малости  $\varepsilon$ :

$$V = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 \exp(ik_z z) + \dots + \text{к. с.}, \quad (3.2)$$

где, согласно (2.6), следует положить

$$V_1 = a(t)J_0(k_\perp r) \exp(ik_z z) \quad (3.3)$$

( $a(t)$  — неизвестная функция, зависящая от времени). Подстановка ряда (3.2) вместе с (3.3) дает возможность определить  $V_2$ :

$$V_2 = -(2(2-\gamma)/3(\gamma-1)\beta T_0)a^2(t)J_0^2(k_\perp r)ik_z \exp(2ik_z z). \quad (3.4)$$

Используя в уравнении (2.1) разложение (3.2) вместе с (3.3), (3.4), находим уравнение, определяющее функцию  $a(t, R)$ :

$$a_t + \lambda_0(R-1)a - \sigma a^3 = 0. \quad (3.5)$$

Здесь

$$\lambda_0 = (1/2)(\gamma-1)\beta T_0\nu_c, \quad R = \nu/\nu_c, \quad \sigma = (2-\gamma)^2 \langle J_0^2 \rangle / 3D(\gamma-1)\beta T_0, \quad (3.6)$$

$$\langle J_0^2 \rangle = \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} J_0^2(k_\perp r) r dr = \frac{1}{2} J_1^2(k_\perp r_0).$$

Уравнение (3.5) с параметрами (3.4) имеет хорошо известное решение и описывает надкритическую бифуркацию системы. При  $R > 1$  это уравнение допускает два решения:

$$a_s(R) = \pm \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sigma}} (R-1), \quad (3.7)$$

которые являются асимптотически устойчивыми и осуществляются через характерное время  $\tau \approx (1/2)\lambda_0(R-1)$ . Математическим отражением качественного поведения системы, обусловленного бифуркацией в точке  $R_c = 1$ , является особенность, приводящая к неаналитичности решения вблизи критической точки.

Проведенный анализ динамики нелинейной системы (2.1) показывает, что эволюция собственных возмущений приводит к формированию в системе когерентных диссипативных структур (ДС), которые описываются формулой  $V(\mathbf{r}, t) = a(t)J_0(k_\perp r) \exp(ik_z z)$ , где  $a(t)$  — функция, подчиняющаяся уравнению (3.5), а собственные значения параметров определяются выражениями (2.5), (2.7).

**4. Влияние случайных источников.** В реальном эксперименте излучение лазера может флуктуировать, что в принципе существенно влияет на динамику задачи. Поэтому рассмотрим далее влияние на систему случайных сил, не конкретизируя пока их источник.

Заметим, что уравнение (3.5) имеет формальную аналогию с соответствующими уравнениями, описывающими неравновесные фазовые переходы второго рода [8]. Особенность в критической точке  $R_c = 1$ , связанная с переходом системы из одного состояния в другое, действительно требует учета влияния флуктуационных сил.

Пусть в системе (3.5) действует ланжевеновский источник мощностью  $Q\delta(t-t') = \langle F(t)F(t') \rangle$  ( $\delta(t-t')$  — дельта-функция). Тогда уравнение эволюции системы примет вид

$$a_t = \lambda_0(R-1)a - \sigma a^3 + F(t) \quad (4.1)$$

( $F(t)$  — случайная сила).

Введем функцию  $f(a, t)$  в пространстве «координат»  $a(R)$ . Уравнение Фоккера — Планка, описывающее изменение с течением времени функции распределения  $f(a, t)$  и соответствующее (4.1), имеет вид

$$\frac{\partial f(a, t)}{\partial t} = Q \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\partial}{\partial a} [(\lambda_0(R-1)a - \sigma a^3)af], \quad \int f(a) da = 1. \quad (4.2)$$

В стационарном состоянии решение этого уравнения есть

$$f(a) = C \exp [-(L/2Q)(\sigma a^4/2 - \lambda_0(R-1)a^2)]. \quad (4.3)$$

Для распределения (4.3) имеются два наивероятнейших значения:

$$a_s = \pm \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sigma} (R-1)}, \quad (4.4)$$

сливающихся при  $R_c = 1$ .

Вычислим средний квадрат  $\langle a^2 \rangle = \int a^2 f(a) da$ . Используя (4.3), находим

$$\langle a^2 \rangle = \frac{\lambda_0}{\sigma} (R-1), \quad R > 1; \quad (4.5)$$

$$\langle a^2 \rangle = \sqrt{\frac{4Q}{\sigma}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad R = 1 \quad (4.6)$$

( $\Gamma(3/4)$ ,  $\Gamma(1/4)$  — гамма-функции). Видно, что при  $R > 1$  (достаточно далеко от  $R_c$ ) квадраты выражений (3.7), (4.4) совпадают с (4.5); при  $R = R_c$  выражение (4.6) характеризует в нашем случае среднеквадратичные флуктуации параметра порядка  $a_s$ .

Оценим флуктуации в критической точке, полагая, что источником случайных сил являются флуктуации лазерного излучения  $\delta I(t)$  [8]. При этом в третьем из основных уравнений (1.1) появляется член  $(\mu I / \rho_0 c_p) (\delta I / I)$ . Выполняя преобразования, аналогичные использованным при выводе уравнения (1.11), находим

$$Q \delta(t-t') = \left( \frac{c\mu I}{\rho_0 c_p T_0} \right)^2 \frac{1}{4 \langle J_0^2 \rangle} \frac{\langle \delta I(t) \delta I(t') \rangle}{I_0^2} \delta(t-t').$$

Подставляя это выражение и значение  $\sigma$  из (3.6) в формулу (4.6), оценим по порядку величины уровень флуктуаций в критической точке  $R_c = 1$ :

$$\langle a^2 \rangle \sim (c\mu I / [(2-\gamma)\rho_0 c_p T_0]) \sqrt{(\gamma-1)\beta T_0 D t_c (\langle \delta I^2 \rangle / I^2)}. \quad (4.7)$$

Здесь  $t_c$  — характерное время корреляции флуктуаций лазерного излучения;  $\langle \delta I^2 \rangle / I^2$  — их относительный уровень.

Остановимся на физическом смысле полученных выше выражений. Полевая функция  $V(\mathbf{r}, t)$  описывает скорость частиц в плазме. В лабораторной системе координат эта функция имеет вид бегущей волны:

$$V = a_s(R) J_0(k_{\perp} r) \exp[-i\omega t + ik_z(z - z_f)], \quad R > 1,$$

где  $\omega = k_z c$  — частота звуковой волны;  $z_f = V_f t$  — координата фронта. С использованием граничного условия  $\partial V / \partial z|_{z=z_f} = 0$  это выражение примет форму

$$V(r, z) = V_f(R) J_0(k_{\perp} r) \cos[k_z(z - z_f)] \exp(-i\omega t); \quad (4.8)$$

$$V_f(R) = \left( \sqrt{3/2} (\gamma-1) \beta T_0 / (2-\gamma) \right) k_{\perp} D \sqrt{R-1}, \quad R > 1. \quad (4.9)$$

При выводе (4.9) учтены условия (3.6), (3.7) и проведены соответствующие усреднения по времени и по сечению плазменного канала. Заметим, что из (3.6), (3.7) следует зависимость скорости фронта от степени надкритичности  $V_f \propto \sqrt{R-1}$ , а сам профиль скорости, описываемый функцией  $J_0(k_{\perp}r)$ , не изменяет своей формы (факт, отмеченный в [2]). При  $R = 1$  формулы (4.8), (4.9) теряют свое значение. В этом состоянии динамика системы определяется мощностью случайных источников, а выражение (4.7), по существу, описывает случайные колебания скорости возле нулевого значения (эффект, экспериментально зафиксированный в [2]). Отметим также, что (4.4) правильно отражает равную вероятность появления двух фронтов (переднего и заднего) движения разряда.

Количественные оценки величин проведем при типичных значениях параметров задачи [1, 2]: плотность плазмы (при нормальном давлении)  $\rho_0 \approx 2 \cdot 10^{-4}$  г/см<sup>3</sup>, равновесная температура электронов  $T_0 = T_e \approx 1,3$  эВ, равновесная плотность электронов  $n_e \approx 2 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>,  $\mu \approx 10^{-2}$  см<sup>-1</sup>,  $r_0 \approx 0,5$  см,  $B \approx 0,5$ ,  $\gamma \approx 1,25$ ,  $\beta T_0 \approx 1$ ,  $D \approx 2 \cdot 10^3$  см<sup>2</sup>/с,  $c \approx 2 \cdot 10^5$  см/с. Начнем с определения пороговых энергетических характеристик поля накачки. Из (2.7) и определений (1.5), (1.6) следует, что минимальное значение поля  $B(\mu I)_c / \rho_0 c_p T_0 = k_{\perp}^2 D$  достигается при выполнении условия  $(k_z/k_{\perp})^2 \ll 1$ . Подставляя в это выражение типичные значения задачи, находим пороговую мощность излучения  $P_c = \pi r_0^2 I_c = (2,4)^2 \pi D \rho_0 c_p T_0 / B \mu \approx 1$  МВт. При этом же условии с учетом адиабатичности волны ( $\omega > k_{\perp}^2 D$ ) из (4.8), (4.9) вычислим скорость фронта разряда  $V_f = 20\sqrt{R-1}$  (м/с), уровень флуктуаций плотности числа частиц в плазме разряда  $\delta n/n_0 \approx 10^{-2}$  и частоту волны  $\nu = \omega/2\pi \sim 10$  кГц (флуктуации параметров плазмы и индуцированные разрядом звуковые колебания с данной частотой впервые наблюдались в [4, 9]). Поведение фронта разряда в критической точке  $R = 1$  определим с помощью (4.7). При  $\sqrt{\langle \delta I \rangle^2 / I^2} \sim 10^{-5}$ ,  $t_c \sim 10^{-9}$  с находим уровень флуктуаций скорости фронта разряда в области порога  $\sqrt{\langle \Delta V_f^2 \rangle} = \sqrt{\langle a^2 \rangle} \sim 1$  м/с.

**5. Обсуждение результатов. Выводы.** В приближении Буссинеска получено уравнение, описывающее эволюцию разряда светового горения в поле излучения Nd-лазера. Показано, что при определенном (пороговом) значении внешнего поля в системе возникает неустойчивость гидродинамического типа [10], причем роль числа Рэлея выполняет соотношение  $R = \nu(I)/k_c^2 D$ , где  $\nu(I)$  — характерная частота энерговклада в разряд, параметрически зависящая от внешнего поля;  $D$  — коэффициент диффузии тепла;  $k_c$  — волновое число, определяемое собственными параметрами системы (эффекты, связанные с вязкостью  $\eta$  не учитывались, поскольку в плазме разряда  $\eta/D \ll 1$  [1]). Исследована динамика формирующейся нелинейной звуковой волны с аксиальной симметрией и медленно меняющейся амплитудой. Обнаружено, что эволюция огибающей подчиняется уравнению Гинзбурга — Ландау. Изучено влияние случайных источников на данную систему. Показано, что развивающиеся в системе флуктуации определяют пороговую величину поля накачки и проявляются в виде макроскопического (направленного) движения разряда.

Область применимости рассмотренной модели ограничена физическим условием оптической прозрачности, т. е. должно выполняться условие  $\omega_l/\omega_t \ll 1$ , где  $\omega_l$  — ленгмюровская частота;  $\omega_t$  — частота электромагнитной волны (Nd-лазер). Другое ограничение связано с уровнем флуктуаций лазерного излучения  $\delta I/I \sim (V/c)^2 \sim 10^{-4}$ . Обычно эти условия хорошо выполняются.

Реализации математической модели в физической ситуации (пороговая мощность, скорость и профиль фронта, уровень и частота флуктуаций, поведение фронта в критической области, флуктуации скорости фронта волны разряда  $\Delta V_f$ ) количественно и качественно согласуются с известными опытными данными.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Райзер Ю. П. Основы современной физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980.
2. Буфетов И. А., Прохоров А. М., Федоров В. В., Фомин В. К. Медленное горение лазерной плазмы и стационарный оптический разряд в воздухе // Тр. ИОФАН. 1988. Т. 10. С. 3–74.
3. Бункин Ф. В., Конов В. И., Прохоров А. М. и др. Лазерная искра в режиме «медленного горения» // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9, № 13. С. 609–612.
4. Букатый В. И., Дейнес К. И., Тельнихин А. А. Экспериментальные исследования лазерной искры в режиме светового горения // Журн. оптики атмосферы. 1991. № 7. С. 753–756.
5. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
6. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1968.
7. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
8. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
9. Букатый В. И., Коболов А. А., Тельнихин А. А. Возбуждение разряда в воздухе лазерным излучением // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 2. С. 312–318.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

*Поступила в редакцию 15/VI 1995 г.,  
в окончательном варианте — 24/VI 1996 г.*

---