

УДК 534.2:532

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГАЗА В ПУЗЫРЬКЕ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ С ОБРАЗОВАНИЕМ УДАРНЫХ ВОЛН

А. А. Аганин, М. А. Ильгамов

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, 420111 Казань

Рассмотрены особенности расчета газа в сферическом пузырьке, находящемся в центре сферического объема слабосжимаемой жидкости. Для оценки алгоритма использованы задачи о движении холодного газа к точке и сходящемся к точке сферическом поршне. Показано, что при расчете сферических волн в окрестности полюса могут возникать значительные погрешности, существенного уменьшения которых при использовании метода распада разрыва можно добиться с помощью искусственной вязкости.

Введение. Как правило, к задачам динамики пузырька газа в жидкости обращаются при изучении воздействия кавитации на объекты, находящиеся в потоке жидкости [1–3]. Однако они представляют интерес и в связи с обнаружением явления однопузырьковой сонолюминесценции [4], открывающего большие перспективы для развития физики и химии [5].

До недавнего времени в основном применялись модели, в которых разрежение-сжатие газа в пузырьке принималось равномерным, а окружающая пузырек жидкость — несжимаемой или слабосжимаемой [1–3, 6–8]. Такие модели хорошо работают, пока скорость движения поверхности пузырька остается дозвуковой. Затем в пузырьке возникают ударные волны, вследствие чего динамика пузырька существенно изменяется. Расчет с использованием уравнений гидродинамики для моделирования газовой среды пузырька впервые проведен в [9]. При этом жидкость вокруг пузырька описывалась так же, как в моделях, приводящих к уравнению типа Рэля — Плессета. Подобный подход применялся и другими авторами [10, 11]. В [12] использовалось численное интегрирование уравнений гидродинамики как для газа, так и для жидкости. Вместе с тем даже при расчете одного колебания получение соответствующих принятой модели численных результатов требует значительных затрат машинного времени, если не использовать упрощений, учитывающих особенности поведения решения в пространстве и времени.

Численное интегрирование уравнений газовой динамики проводилось методом Лакса — Фридрикса [9], с комплексом программ DYNA2D [12], а также методом распада разрыва [10, 11]. Точность численного решения во многом зависит от того, насколько верно оно описывает сходящиеся к полюсу ударные волны, их взаимодействие в полюсе и возникающие при этом расходящиеся от полюса ударные волны. В [9, 10, 12] этот вопрос не обсуждается. В настоящей работе рассматриваются особенности численного моделирования динамики газа в пузырьке при схлопывании с образованием ударных волн на основе метода распада разрыва. Для оценки алгоритма используются задача о движении холодного газа к точке и задача о сходящемся к точке сферическом поршне.

Постановка задачи и метод решения. Рассматривается динамика газа в сферическом пузырьке, находящемся в центре сферического объема жидкости, на внешней

поверхности которого задано давление

$$p_{ex}(t) = p^0 - \Delta p_{ex} \sin(\omega t), \quad (1)$$

где p^0 — среднее давление; Δp_{ex} , ω — амплитуда и частота колебаний; t — время. При $t < 0$ пузырек и жидкость находятся в покое.

Газовая среда в пузырьке описывается системой уравнений идеального газа с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho r^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho r^2 u)}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial(\rho r^2 u)}{\partial t} + \frac{\partial(p r^2 + \rho r^2 u^2)}{\partial r} &= 2pr, \\ \frac{\partial(E r^2)}{\partial t} + \frac{\partial[r^2(p + E)u]}{\partial r} &= 0, & E &= \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right), & p &= \frac{(\gamma - 1)\rho \varepsilon}{1 - \rho b}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь r — радиальная координата; p — давление; u — скорость; ρ — плотность; ε , E — удельные внутренняя (на единицу массы) и полная (на единицу объема) энергии; $b = 1/\rho_{\max}$, ρ_{\max} — максимально возможное значение плотности газа; γ — отношение удельных теплоемкостей. Движение границы раздела фаз задается уравнением [9]

$$r_b \frac{du_b}{dt} + \frac{3}{2} u_b^2 = \frac{1}{\rho_f^0} (p_b - p_{ex}) + \frac{r_b}{\rho_f^0 c_f^0} \frac{d}{dt} (p_b - p_{ex}) + 4\nu \frac{u_b}{r_b}, \quad (3)$$

где r_b — радиус пузырька; u_b — скорость движения его поверхности; ρ_f^0 , c_f^0 — плотность и скорость звука в жидкости; $p_b = p(r_b - 0, t)$ — давление на поверхности пузырька со стороны газа; ν — коэффициент кинематической вязкости. Принимается, что при $t = 0$ $p(r, 0) = p^0$, $\rho(r, 0) = \rho^0$, $u(r, 0) = 0$, $0 \leq r \leq r_b^0 = r_b(0)$ (p^0 , ρ^0 — начальные невозмущенные значения давления и плотности газа в пузырьке).

Алгоритм решения задачи (1)–(3) основан на использовании смешанных эйлерово-лагранжевых координат ξ , τ . После замены переменных $t = \tau$, $r = r(\tau, \xi)$ система (2) преобразуется к виду

$$(\mathbf{q} r^2 J)_\tau + (\mathbf{f} r^2)_\xi = 2r J \mathbf{s},$$

где $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, E)^\tau$; $\mathbf{f} = \mathbf{q}(u - r_\tau) + (0, p, pu)^\tau$; $\mathbf{s} = (0, p, 0)^\tau$; индекс « τ » означает транспонирование, здесь и далее индексы τ и ξ — частные производные $\partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial\xi$; $J = \partial r/\partial\xi$ — якобиан преобразования.

В расчетах временная ось разбивается на слои τ^n ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\tau^0 = 0$, $\tau^{n+1} = \tau^n + \Delta\tau^n$. Вычислительная сетка в момент времени τ^n состоит из ячеек $[r_{i-1/2}^n; r_{i+1/2}^n]$, $i = \overline{1, I}$; $r_{i+1/2}^n = r(\xi_{i+1/2}, \tau^n)$, $r_{1/2}^n = 0$, $r_{I+1/2}^n = r_b(\tau^n)$ (I — число ячеек сетки). В пределах одной ячейки газодинамические параметры считаются постоянными.

Пусть известны значения параметров решения в ячейках сетки на слое τ^n . Их расчет на слое τ^{n+1} начинается с определения давления $p_{I+1/2}^n$ на внешней границе пузырька газа. Для этого используются соотношения задачи о плоском поршне, вдвигаемом в трубу ($u_b^n < u_I^n$) и выдвигаемом из трубы ($u_b^n > u_I^n$) со скоростью $u_{I+1/2}^n = u_I^n$ [11], при невозмущенных значениях параметров внутри трубы, равных их значениям в I -й ячейке. Затем рассчитывается положение внешней границы: $r_{I+1/2}^{n+1} = r_{I+1/2}^n + \Delta\tau^n u_{I+1/2}^n$, по заданному закону определяются координаты внутренних узлов сетки $r_{i+1/2}^{n+1}$, вычисляются скорости перемещения узлов $(r_\tau)_{i+1/2}^n = (r_{i+1/2}^{n+1} - r_{i-1/2}^{n+1})/\Delta\tau^n$, по явной разностной схеме рассчитываются значения массы, импульса и полной энергии ячеек, относящиеся к слою τ^{n+1} :

$$\frac{(\mathbf{q} r^2 \Delta r)_i^{n+1} - (\mathbf{q} r^2 \Delta r)_i^n}{\Delta\tau^n} + (\mathbf{f} r^2)_{i+1/2}^n - (\mathbf{f} r^2)_{i-1/2}^n = 2\tilde{r}_i^n \Delta r_i^n \mathbf{s}_i^n.$$

Здесь $(ab)_i^n = a_i^n b_i^n$, $(r^2 \Delta r)_i^n = [(r_{i+1/2}^n)^3 - (r_{i-1/2}^n)^3]/3$, $f_{i+1/2}^n = f(q_{i+1/2}^n)$, $s_i^n = s(q_i^n)$, $(r^2)_{i+1/2}^n = [(r_{i+1/2}^n + \Delta r_{i+1/2}^n)^3 - (r_{i+1/2}^n)^3]/(3\Delta r_{i+1/2}^n)$, $\Delta r_{i+1/2}^n = (u - r\tau)_{i+1/2}^n \Delta \tau^n$, $\tilde{r}_i^n = 0,5(\tilde{r}_{i-1/2}^n + \tilde{r}_{i+1/2}^n)$, $\tilde{r}_{i+1/2}^n = [(r^2)_{i+1/2}^n]^{1/2}$, $\Delta r_i^n = r_{i+1/2}^n - r_{i-1/2}^n$. Для вычисления относящихся к грани ячейки значений газодинамических параметров $q_{i+1/2}^n$, $u_{i+1/2}^n$ и др. решается задача о распаде разрыва, образуемого разными значениями параметров в ячейках i и $i + 1$. Искомые значения представляют собой решение этой задачи в точке $r_{i+1/2}^{n+1}$.

Расчет на слое τ^{n+1} завершается определением скорости внешней границы пузырька u_i^{n+1} в соответствии с уравнением (3). Перед началом выполнения очередного шага определяется его величина

$$\Delta \tau^n = \alpha_C \min_{1 \leq i \leq I} \left\{ \frac{\Delta r_i^n}{\max(|u_{i-1/2}^n - (r\tau)_{i-1/2}^n + c_{i-1/2}^n|, |u_{i+1/2}^n - (r\tau)_{i+1/2}^n - c_{i+1/2}^n|)} \right\},$$

где α_C — число Куранта, $c_{i+1/2}^n$ — местная скорость звука.

Решение задачи о движении холодного газа к точке [3]. При $t = 0$ однородный газ с параметрами ρ^0 , $p^0 = 0$ движется к полюсу сферической системы координат всюду со скоростью $u^0 < 0$. Требуется найти распределение параметров по r при $t > 0$. Структура решения такова, что при $t > 0$ имеется две зоны, разделенных ударной волной, распространяющейся от полюса с постоянной скоростью $D > 0$. На границе раздела зон значения параметров связаны соотношениями Гюгонио, на бесконечно удаленной границе $\rho(\infty, t) = \rho^0$, $p(\infty, t) = 0$, $u(\infty, t) = u^0$. Для уравнения состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (u^0)^2/2, \quad \rho = \rho^0(1 - u^0/D)^3, \quad u = 0 \quad \text{при } r < Dt; \\ \varepsilon &= 0, \quad \rho = \rho^0(1 - u^0/D)^2, \quad u = u^0 \quad \text{при } r > Dt, \end{aligned}$$

где $D = -(\gamma - 1)u^0/2$.

На рис. 1 представлены результаты расчета на равномерной подвижной сетке. Это пространственное распределение параметров на момент времени $t = 0,6$. Начальные данные задачи следующие: $\gamma = 5/3$, $\rho^0 = 1$, $u^0 = -1$, $\alpha_C = 0,356$. Расчетной областью при $t = 0$ является интервал $0 \leq r \leq 1$. Движение сетки определяется перемещением правой границы со скоростью u^0 . Кривые 1 представляют аналитическое решение, кривые 2, 3 — численное (кривые 2 получены на сетке из 100 ячеек, 3 — на сетке из 200 ячеек).

Расчетные кривые давления (и скорости) хорошо согласуются с аналитическими. Вместе с тем у плотности (и внутренней энергии) в окрестности полюса имеются большие

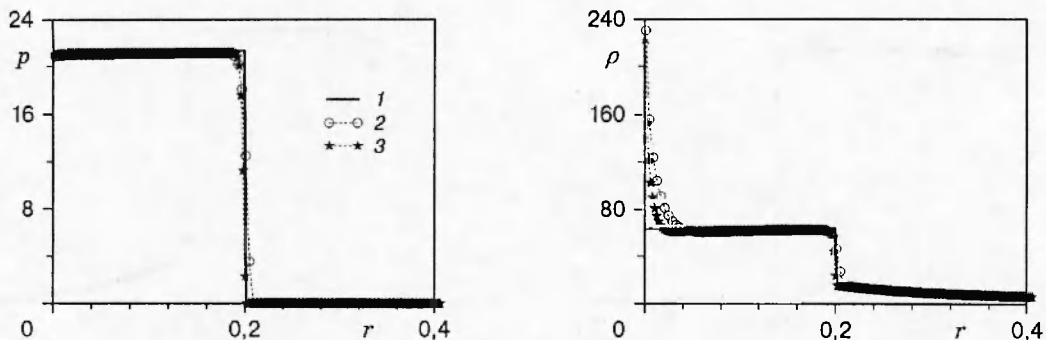


Рис. 1

расхождения. Например, в ячейке, примыкающей к полюсу, плотность на сетке из 100 ячеек превышает точное значение более чем в 3,5 раза.

Численное решение данной задачи другим разностным методом обсуждается в [13], где расчетный график плотности в окрестности полюса также сильно отклоняется от точного значения, но не вверх, как на рис. 1, а вниз. Для улучшения согласования с точным решением в [13] предлагается уменьшить численную вязкость и вводить искусственный тепловой поток. Учитывая наблюдаемое на рис. 1 поведение расчетных кривых плотности, полученных без искусственной вязкости, можно предположить, что введение искусственной вязкости будет полезно.

Опробованы различные варианты искусственной вязкости. Наиболее удовлетворительные результаты достигнуты при модификации второго уравнения системы (2)

$$\frac{\partial(\rho r^2 u)}{\partial t} + \frac{\partial(pr^2 + \rho r^2 u^2)}{\partial r} = 2pr + 2r(\tau^{rr} - \tau^{\varphi\varphi}),$$

$$\tau^{rr} - \tau^{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right), \quad \mu = \begin{cases} (k_\mu l)^2 \frac{\partial u}{\partial r} & \text{при } \frac{\partial u}{\partial r} < 0, \\ 0 & \text{при } \frac{\partial u}{\partial r} \geq 0, \end{cases}$$

где k_μ — безразмерный коэффициент; l — параметр, имеющий размерность длины. После перехода к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным имеем

$$(\rho u r^2 J)_\tau + [\rho r^2 u(u - r_\tau) + pr^2]_\xi = 2rJp + 2rJ(\tau^{rr} - \tau^{\varphi\varphi}),$$

$$\tau^{rr} - \tau^{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{1}{J} u_\xi - \frac{u}{r} \right), \quad \mu = \begin{cases} (k_\mu l)^2 \rho \frac{1}{J} u_\xi & \text{при } u_\xi < 0, \\ 0 & \text{при } u_\xi \geq 0. \end{cases}$$

При численной реализации принимаем

$$(\tau^{rr} - \tau^{\varphi\varphi})_i^n = 2\mu_i^n \left(\frac{1}{\Delta r_i^n} \Delta u_i^n - \frac{u_i^n}{r_i^n} \right), \quad \mu_i^n = (k_\mu \Delta r_i^n)^2 \rho_i^n \frac{1}{\Delta r_i^n} \Delta u_i^n,$$

где $\Delta u_i^n = u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n$. Оптимальные значения коэффициента k_μ подбирались в процессе вычислений.

На рис. 2 представлены результаты расчета на сетке, состоящей из 100 ячеек, при $k_\mu^2 = 0,067$ (другие параметры те же, что на рис. 1). Введение слагаемых с искусственной вязкостью значительно приблизило численное решение к аналитическому. Изменился и

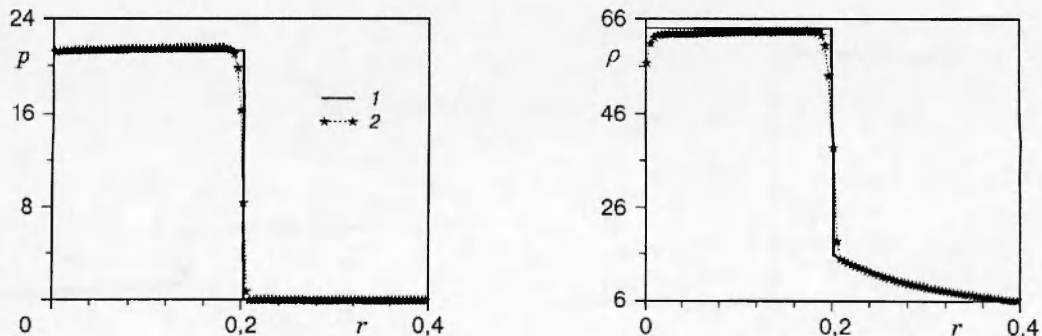


Рис. 2

характер поведения кривых: по мере приближения к полюсу плотность уменьшается (внутренняя энергия увеличивается). Расчеты показывают, что с ростом k_μ провал плотности и подъем внутренней энергии возле полюса увеличиваются. Отметим, что дальнейшего сближения численного решения с аналитическим можно добиться путем использования искусственного теплового потока [11].

Решение задачи о сходящемся к точке сферическом поршне. При $t < 0$ сферический поршень находится в покое в положении $r = r^0$. Заключенный внутри ограничиваемого поршнем объема идеальный газ с параметрами γ, ρ^0, c^0 также покоится ($u^0 = 0$). Предполагается, что $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$. При $t = 0$ поршень мгновенно начинает движение в направлении к полюсу с постоянной скоростью $u_p < 0$. Возле поршня возникает ударная волна, интенсивность которой по мере приближения к полюсу нарастает. После фокусировки в полюсе ударная волна отражается от него и распространяется в обратном направлении.

Когда в небольшой окрестности полюса находится сходящаяся или расходящаяся ударная волна, эта задача имеет автомодельный характер [14]. До фокусировки сходящейся ударной волны в этой области

$$|u| \sim r^{-(1/\beta-1)}, \quad \rho = \text{const}, \quad p \sim r^{-2(1/\beta-1)}, \quad \varepsilon \sim r^{-2(1/\beta-1)}, \quad (4)$$

где β — показатель автомодельности. Для $\gamma = 1,4$ $\rho^*/\rho^0 = 20,1$, $\beta = 0,7172$ (ρ^* — плотность газа за фронтом ударной волны в момент ее фокусировки). Кроме того [9], $\rho_2^*/\rho_1^* = 2,3$ (ρ_1^*, ρ_2^* — плотность газа перед и за фронтом расходящейся ударной волны).

На рис. 3 представлены пространственные распределения параметров при следующих входных данных: $\gamma = 1,4$, $\rho^0 = 1$, $c^0 = 1$, $u_p = -0,5$, $k_\mu^2 = 0,067$, $\alpha_C = 0,35$ (c^0 — невозмущенная скорость звука). В начальный момент времени $t = 0$ расчетная область $0 \leq r \leq 1$ покрывалась сгущающейся к полюсу по геометрической прогрессии вычислительной сет-

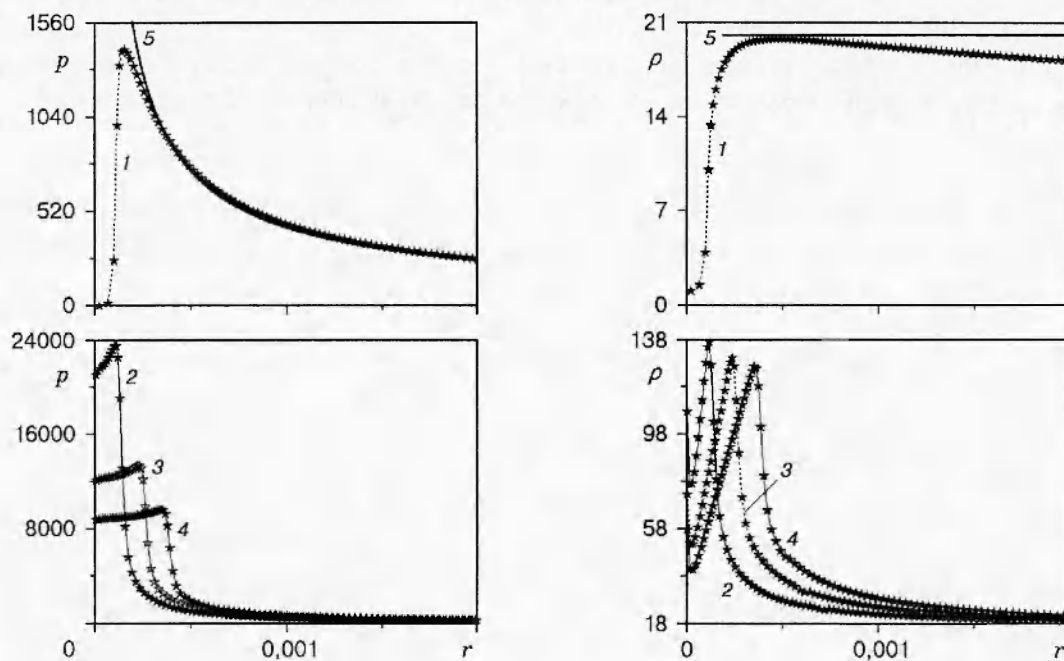


Рис. 3

кой из 800 ячеек. Размер прилегающей к полюсу ячейки составил $5 \cdot 10^{-5}$. Использовалась лагранжева система координат ($r_\tau = u$).

Расчетные кривые на рис. 3 относятся к моменту времени $t_1 \approx 0,5928775$, близкому к моменту фокусировки ударной волны в полюсе (кривые 1), и трем моментам вскоре после фокусировки: $t_2 = 0,5928889$, $t_3 = 0,5929008$, $t_4 = 0,5929147$ (кривые 2–4). Кривые 5 построены на момент времени t_1 в соответствии с соотношениями (4). Для построения кривой давления использовался масштабный множитель, который рассчитывался на основе численного решения в центре одной из ячеек расчетной сетки (в точке $r \approx 3,89 \cdot 10^{-4}$). Ячейка выбиралась так, чтобы: 1) она располагалась за фронтом ударной волны; 2) она была как можно ближе к полюсу; 3) значение плотности в ней находилось в области $\rho = \text{const}$.

Согласование расчетных и аналитических кривых на момент времени t_1 удовлетворительное. Расхождение слева от точки их пересечения объясняется численным размазыванием фронта ударной волны, а справа — тем, что с увеличением расстояния от фронта волны решение задачи все более отклоняется от автомодельного. Для кривых плотности на моменты времени $t_2 - t_4$ на фронте ударной волны отношение ρ_2^*/ρ_1^* примерно одинаково и равно 2,2, что также неплохо согласуется со значением 2,3 [9]. Возле полюса наблюдаются описанные в предыдущей задаче всплеск в графике плотности и провал в графике внутренней энергии, не приведенном на рис. 3, уменьшенные за счет применения искусственной вязкости. Специальных расчетов с целью подбора оптимальных коэффициентов искусственной вязкости k_μ в данной задаче не проводилось.

Динамика газа при схлопывании пузырька, находящегося в слабосжимаемой жидкости. Задача решалась при следующих входных данных: $\gamma = 1,4$, $r_b^0 = 4,5 \cdot 10^{-6}$ м, $u_b^0 = 0$, $T^0 = 300$ К, $k_\mu^2 = 0,067$, $p^0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $c_f^0 = 1500$ м/с, $\rho_f^0 = 967,95$ кг/м³, $\nu = 0,7 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\omega = 2\pi \cdot 26,5$ кГц. Температура T вычислялась по соотношению $T = (1/\rho - b)p/R'$, где $b = 1/794$ м³/кг, $R' = 287$ Дж/(кг · К). Для оценки влияния разных методов решения начальные значения выбраны близкими к тем, что принимались в [9].

Для сравнения используются результаты расчета данной задачи в предположении, что разрежение-сжатие газа в пузырьке происходит равномерно. В этом случае

$$p_b = p_b^0 [(r_b^0)^3 - a^3]^\gamma (r_b^3 - a^3)^{-\gamma}, \quad a = r_b^0 (\rho_b^0 b)^{1/3}. \quad (5)$$

На рис. 4 приведена временная зависимость радиуса пузырька r_b в интервале $0 \leq t \leq 25$ мкс. Решения уравнения (3) совместно с соотношением (5) и системой (2) графически

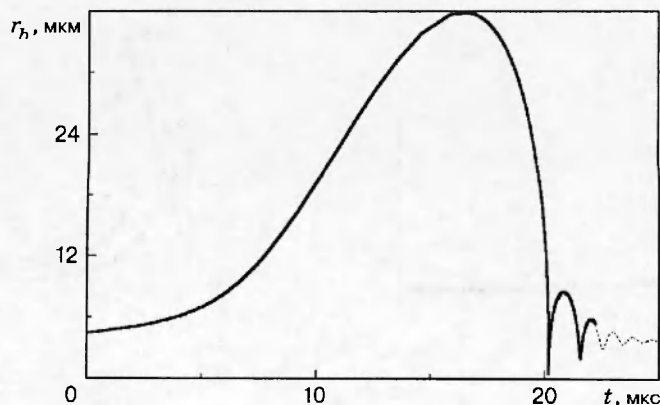


Рис. 4

совпадают. На начальном этапе, когда радиус пузырька увеличивается до максимального значения $r_{b \max}$ (фаза разрежения), решения в рамках обеих постановок совпадают, поэтому для сокращения затрат машинного времени в этом интервале расчет ведется на сетке, состоящей из двух ячеек, имеющих при $t = 0$ одинаковый размер. Расчет ведется в лагранжевых координатах ($r_\tau = u$); $\alpha_C \approx 0,12$. По достижении радиусом пузырька максимального значения производится консервативная интерполяция решения на новую равномерную сетку, состоящую из 370 ячеек.

В решении уравнения (3) совместно с (5) максимальное значение радиуса пузырька $r_{b \max} = 35,91$ мкм достигается при $t = 16,606$ мкс; в этот момент $p \approx 16,46$ Па, $\rho \approx 0,0023$ кг/м³, $T \approx 24,8$ К. Минимальное значение радиуса пузырька $r_{b \min} = 0,566$ мкм достигается при $t \approx 20,229175$ мкс; в этот момент $p \approx 41 \cdot 10^8$ Па, $\rho \approx 590,1$ кг/м³, $T \approx 6214$ К.

В расчетах уравнения (3) совместно с системой (2) $r_{b \min} = 0,5465$ мкм достигается при $t \approx 20,211275$ мкс. При этом в центре пузырька $p \approx 82,47 \cdot 10^8$ Па, $\rho \approx 32,88$ кг/м³, $T \approx 837655$ К.

На рис. 5 приведены пространственные распределения параметров газа на 15 моментов времени: $t_k = 20,211 + t_k^*$ ($k = \overline{1, 15}$), где $t_1^* \approx 0,241$, $t_2^* \approx 0,243$, $t_3^* \approx 0,250$, $t_4^* \approx 0,252$, $t_5^* \approx 0,257$, $t_6^* \approx 0,360$, $t_7^* \approx 0,390$, $t_8^* \approx 0,410$, $t_9^* \approx 0,430$, $t_{10}^* \approx 0,450$, $t_{11}^* \approx 0,455$, $t_{12}^* \approx 0,470$, $t_{13}^* \approx 0,490$, $t_{14}^* \approx 0,520$, $t_{15}^* \approx 0,560$ (t_k^* — параметр, задающий сдвиг по времени, мкс). Кривая с номером k соответствует моменту t_k .

С уменьшением радиуса пузырька от $r_{b \max}$ до $r_{b \min}$ скорость движения его поверхности и частиц газа внутри пузырька все более увеличивается и при $t \approx 20,2112$ мкс в точке $r \approx 0,3$ мкм внутри пузырька становится сверхзвуковой. Превышение местной скорости звука приводит к возникновению ударной волны, интенсивность которой по мере приближения к полюсу быстро нарастает (кривые 1–3). В момент времени t_3 ударная волна находится в непосредственной близости к полюсу. При ее фокусировке значения давления, скорости и температуры за фронтом в расчетах ограничены из-за конечности размеров ячеек расчетной сетки, а плотности — из-за ограничений, накладываемых уравнением состояния Ван-дер-Ваальса.

После фокусировки сходящейся ударной волны в полюсе возникает расходящаяся ударная волна, которая распространяется навстречу движению поверхности пузырька (кривые 4–6). При этом в окрестности полюса ($r < 0,05$ мкм) газ остается сильно прогретым, поэтому плотность в этой области ниже, чем на периферии.

В интервале $t_6 < t < t_7$ ударная волна вступает во взаимодействие с поверхностью пузырька, в результате чего возникает волна разрежения, отходящая от границы раздела фаз (кривые 7, 8). По мере распространения волны разрежения к полюсу возникает вторая ударная волна (кривые 9, 10). После ее фокусировки в полюсе образуется вторая расходящаяся ударная волна, которая распространяется к внешней границе пузырька (кривые 11–15).

Возникновение и распространение сходящейся и расходящейся ударных волн в интервале времени $t_1 \leq t \leq t_6$ во многом повторяется в интервале $t_7 \leq t \leq t_{15}$. Вместе с тем изменения в газовой среде пузырька, произошедшие в интервале $t_1 \leq t \leq t_6$, приводят к тому, что ударные волны во втором случае оказываются значительно слабее.

На рис. 6 представлены пространственные распределения параметров при $t \approx 22,18149$ мкс, когда интенсивные процессы фазы схлопывания пузырька завершились. При постоянстве давления ($0,41 \cdot 10^5$ Па) наблюдается сильное изменение плотности и температуры: в области $r < 2$ мкм плотность падает, а температура возрастает. Такое изменение параметров объясняется необратимыми процессами, произошедшими при прохождении ударных волн.

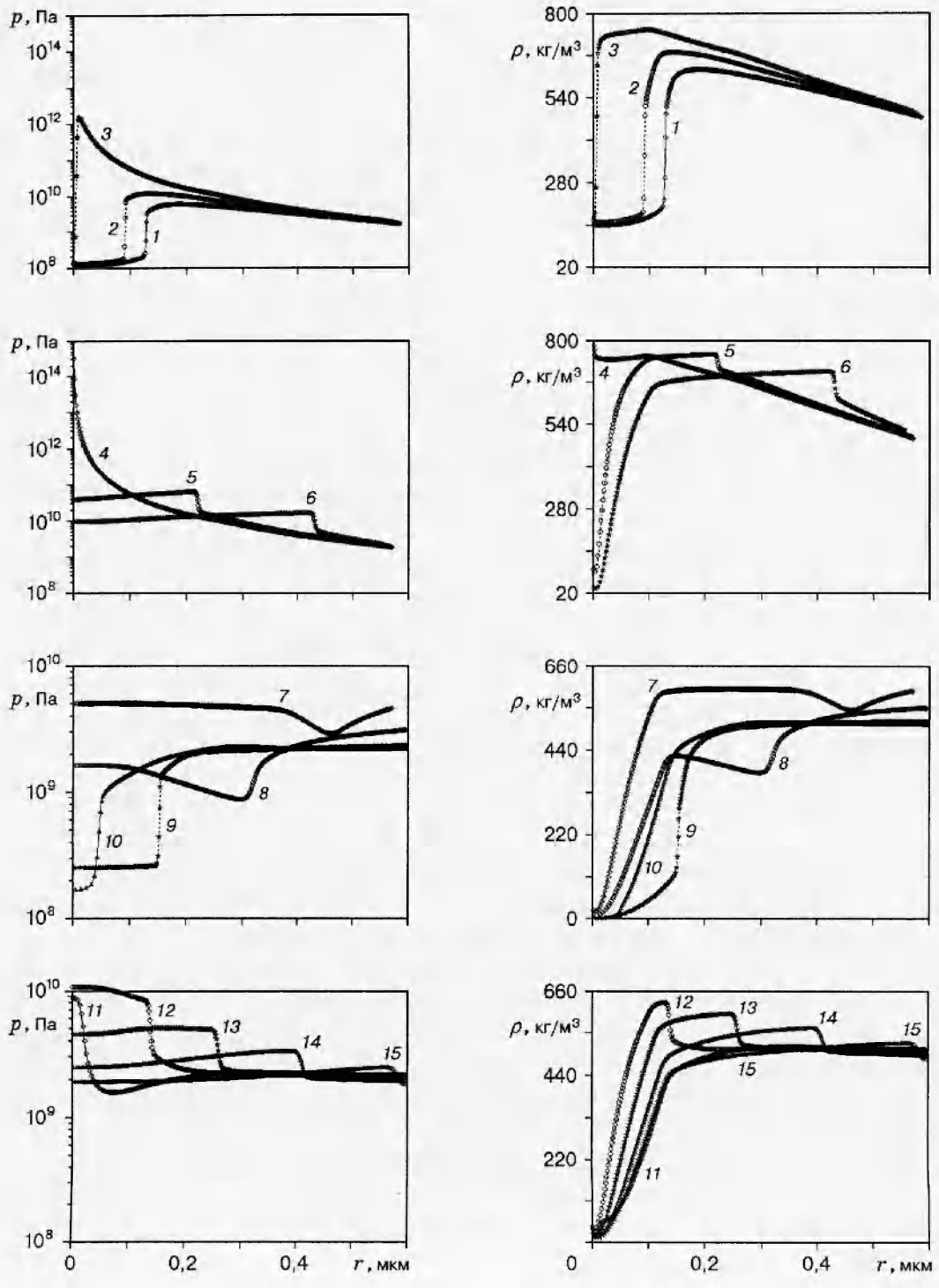


Рис. 5

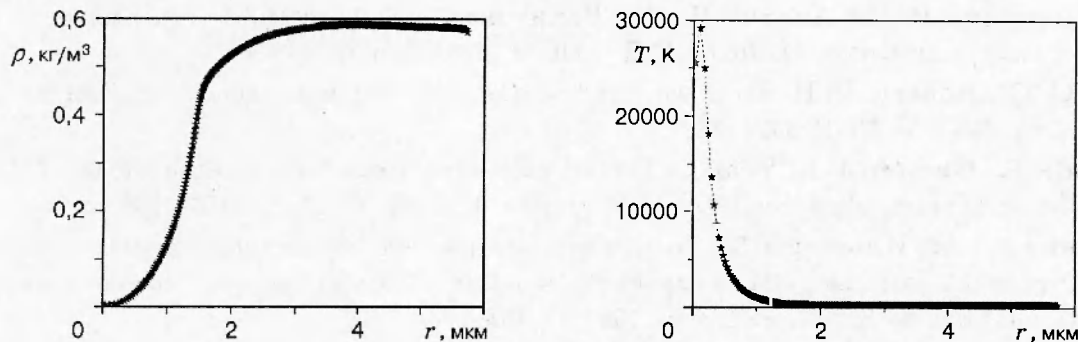


Рис. 6

Приведенные на рис. 4, 5 результаты качественно согласуются с данными работы [9]. В целом имеем удовлетворительное описание ударных волн, которые отчетливо видны на графиках пространственных распределений параметров (см. рис. 5). На кривых температуры (см. рис. 6) имеется малозаметный провал в точке возле полюса, соответствующий ему всплеск в графиках плотности из-за принятого масштаба неразличим. Такое поведение — проявление численных эффектов, о которых шла речь выше при рассмотрении задачи о движении холодного газа к точке. Эти эффекты удалось значительно уменьшить за счет применения искусственной вязкости.

Заключение. Рассмотрены особенности численного моделирования динамики газа в пузырьке на фазе схлопывания с образованием ударных волн. Для оценки алгоритма использованы задачи о движении холодного газа к точке и сходящемся к точке сферическом поршне. В первой задаче показано, что без применения специальных мер в окрестности полюса могут возникать значительные погрешности, существенного уменьшения которых при использовании метода распада разрыва можно добиться с помощью искусственной вязкости. Во второй задаче получен выход на автомодельный режим, что свидетельствует о правильности численного решения. Рассмотрена задача динамики газа в пузырьке при его схлопывании в слабосжимаемой жидкости. Установлено качественное соответствие полученных результатов с известным решением. Погрешности численного решения возле полюса удалось значительно уменьшить за счет применения искусственной вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rayleigh Lord.** On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philos. Mag.* 1917. V. 34, N 200. P. 94–98.
2. **Plesset M. S.** The dynamics of cavitation bubbles // *J. Appl. Mech.* 1949. V. 16. P. 277–282.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
4. **Gaitan D. F., Crum L. A., Roy R. A., Church C. C.** Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable cavitation bubble // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1992. V. 91. P. 3166–3172.
5. **Crum L. A.** Sonoluminescence, sonochemistry, and sonophysics // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1994. V. 95, N 1. P. 559–562.
6. **Löfstedt R., Barber B. P., Putterman S. J.** Towards a hydrodynamic theory of sonoluminescence // *Phys. Fluids.* 1993. V. 5, N 11. P. 2911–2928.
7. **Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К., Лэхи Р. Т. (мл.)** Метод сверхсильного сжатия газового пузырька в жидкости непериодическим вибрационным воздействием давления умеренной амплитуды // *Докл. РАН.* 1995. Т. 341, № 1. С. 37–41.

8. **Нигматулин Р. И., Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К.** О сжимаемости жидкости в динамике газового пузырька // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 6. С. 768–771.
9. **Wu C. C., Roberts P. H.** Shock wave propagation in a sonoluminescing gas bubble // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3424–3427.
10. **Kondic L., Gersten J. I., Yuan C.** Theoretical studies of sonoluminescence radiation: Radiative transfer and parametric dependence // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 4976–4990.
11. **Аганин А. А., Ильгамов М. А.** Особенности расчета нелинейных сферических волн методом распада разрыва // Моделирование динамических процессов в сплошных средах: Сб. ст. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1997. С. 108–193.
12. **Moss W. C., Clarke D. B., White J. W., Young D. A.** Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 9. P. 2979–2985.
13. **Noh W. F.** Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // J. Comput. Phys. 1978. V. 72. P. 78–120.
14. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 4. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 30/VI 1998 г.
