

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ С УДАРНОЙ ВОЛНОЙ
ПРИ ОДНОМЕРНОМ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГАЗА**

Ж. С. Сислян (Москва)

Рассмотрим одномерное неустановившееся течение газа, вызванное движением поршня, перемещающегося в длинной цилиндрической трубе с переменной скоростью. Будем считать, что скорость поршня в рассматриваемом интервале движения мало отличается от некоторого постоянного значения u_p , т. е. будем предполагать, что

$$\dot{x}(t) = u_p [1 + \varepsilon X'(t)] \quad (1)$$

Здесь $x = x(t)$ — закон движения поршня (точка означает дифференцирование по времени), ε — малая величина, характеризующая отклонение значения скорости поршня от постоянного, а функция $X'(t)$ имеет в рассматриваемом интервале движения порядок единицы. В силу сделанного предположения скорость $D(t)$ ударной волны, возникающей сразу после начала движения поршня и движущейся от поршня с переменной скоростью, будет также мало отличаться от некоторого постоянного значения U (соответствующего движению поршня с постоянной скоростью u_p)

$$D(t) = U + \varepsilon D'(t) \quad (2)$$

Для определения возмущенного движения газа, находящегося между поршнем и ударной волной, воспользуемся дифференциальными уравнениями одномерного неизоэнтропического течения газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0 \quad (3)$$

и условиями, которыми связаны параметры газа с обеих сторон ударной волны

$$\begin{aligned} \rho_1 (D - u_1) &= \rho_2 (D - u_2), & \rho_1 (D - u_1)^2 + p_1 &= \rho_2 (D - u_2)^2 + p_2 \\ \frac{(D - u_1)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{(D - u_2)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \end{aligned} \quad (4)$$

Индексами 1 и 2 обозначены параметры газа перед и за ударной волной. Величины u , p и ρ представляют собой соответственно скорость, давление и плотность газа, а γ — отношение теплоемкостей. Газ перед ударной волной покоится ($u_1 = 0$). Функции u_2 , p_2 и ρ_2 , характеризующие движение за ударной волной, ищем в виде:

$$u_2 = u_2^\circ (1 + \varepsilon u + \dots), \quad p_2 = p_2^\circ (1 + \varepsilon p + \dots), \quad \rho_2 = \rho_2^\circ (1 + \varepsilon \rho + \dots) \quad (5)$$

Здесь u_2° , p_2° и ρ_2° постоянны и соответствуют состоянию газа за ударной волной при движении поршня с постоянной скоростью.

Подставляя выражения (5) в уравнения (3) и пренебрегая членами выше первого порядка по ε , получим следующую систему линейных уравнений для определения функций u , p и ρ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_2^\circ \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, & u_2^\circ \frac{\partial u}{\partial t} + u_2^{\circ 2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2^{\circ 2}}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u_2^\circ \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_2^\circ \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= 0 & \left(a_2^{\circ 2} = \frac{\gamma p_2^\circ}{\rho_2^\circ} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение этой системы, содержащее три произвольные функции, имеет вид

$$\begin{aligned} p &= \gamma \{ F_1 [(u_2^\circ + a_2^\circ) t - x] + F_2 [x - (u_2^\circ - a_2^\circ) t] \} \\ \rho &= F_1 [(u_2^\circ + a_2^\circ) t - x] + F_2 [x - (u_2^\circ - a_2^\circ) t] + F_3 (x - u_2^\circ t) \\ u &= \frac{1}{M_2^\circ} \{ F_1 [(u_2^\circ + a_2^\circ) t - x] - F_2 [x - (u_2^\circ - a_2^\circ) t] \} \quad \left(M_2^\circ = \frac{u_2^\circ}{a_2^\circ} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Линеаризуем граничные условия на ударной волне, подставляя в (4) выражения (2) и (5), получим

$$\begin{aligned} D' \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2^\circ} \right) - u_2^\circ u + \rho (U - u_2^\circ) &= 0 \\ \rho_2^\circ p + \rho_2^\circ \rho (U - u_2^\circ)^2 - 2\rho_2^\circ u_2^\circ u (U - u_2^\circ) &= 0 \\ -u_2^\circ D' - u_2^\circ u (U - u_2^\circ) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2^\circ}{\rho_2^\circ} (p - \rho) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

причем в принятом приближении достаточно, чтобы эти условия имели место на прямой $x = Ut$. Подставляя в условия (8) выражения для p , ρ и u из (7), имеем

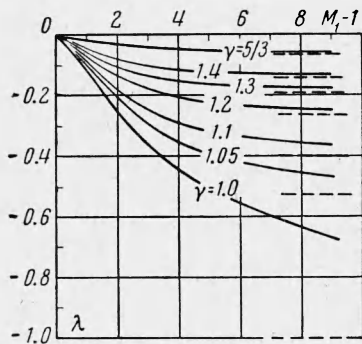
$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) D' + (U - u_2^\circ - a_2^\circ) F_1 + (U - u_2^\circ + a_2^\circ) F_2 + (U - u_2^\circ) F_3 &= 0 \\ (U - u_2^\circ - a_2^\circ)^2 F_1 + (U - u_2^\circ + a_2^\circ)^2 F_2 + (U - u_2^\circ)^2 F_3 &= 0 \\ \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) (U - u_2^\circ) D' + a_2^\circ (U - u_2^\circ - a_2^\circ) F_1 - a_2^\circ (U - u_2^\circ + a_2^\circ) F_2 + \frac{a_2^{\circ 2}}{\gamma - 1} F_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая D' и F_3 , получим

$$\lambda F_1 - F_2 = 0, \quad \lambda = \frac{M_1^2 (2M_2 - 1) - 1}{M_1^2 (2M_2 + 1) + 1} \quad (10)$$

$$\left(M_1 = \frac{U}{a_1}, M_2 = \frac{U - u_2^\circ}{a_2^\circ} = \left[\frac{\mu^2 M_1^2 + (1 - \mu^2)}{M_1^2 (1 + \mu^2) - \mu^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)$$

Из (10) и первого уравнения (7) следует, что величина λ представляет собой коэффициент отражения возмущений от ударной волны, равный отношению амплитуды возмущения, отраженного от ударной волны, к амплитуде возмущения, догоняющего ее. На фиг. 1 и 2 даны кривые изменения λ для различных значений γ и M_1 .



Фиг. 1

Из рассмотрения кривых следует, что λ отрицательна, т. е. отражение всегда происходит с изменением знака возмущения. Кроме того, величина $|\lambda|$ мала, особенно при небольшом M_1 и γ , не очень близком к единице, и для данного значения γ асимптотически стремится к некоторому постоянному значению, когда $M_1 \rightarrow \infty$. Важно заметить также, что коэффициент λ довольно чувствителен к изменению величины γ ; по абсолютной величине λ возрастает с уменьшением γ особенно для значений γ , близких к единице. При $M_1 = \infty$ и $\gamma = 1$ коэффициент λ обращается в -1 , т. е. возмущения отражаются, изменяя знак и сохраняя свою величину. При малых значениях M_1 для λ имеет место следующая формула

$$\lambda = -\frac{1 - 4\mu^2}{4} (M_1 - 1)^2$$

т. е. величина λ имеет порядок $(M_1 - 1)^2$. Кривые для λ касаются оси абсцисс в начале координат.



Фиг. 2

Определим функции F_1, F_2, F_3 и D' . Из (1) и третьего уравнения (7) имеем

$$u = \frac{1}{M_2^\circ} [F_1(t) - F_2(t)] = X'(t) \quad (11)$$

Исключая F_2 из соотношений (10) и (11), получим одно уравнение для определения функции F_1

$$[F_1(\tau) - \lambda F_1(k\tau)] = M_2^\circ X'(\tau) \quad (12)$$

где введены обозначения

$$\tau = (1 + M_2) t, \quad k = \frac{1 - M_2}{1 + M_2}, \quad 0 < k < 1$$

Единственным ограниченным решением уравнения (12) является следующий ряд [1]

$$F_1(\tau) = M_2^\circ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X'(k^n \tau) \quad (13)$$

Для функций F_2, F_3 и D' имеем

$$F_2(\tau) = M_2^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n X'(k^n \tau) \quad (14)$$

$$F_3 \left(\frac{1-k}{2} \tau \right) = - \left(\frac{1+M_2}{M_2} \right)^2 M_2^{\circ} \left(1 + \frac{k}{\lambda} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n X \cdot (k^n \tau) \quad (15)$$

$$\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2^{\circ}} \right) D' = u_p \frac{1+M_2}{M_2} \left(1 + \frac{k}{\lambda} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n X \cdot (k^n \tau) \quad (16)$$

Ввиду малости коэффициента отражения λ при приближенном определении поля течения между поршнем и ударной волной можно не учитывать влияния отраженных возмущений. В этом приближенном методе поток за криволинейным скачком уплотнения приближенно считается простой волной (волной Римана), в которой энтропия и один из характеристических параметров имеют постоянные значения, равные их значениям в начальной точке пути поршня. Обобщение этого метода, учитывающее переменность энтропии в потоке и его завихренность за криволинейной ударной волной при одномерном неустановившемся движении, дано, например, Ю. С. Завьяловым [2].

Автор благодарит С. С. Григоряна за предложенную задачу и ценные советы.

Поступила 3 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Завьялов Ю. С. О возможных обобщениях метода скачка уплотнения и течения разрежения. Доклад научн. конференции по теор. и прикл. вопр. матем. и механ. Томск, Томский ун-т, 1960, стр. 93—95.

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

О. А. Березин (Ленинград)

Рассматривается установившееся движение электропроводной жидкости в прямоугольном канале, боковые стенки которого ($y = \pm a$) являются идеально проводящими, а верхняя и нижняя ($z = \pm b$) — непроводящими. Перпендикулярно верхней и нижней стенкам канала приложено постоянное поперечное магнитное поле $B_z = B_0$, а через боковые стенки канала пропускается постоянный ток $i_y = i_0$, отнесенный к единице длины электродов. Эта задача при $i_0 = 0$ и идеально проводящих стенках канала решена Я. С. Уфляндом [1], а для непроводящих стенок — Шерклиффом [2]. В работе Г. А. Гринберга [3] решение указанной задачи сведено к решению интегрального уравнения, содержащего двойные ряды по функциям Макдональда.

Ниже решение задачи сводится к решению одной бесконечной системы алгебраических уравнений, которая может быть решена методом последовательных приближений, а также дается приближенное решение при больших значениях числа Гартмана.

Считая индуцированное магнитное поле и скорость потока имеющими только одну составляющую вдоль оси x , уравнения магнитной гидродинамики можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \right) + B_0 \frac{\partial v_x}{\partial z} &= 0, & p + \frac{B_x^2}{8\pi\mu} &= p_0 - qx \\ \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \frac{B_0}{4\pi\mu} \frac{\partial B_x}{\partial z} &= -q, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p — давление, σ — проводимость среды, η — коэффициент вязкости, c — скорость света, μ — магнитная проницаемость.

При этом напряженность электрического поля имеет составляющие

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{c}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{B_0 v_x}{c}, \quad E_z = -\frac{c}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (2)$$

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_x}{v_0}, & B &= \frac{B_x}{B_0 R_m}, & R_m &= \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} v_0 b \\ M &= \frac{B_0 b}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, & Q &= \frac{q b^2}{v_0 \eta}, & \xi &= \frac{z}{b}, & \eta &= \frac{y}{b}, & k &= \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (3)$$