

УДК 532.542; 616.1

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ГИДРОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ О РОСТЕ ДИВЕРТИКУЛА ФУЗИФОРМНОЙ АНЕВРИЗМЫ

М. Ю. Маматюков, А. К. Хе, Д. В. Паршин, А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: mamatyukov@yandex.ru, alekhe@hydro.nsc.ru, parshin@hydro.nsc.ru,
chupakhin@hydro.nsc.ru

Рассматривается энергетический подход к оценке состояния церебральной аневризмы как гидроупругой системы, состоящей из упругой стенки сосуда и набегающего потока крови. В предположении, что упругая энергия сосуда с аневризмой в совокупности с энергией изгибания и кинетической энергией затрачивается лишь на вязкую диссипацию потока в конструкции, выполнена серия численных расчетов для модельных конфигураций фузиформной аневризмы в отсутствие и при наличии дивертикула различного размера относительно размера тела аневризмы. Показано, что диаграммы давление — скорость хорошо согласуются с клиническими данными. С помощью численного моделирования показано, что при малом размере дивертикула оказывает существенное влияние на гемодинамику внутри тела аневризмы, в то время как при большом размере дивертикула вихрь, индуцируемый внутри дивертикула, почти полностью локализуется в нем.

Ключевые слова: церебральная аневризма, дивертикул, гидроупругость, энергия Уиллмора, гемодинамика.

DOI: 10.15372/PMTF20200522

Введение. Гидроупругие системы, в которых поток жидкости взаимодействует с ограничивающей его упругой оболочкой, представляют значительный теоретический интерес для постановки корректных начально-краевых задач и широко используются в гемодинамике, биологии мембран, трубопроводном транспорте. Положение и движение упругой оболочки являются неизвестными элементами, вследствие чего исследование задач гидроупругости вызывает большие сложности. При этом большую роль играют интегральные характеристики системы, важнейшими из которых являются функционалы энергии.

Энергия гидроупругой системы складывается из энергий потока жидкости и упругой стенки, а также энергии их взаимодействия. Энергия потока представляется в виде суммы кинетической и внутренней энергий. Полная энергия упругой оболочки является суммой упругой энергии, обусловленной изменением геометрии оболочки, и энергии изгибания, характеризующей энергию волн изгибания, распространяющихся по измененной оболочке. Диссипация энергии потока жидкости происходит за счет образования вихрей

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (грант № 14.W03.31.0002).

© Маматюков М. Ю., Хе А. К., Паршин Д. В., Чупахин А. П., 2020

в потоке, диссипация упругой энергии характеризуется вязкими свойствами оболочки и в значительной мере зависит от величины смещения оболочки и ее реологических характеристик [1–3].

Кровеносные сосуды являются примером гидроупругой системы. Интерес к теоретическим исследованиям и компьютерному моделированию сосудистых систем обусловлен распространенностью и опасностью сосудистых заболеваний [4]. Важной задачей биомедицинской инженерии является исследование гемодинамики церебральных аневризм (ЦА), представляющих собой локальное выпячивание в виде пузыря или расширение веретенообразной формы (балджа) стенки артерии, которая является многослойной [5]. Вследствие локального дефекта на стенке, причины возникновения которого до сих пор являются дискуссионными [6, 7] и в настоящей работе не обсуждаются, внешние слои стенки сосуда разрываются и внутренний слой выпячивается наружу. Это вызывает существенное изменение механических характеристик стенки сосуда и характера кровотока в окрестности аневризмы. Течение в аневризме замедляется, как правило, образуется вихрь, интенсивность которого зависит от геометрии аневризмы и характеристик течения крови в материнской (подводящей) артерии. Кровь является субстанцией, которая существует в нормальном состоянии в определенном диапазоне значений скорости движения, сдвиговых характеристик, и при замедлении в ней инициируется процесс тромбообразования [8]. Тромб может закупорить сосуд, что приведет к ишемическому инсульту; пузырь аневризмы может лопнуть, что приведет к геморрагическому инсульту.

В настоящее время существует несколько подходов к исследованию гемодинамики церебральных аневризм. Рассматриваются две альтернативные теории возникновения начального локального дефекта стенки сосуда, приводящего к образованию аневризмы: теории сильного [9] и слабого [10] потоков. Согласно первой теории ЦА возникает в области максимального напора потока крови на стенку сосуда. Вторая, наоборот, объясняет возникновение аневризмы в той области, где поток имеет минимальный напор, в результате чего происходит расслоение стенки сосуда. Прочностные свойства стенок сосуда и параметры потока определяют сценарий образования аневризмы.

Большое значение для практической медицины имеет исследование риска разрыва аневризмы. Как свидетельствует статистика, риск постоперационного осложнения после удаления ЦА для некоторых типов аневризм сопоставим с риском их разрыва (0,6 и 0,5 % соответственно) [11], поэтому вопрос обоснованности операции является очень важным. Для клинической медицины важны параметры аневризмы, характеризующие риск ее разрыва. В настоящее время не существует общепринятых и признанных индикаторов, параметров риска разрыва аневризмы, поэтому их поиск имеет фундаментальное и прикладное значение. Большое количество работ посвящено исследованию различных геометрических параметров аневризмы: размеров купола и шейки, величины угла, под которым поток крови входит в аневризму, и др. [11–14]. На основе многочисленных клинических данных составлены подробные таблицы, связывающие различные параметры аневризмы с вероятностью ее разрыва. Современное трехмерное моделирование с использованием промышленных пакетов и мощных компьютеров позволило детально рассчитывать и визуализировать различные прочностные и гидродинамические параметры потока и оболочки. Имеется большое число расчетных работ, выполненных на основе реальных конфигураций сосудов (см., например, [9, 13, 15]). Результаты этих расчетов в совокупности с клиническими данными о геометрии и гемодинамических характеристиках аневризмы конкретного пациента показывают исключительную сложность задачи моделирования развития аневризмы и оценки риска ее разрыва. Данные, имеющиеся в литературе, основаны на хирургической практике и не имеют надежного предсказательного характера.

Клинические наблюдения позволяют сделать два важных практических вывода: 1) размер аневризмы не является определяющим фактором, приводящим к ее разрыву, рвутся как малые и средние, так и большие аневризмы [16]; 2) строение аневризм малых размеров (до 4 мм) приблизительно одинаково, строение аневризм больших размеров более разнообразно [17].

С учетом изложенного выше актуальна задача определения риска разрыва аневризм с использованием энергетического подхода, основанного на вычислении полной энергии гидроупругой системы и анализе влияния различных компонент функционала полной энергии на динамику системы.

В последнее время возрос интерес к исследованию энергии упругих мембран при больших нелинейных деформациях оболочки. Данные исследования инициированы работами [18, 19], в которых получено выражение для функционала упругой энергии, впоследствии названное функционалом Хелфриха. Этот функционал связывает энергию изгиба оболочки с интегралом от квадрата средней кривизны поверхности, задающей оболочку. Можно выделить три направления исследований в этой области: геометрическое, энергетическое и развитие методов теории уравнений в частных производных. В частности, в работе [20] установлены два важных свойства функционала Хелфриха: его инвариантность относительно конформных преобразований пространства E^3 и его равенство 4π для компактных поверхностей, гомеоморфных сфере. Данный функционал ограничен снизу и не зависит от размера поверхности. Позднее эти результаты были получены Т. Уиллмором, и функционал был назван его именем [21]. Функционал Хелфриха отличается от функционала Уиллмора наличием слагаемого, характеризующего спонтанную кривизну. В [22] рассматривается также функционал, равный интегралу по поверхности от суммы квадратов главных кривизн поверхности. В случае компактных поверхностей он сводится к функционалу Уиллмора с помощью теоремы Гаусса — Бонне. В результате вариации функционала Уиллмора получается уравнение в частных производных четвертого порядка для метрики поверхности. В работах [23–26] показано, что, в случае если функционал Уиллмора превышает критическое значение 8π , регулярность поверхности нарушается и на ней появляются сингулярности в виде ножек катеноидов с шаровидными шляпками и ветвящихся деревьев из таких фигур.

Экспериментальные исследования форм мембран в рамках дифференциальной геометрии проведены в работе [27]. Устойчивость липидных мембран с использованием функционала Уиллмора исследовалась в [28].

Роль функционала Уиллмора в задачах гидроупругости с точки зрения вариационной постановки при исследовании корректности задачи о движении идеальной жидкости и упругой мембраны рассматривалась в работах [29, 30]. Задачи гидроупругости для уравнений вязкой жидкости Навье — Стокса являются предметом исследований [31], в [32] изучались гидроупругие задачи для вязкой жидкости и оболочек Койтера. В [33] исследовалась возможность использования различных моделей гемодинамики и гидроупругости для описания разветвленных кровеносных сетей.

Целью настоящей работы, развивающей энергетический подход к исследованию гидроупругих систем, предложенный в [34], является численное моделирование на основе разработанного вычислительного комплекса интегральных характеристик гидроупругой системы, моделирующей фузиформную аневризму с образующимся на ней выпячиванием (дивертикулом) различных размеров. Размеры и параметры системы соответствуют размерам и параметрам ЦА. В сосудах такого калибра течение крови адекватно моделируется уравнениями Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Упругая модель оболочки является двухмасштабной. Упругая энергия образования и поддержания куполов аневризмы и дивертикула превышает энергию изгиба в h^{-2} раз (h — толщина стенки,

которую будем полагать одинаковой как для сосуда, так и для аневризмы и дивертикула). Колебания стенок сосудов, обусловленные пульсацией потока крови, малы по величине и могут описываться линейной теорией упругости [35]. Вследствие малых колебаний стенок и преобладания упругих эффектов над вязкими в стенках ЦА можно пренебречь энергией вязкой диссипации стенок. Сформулированная таким образом модель двусторонней гидроупругости адекватно описывает ЦА.

1. Математическая модель. При исследовании движения крови в достаточно крупных сосудах наиболее часто используется модель вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, движение которой описывается уравнениями Навье — Стокса [36]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

(\mathbf{v} — скорость; p — давление; μ — динамическая вязкость; ρ — плотность).

Для определения напряженно-деформированного состояния стенки кровеносного сосуда в первом приближении используется модель изотропного линейно-упругого материала, удовлетворяющего закону Гука [37]:

$$\rho_w \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2)$$

Здесь ρ_w — плотность стенки сосуда; \mathbf{u} — перемещение; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор малых деформаций; \mathbf{I} — единичный тензор; точки над символом обозначают полную производную по времени (частная производная по времени в лагранжевой системе координат); коэффициенты Ламе λ , G связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν равенствами

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Полная постановка задачи гидроупругости требует одновременного определения течения жидкости и перемещения стенки сосуда при условии сопряжения на границе контакта. Для описания взаимодействия крови со стенками сосуда одновременно решаются система уравнений Навье — Стокса (1) и система уравнений теории упругости (2), которые связаны кинематическими и динамическими условиями на границе области контакта Γ_w

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_w + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f = 0. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{n}_w — нормаль к стенке сосуда; $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n}_f — тензор напряжений в жидкости и нормаль к ее границе ($\mathbf{n}_w = -\mathbf{n}_f$).

На границах областей втекания Γ_{in} и вытекания Γ_{out} задаются нормальная компонента вектора скорости и давление соответственно:

$$\Gamma_{in}: \quad \mathbf{v} = v_{in}(t)\mathbf{n}, \quad \Gamma_{out}: \quad p = p_{out}(t). \quad (4)$$

При проведении персонализированного моделирования значения скорости $v_{in}(t)$ и давления $p_{out}(t)$ можно взять из результатов интраоперационного внутрисосудистого мониторинга давления и скорости [38]. В рассматриваемом случае в расчетах использовались результаты ультразвукового мониторинга объемного кровотока, проводившегося с помощью аппарата Transonic Flow-QC Meter (Transonic Systems Inc., США) во время открытой микрохирургической операции по излечению фузиформной аневризмы в Федеральном центре нейрохирургии (г. Новосибирск). Профиль скорости $v_{in}(t)$, задаваемый в расчетах, приведен на рис. 1. Данные ультразвукового мониторинга позволяют определить только скорость кровотока, поэтому в расчетах использовалось постоянное значение давления на границе области вытекания.

Задача гидроупругости (1)–(4) решалась численно в программном комплексе ANSYS с использованием решателей CFX и Mechanical. Сопряжение решателей осуществлялось

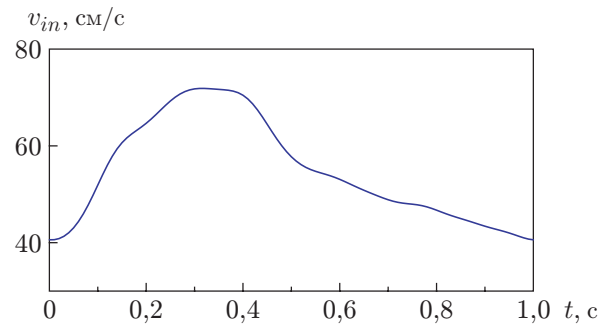


Рис. 1. Профиль скорости $v_{in}(t)$ на входе, измеренный в левой задней нижней мозжечковой артерии реального пациента в ходе операции

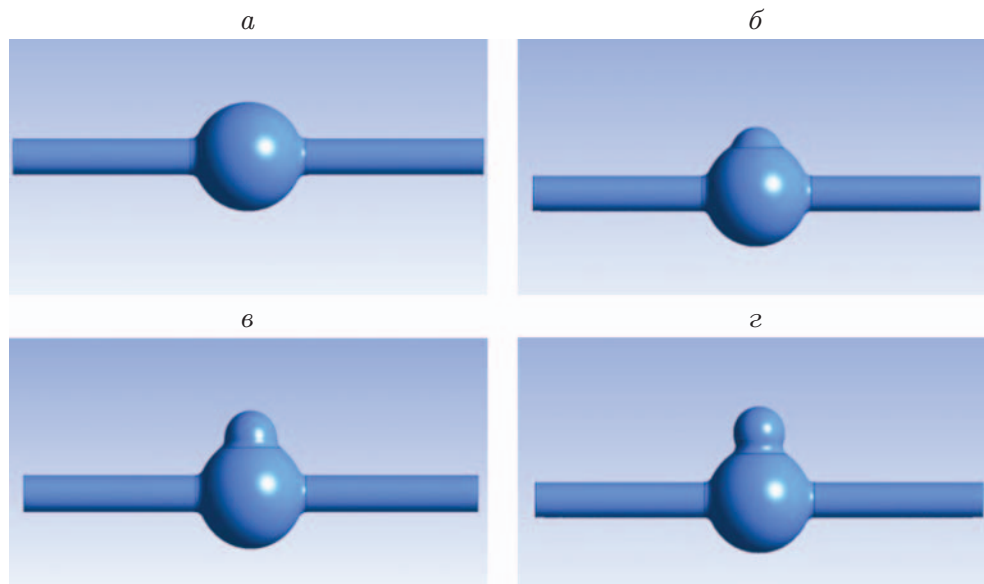


Рис. 2. Модельные конфигурации аневризм с дивертикулом различной высоты: a — $L = 0$, b — $L = D/4$, v — $L = D/2$, z — $L = 3D/4$

с помощью модуля ANSYS MultiField. Расчеты проводились для нескольких периодов до приближения решения к периодическому. В качестве искомого решения принималось решение, найденное в последнем расчетном периоде [39].

В качестве гидроупругой системы рассматривается конфигурация, моделирующая сосуд с аневризмой, имеющей дивертикул различных размеров. Модельные конфигурации состояли из основной сферы (аневризмы) и гладко сопряженных с ней круговых цилиндров (сосудов). С основной сферой гладко сопрягалась сфера меньшего диаметра (дивертикул). Высота L дивертикула составляла от 0 до $3/4$ его диаметра D (рис. 2). Длина и диаметр подводящего и выходящего сосудов составляли 21 и 6 мм соответственно, диаметр аневризмы $D_a = 12$ мм, диаметр дивертикула $D = 6$ мм, толщина стенки $h = 0,2$ мм. Трехмерные геометрические модели построены в программе ANSYS SpaceClaim.

В расчетах использовались следующие параметры материалов: для жидкости плотность $\rho = 997$ кг/м³, вязкость $\mu = 4$ мПа·с; для стенки сосуда плотность $\rho_w = \rho = 997$ кг/м³, модуль Юнга $E = 7$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,49$.

2. Энергетические характеристики гидроупругой системы. Полную энергию E_{tot} гидроупругой системы, состоящей из упругой оболочки и заполняющей ее жидкости,

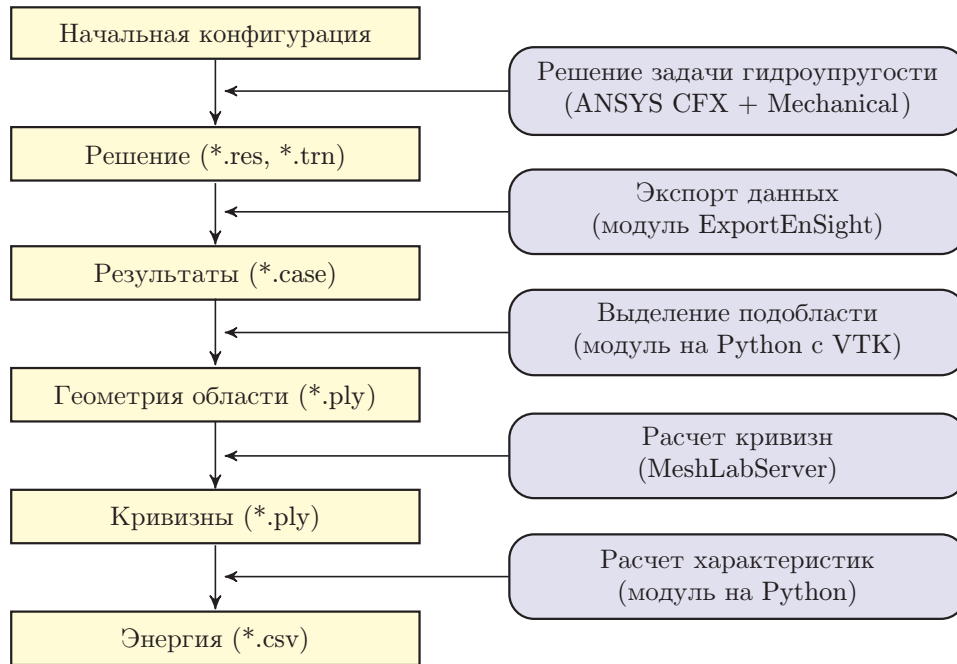


Рис. 3. Схема работы вычислительного комплекса

можно представить в виде суммы

$$E_{tot} = E_e + E_b + E_k,$$

где выражения для упругой энергии оболочки, энергии изгиба оболочки (функционала Уиллмора) и кинетической энергии жидкости записываются следующим образом:

$$E_e = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_S dS; \quad (5)$$

$$E_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_S H^2 dS; \quad (6)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho |\mathbf{v}|^2 dV. \quad (7)$$

Здесь H — средняя кривизна поверхности.

Наличие вязкости у жидкости приводит к диссипации энергии. Энергия, диссипируемая в единицу времени, определяется по формуле

$$E_v = 4\mu \int_V |\boldsymbol{\omega}|^2 dV,$$

где $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$. Энергия потока для модельных конфигураций вычислялась в [34].

3. Вычислительный комплекс. Для проведения расчетов использовался набор программ и собственных вычислительных модулей, объединенных в вычислительную цепочку, показанную на рис. 3. Основным преимуществом разработанного расчетного комплекса является автоматизация процесса обработки результатов численного моделирования. Разработанные модули позволяют вычислять геометрические и энергетические характеристики упругой компоненты исследуемой системы (кривизны, функционал Уиллмора, упругую

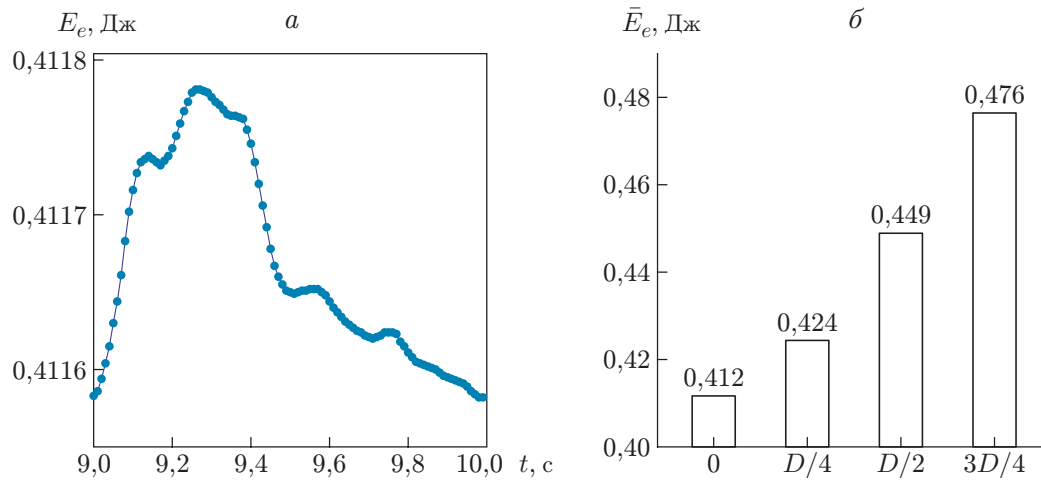


Рис. 4. Зависимость упругой энергии E_e от времени в течение одного периода (а) и средние значения этой энергии для дивертикула различного размера (б)

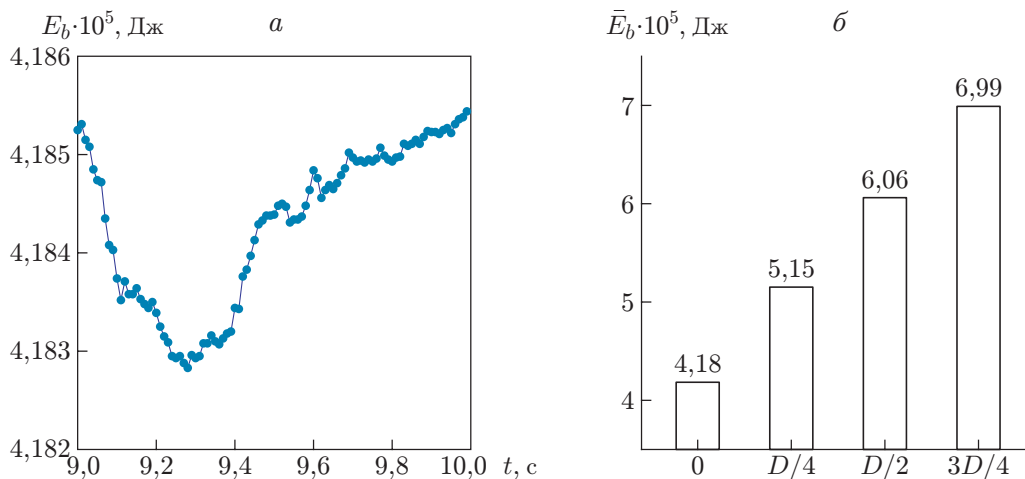


Рис. 5. Зависимость энергии изгиба E_b от времени в течение одного периода (а) и средние значения этой энергии для дивертикула различного размера (б)

энергию и др.) с сохранением данных для последующей обработки, анализа и сравнения с другими характеристиками гидроупругой системы. Подробное описание расчетного комплекса приведено в работе [34].

4. Результаты расчетов и их обсуждение. Результаты расчетов упругой энергии оболочки, энергии изгиба, кинетической энергии жидкости и мощности диссипации кинетической энергии жидкости за один период приведены на рис. 4–7.

На рис. 4,а показано изменение энергии в течение одного периода в отсутствие дивертикула (для других случаев зависимости аналогичны), на рис. 4,б — средние значения упругой энергии (5) за один период. Результаты расчетов показывают, что с увеличением размера дивертикула упругая энергия системы увеличивается вследствие увеличения общей площади поверхности упругой оболочки. Характер изменения энергии во времени соответствует характеру изменения скорости потока в системе.

Средняя за период энергия Уиллмора (6) с увеличением размера дивертикула изменяется аналогичным образом (см. рис. 5,б). Зависимость энергии Уиллмора от времени для

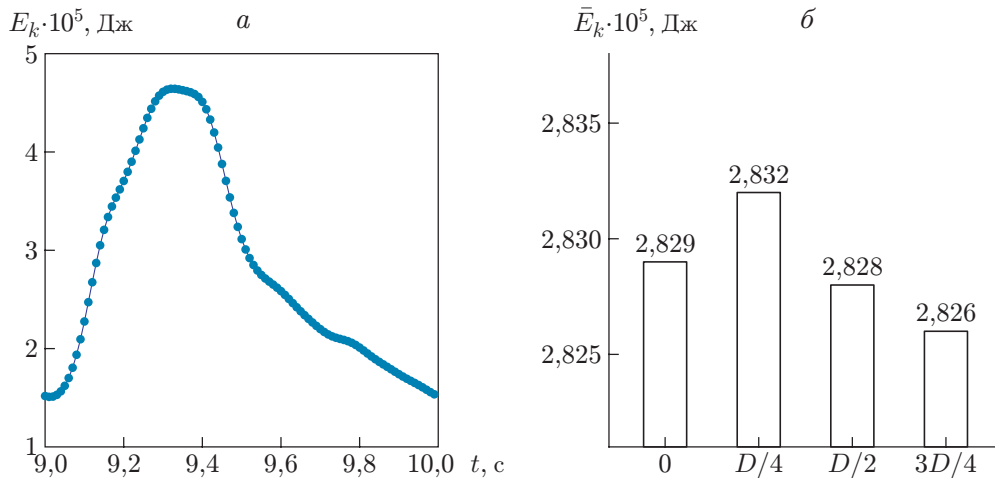


Рис. 6. Зависимость кинетической энергии E_k от времени в течение одного периода (а) и средние значения этой энергии для дивертикула различного размера (б)

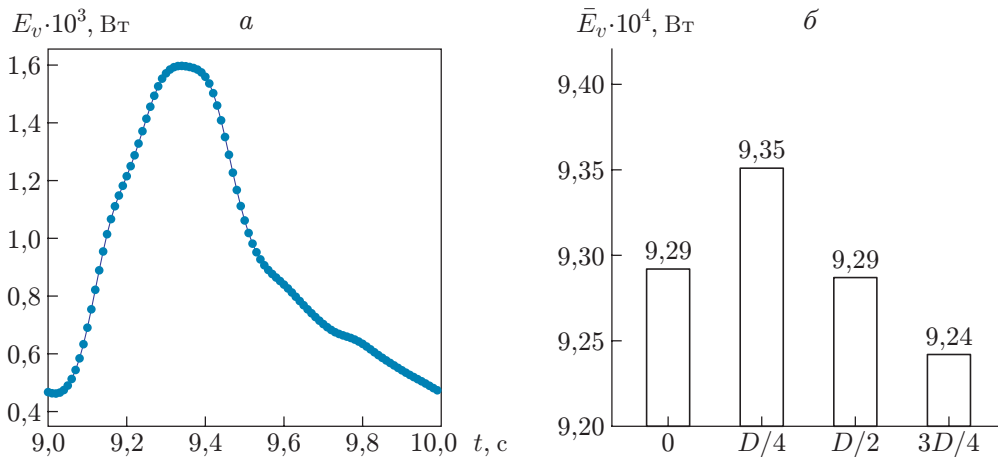


Рис. 7. Зависимость мощности вязкой диссипации кинетической энергии E_v от времени в течение одного периода (а) и средние значения этой энергии для дивертикула различного размера (б)

конфигурации без дивертикула приведена на рис. 5, а (зависимости для конфигураций при наличии дивертикула аналогичны). Зависимость $E_b(t)$ имеет характер, противоположный характеру зависимости $E_e(t)$, что обусловлено увеличением размера оболочки при увеличении расхода жидкости, которое приводит к уменьшению средней кривизны оболочки.

На рис. 6 показаны зависимость энергии от времени в течение одного периода для конфигурации без дивертикула (зависимость для других конфигураций аналогична) и средние за период значения кинетической энергии жидкости (7). При появлении дивертикула полная кинетическая энергия системы увеличивается. В то же время при увеличении размера дивертикула внутри него образуется дополнительный вихрь, что приводит к уменьшению скорости в аневризме, а следовательно, и суммарной кинетической энергии.

Характер изменения мощности диссипации кинетической энергии жидкости при наличии вязкости аналогичен (см. рис. 7). При увеличении размера дивертикула течение замедляется и диссипация энергии уменьшается. Зависимости кинетической энергии и ее

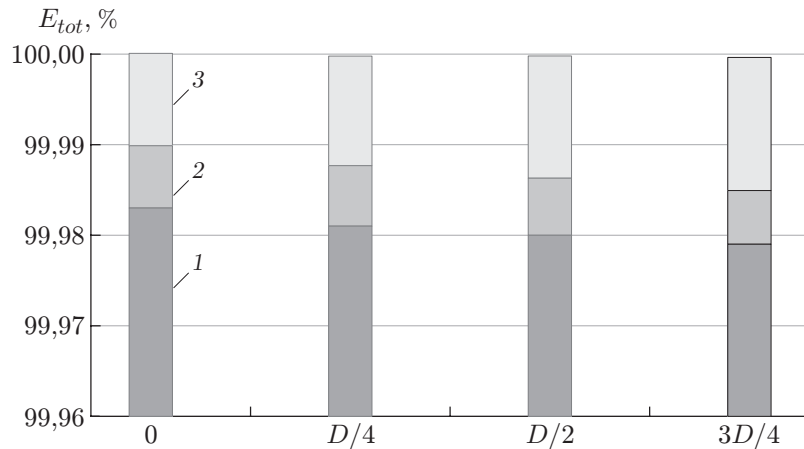


Рис. 8. Доли упругой энергии E_e (1), кинетической энергии E_k (2) и энергии изгибания E_b (3) в полной энергии системы E_{tot} для дивертикула различного размера

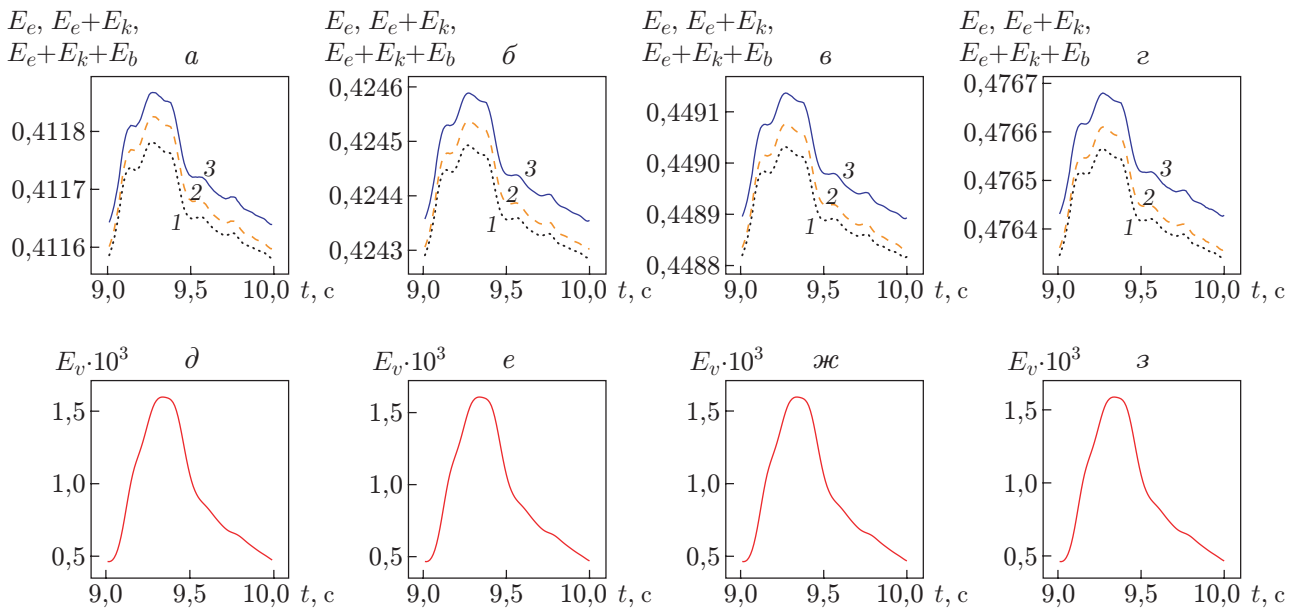


Рис. 9. Распределения компонент полной энергии за один период (а–г) и мощности, выделяющейся за счет вязкой диссипации (д–з), при различных значениях высоты дивертикула при выпячивании:
 а, д — $L = 0$, б, е — $L = D/4$, в, ж — $L = D/2$, г, з — $L = 3D/4$; 1 — E_e , 2 — $E_e + E_k$,
 3 — $E_e + E_k + E_b$

диссипации от времени имеют характер, аналогичный характеру изменения скорости на входе в систему (см. рис. 1, 6, 7).

Доли упругой энергии, энергии изгибания и кинетической энергии в полной энергии системы показаны на рис. 8. Видно, что основную долю полной энергии составляет упругая энергия оболочки. Кинетическая энергия жидкости и энергия изгибания приблизительно одинаковы. Распределение энергий для дивертикула различной конфигурации приведено на рис. 9.

Для всех конфигураций были построены диаграммы давление — скорость ($(p-v)$ -диаграммы) на входах в систему и аневризму, в зоне отхождения дивертикула (при наличии), на выходах из аневризмы и из системы (рис. 10, 11). Диаграммы имеют форму,

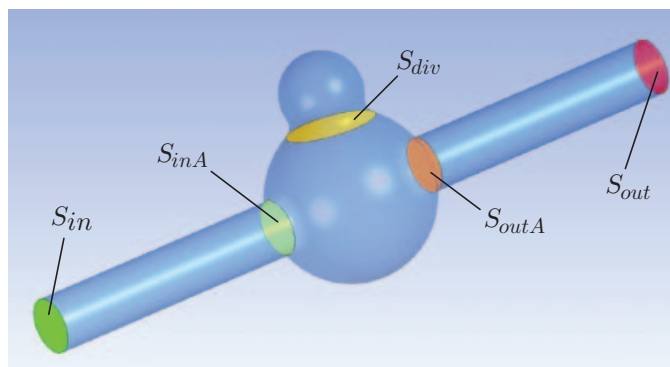


Рис. 10. Положения сечений, для которых проводились расчеты $(p-v)$ -диаграмм: S_{in} — входное сечение, S_{inA} — сечение непосредственно перед аневризмой, S_{div} — сечение между аневризмой и дивертикулом, S_{outA} — сечение непосредственно за аневризмой, S_{out} — выходное сечение

характерную для аневризм [38, 40]. Диаграмма ограничивает область, которая увеличивается в размерах вдоль по сосуду по мере приближения к аневризме, занимая максимальную площадь в области контакта аневризмы и дивертикула. Также на рис. 11 видно, что при изменении размера дивертикула вид $(p-v)$ -диаграмм не меняется.

Особенностью $(p-v)$ -диаграммы для ЦА является наличие “головки”, что обусловлено наличием дополнительного объема. При излечении аневризмы, т. е. при исключении ее из кровотока, “головка” уменьшалась и диаграмма “сжималась” по ширине, сохраняя линейный размер по диагонали. Такая форма диаграммы отличает ее от диаграммы для сосудов с артериовенозной мальформацией, для которой характерна форма без “головки” (“выпуклое брюшко”, “корявая спинка”) [38, 40]. Артериовенозная мальформация характеризуется большей скоростью и меньшим давлением по сравнению с нормальным кровотоком. При успешной операции эта диаграмма смещается влево и вверх, в направлении уменьшения скорости и увеличения давления. Такие выводы о виде и поведении $(p-v)$ -диаграмм в ходе нейрохирургических операций сделаны на основе анализа данных мониторинга более 70 нейрохирургических операций, осуществленного в Национальном медицинском исследовательском центре им. Е. Н. Мешалкина [38].

Результаты настоящей работы позволяют сделать вывод, что $(p-v)$ -диаграммы являются новой информативной характеристикой гидроупругой системы, это единственная на сегодняшний день информация о давлении и скорости непосредственно в сосудах головного мозга *in vivo*, причем полученная в ходе исправления аномалии кровотока. Эвристическая модель кровотока, основанная на $(p-v)$ -диаграммах и представляющая собой уравнение нелинейного осциллятора Ван дер Поля — Дуффинга, применялась для исследования различных режимов кровотока; показана ее эффективность [41, 42].

Заключение. Представленный в работе вычислительный комплекс [34] применим для расчета различных интегральных характеристик гидроупругой системы. Рассчитанные с его помощью параметры гидроупругой системы, моделирующей фузиформную аневризму с дивертикулом различного размера, имеют значения, сопоставимые с имеющимися в литературе [35].

Впервые при компьютерном моделировании гидроупругой системы получены диаграммы давление — скорость, соответствующие наблюдаемому в ходе внутрисосудистого мониторинга кровотока в церебральных сосудах при наличии артериальной аневризмы. Результаты расчетов подтверждают нелинейный характер взаимодействия потока с упругой стенкой. Показано, что влияние аневризмы достаточно быстро ослабевает вниз по потоку.

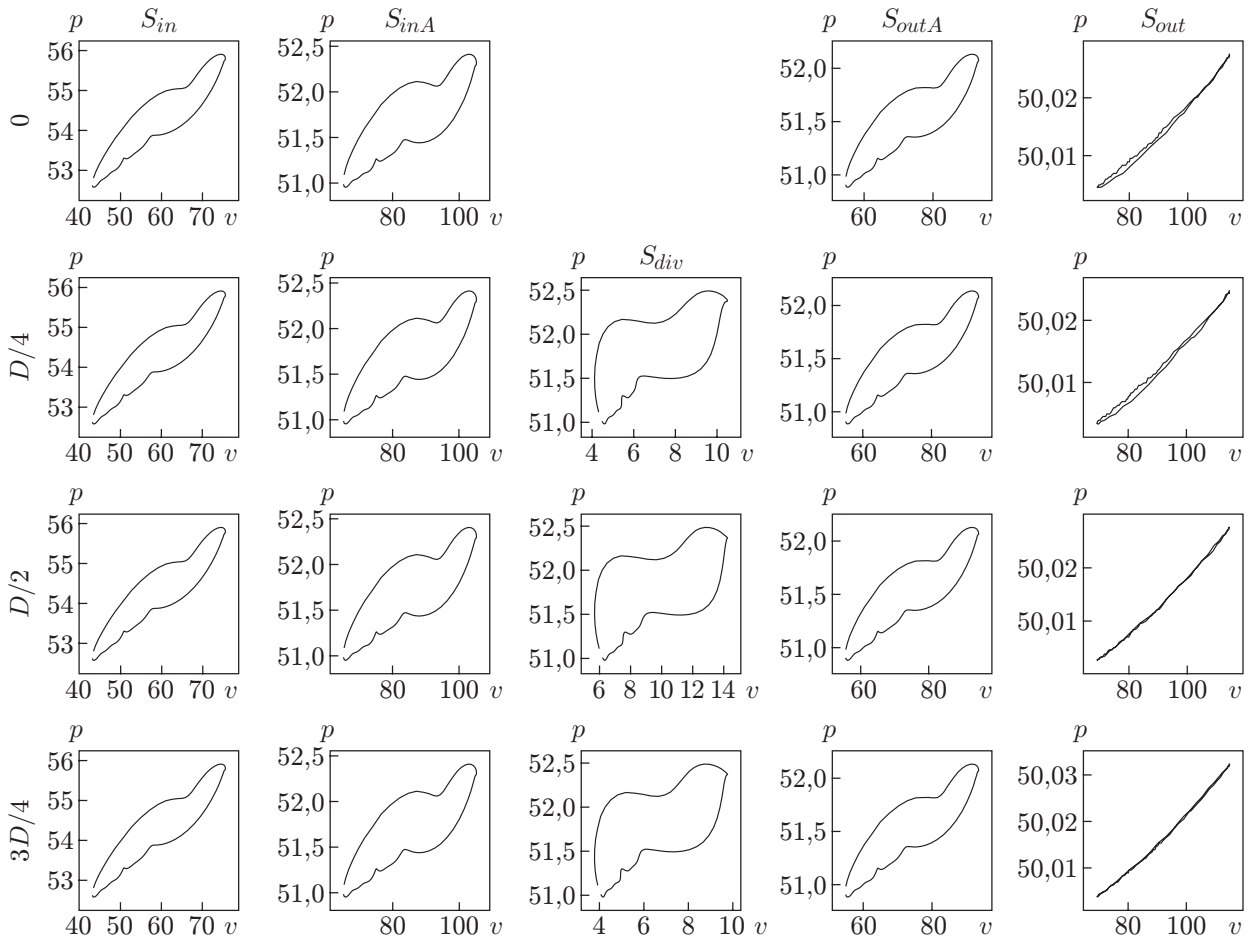


Рис. 11. Диаграммы скорость — давление для дивертикула различного размера и сечений, показанных на рис. 10

Получены качественная и количественная оценки вклада различных компонент полной энергии системы. Результаты расчетов показывают, что взаимодействие потока с упругой стенкой сосуда имеет двухмасштабный характер. В потоке давление, играющее роль его внутренней энергии, превышает его кинетическую энергию, что приводит к упругому расширению стенки сосуда, принимающего форму большого пузыря, и его сохранению. Величина кинетической энергии потока сопоставима с энергией изгиба мембраны и вызывает ее колебания.

Авторы выражают благодарность П. И. Плотникову за внимание к геометрическим аспектам задач гидроупругости и А. В. Дубовому за обсуждение медицинских аспектов задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2007. Т. 7.
2. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity // Applied mathematical sciences. N. Y.: Springer-Verlag, 2005.
3. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967.

4. **Ogden R. W.** Nonlinear continuum mechanics and modeling the elasticity of soft biological tissues with a focus on artery walls // *Biomechanics: Trends in modeling and simulation*. Cham: Springer Intern. Publ., 2017. P. 83–156. (Studies in mechanobiology, tissue engineering and biomaterials; N 20).
5. **Tobe Y., Yagi T., Suto K., et al.** Investigation of wall thinning mechanisms in human cerebral aneurysms by pathological engineering analysis of smooth muscle cells and hemodynamics // *Proc. of the Bioengng conf. annual meeting BED/JSME, Nagoya (Japan), Jan. 19–20, 2017*. Tokyo: Japan Soc. of Mech. Engrs, 2017. V. 2017.29. 2C42.
6. **Rinkel G. J. E., Djibuti M., Algra A., van Gijn J.** Prevalence and risk of rupture of intracranial aneurysms // *Stroke*. 1998. V. 29, N 1. P. 251–256.
7. **Castro M. A.** Understanding the role of hemodynamics in the initiation, progression, rupture, and treatment outcome of cerebral aneurysm from medical image-based computational studies // *Intern. Scholarly Res. Notices*. 2013. V. 2013. 602707.
8. **Ivlev D. A., Shirinli S. N., Guria K. G., et al.** Control of fibrinolytic drug injection via real-time ultrasonic monitoring of blood coagulation // *PLOS One*. 2019. V. 14, N 2. e0211646.
9. **Sforza D. M., Putman C. M., Cebral J. R.** Computational fluid dynamics in brain aneurysms // *Intern. J. Numer. Methods Biomed. Engng*. 2012. V. 28, N 6/7. P. 801–808.
10. **Boussel L., Rayz V., McCulloch C., et al.** Aneurysm growth occurs at region of low wall shear stress // *Stroke*. 2008. V. 39, N 11. P. 2997–3002.
11. **Zhao X., Gold N., Fang Y., et al.** Vertebral artery fusiform aneurysm geometry in predicting rupture risk // *Roy. Soc. Open Sci*. 2018. V. 5, N 10. 180780.
12. **Baharoglu M. I., Lauric A., Wu C., et al.** Deviation from optimal vascular caliber control at middle cerebral artery bifurcations harboring aneurysms // *J. Biomech*. 2014. V. 47, N 13. P. 3318–3324.
13. **Cebral J. R., Mut F., Weir J., Putman C. M.** Association of hemodynamic characteristics and cerebral aneurysm rupture // *Amer. J. Neuroradiology*. 2011. V. 32, N 2. P. 264–270.
14. **Lauric A., Miller E. L., Baharoglu M. I., Malek A. M.** 3D shape analysis of intracranial aneurysms using the writhe number as a discriminant for rupture // *Ann. Biomed. Engng*. 2011. V. 39, N 5. P. 1457–1469.
15. **Wright S. N., Kochunov P., Mut F., et al.** Digital reconstruction and morphometric analysis of human brain arterial vasculature from magnetic resonance angiography // *NeuroImage*. 2013. V. 82. P. 170–181.
16. **Gondar R., Gautschi O. P., Cuony J., et al.** Unruptured intracranial aneurysm follow-up and treatment after morphological change is safe: Observational study and systematic review // *J. Neurology, Neurosurgery Psychiatry*. 2016. V. 87, N 12. P. 1277–1282.
17. **Żyłkowski J., Kunert P., Jaworski M., et al.** Changes of size and shape of small, unruptured intracranial aneurysms in repeated computed tomography angiography studies // *Videosurgery Other Miniinvasive Tech*. 2015. V. 10, N 2. P. 178–188.
18. **Canham P. B.** The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell // *J. Theoret. Biology*. 1970. V. 26, N 1. P. 61–81.
19. **Helfrich W.** Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments // *Z. Naturforsch. C*. 1973. Bd 28, N 11/12. S. 693–703.
20. **Blaschke W.** *Vorlesungen Über Differentialgeometrie. 1. Elementare Differentialgeometrie*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1945. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).
21. **Willmore T. J.** *Total curvature in Riemannian geometry*. Harlow: Ellis Horwood, 1982.
22. **Da Lio F., Palmurella F., Rivière T.** A resolution of the Poisson problem for elastic plates // *Arch. Rational Mech. Anal*. 2020. V. 236, N 3. P. 1593–1676.
23. **Chen J., Li Y.** Bubble tree of branched conformal immersions and applications to the Willmore functional // *Amer. J. Math*. 2014. V. 136, N 4. P. 1107–1154.

24. **Simon L.** Lectures on geometric measure theory. Canberra: Centre for Math. Anal.: Australian Nat. Univ., 1984. (Proc. of the Centre for Math. Anal.; N 3).
25. **Simon L.** Existence of surfaces minimizing the Willmore functional // *Comm. Anal. Geometry*. 1993. V. 1, N 2. P. 281–326.
26. **Mondino A., Rivière T.** Immersed spheres of finite total curvature into manifolds // *Adv. Calculus Variat.* 2013. V. 7, N 4. P. 493–538.
27. **Klein Y., Efrati E., Sharon E.** Shaping of elastic sheets by prescription of non-Euclidean metrics // *Science*. 2007. V. 315, N 5815. P. 1116–1120.
28. **Голушко И. Ю., Рошаль С. Б.** Трубочатые липидные мембраны, вытягиваемые из везикулы: зависимость равновесия системы от кривизны липидного бислоя // *Журн. эксперим. и теорет. физики*. 2016. Т. 149, № 1. С. 192–199.
29. **Plotnikov P. I., Toland J. F.** Variational problems in the theory of hydroelastic waves // *Philos. Trans. Roy. Soc. A: Math., Phys. Engng Sci.* 2018. V. 376, N 2129. 20170343.
30. **Плотников П. И., Кузнецов И. В.** Об уравнениях движений нелинейной гидроупругой структуры // *ПМТФ*. 2008. Т. 49, № 4. С. 174–191.
31. **Cheng C. H. A., Shkoller S.** The interaction of the 3D Navier — Stokes equations with a moving nonlinear Koiter elastic shell // *SIAM J. Math. Anal.* 2010. V. 42, N 3. P. 1094–1155.
32. **Muha B., Čanić S.** Existence of a solution to a fluid-multi-layered-structure interaction problem // *J. Different. Equat.* 2014. V. 256, N 2. P. 658–706.
33. **Dobroserdova T., Liang F., Panasenko G., Vassilevski Y.** Multiscale models of blood flow in the compliant aortic bifurcation // *Appl. Math. Lett.* 2019. V. 93. P. 98–104.
34. **Маматюков М. Ю., Хе А. К., Паршин Д. В. и др.** Об энергии гидроупругой системы: течение крови в артерии с церебральной аневризмой // *ПМТФ*. 2019. Т. 60, № 6. С. 3–16.
35. **Parshin D. V., Lipovka A. I., Yunoshev A. S., et al.** On the optimal choice of a hyperelastic model of ruptured and unruptured cerebral aneurysm // *Scientific Rep.* 2019. V. 9. 15865.
36. **Pedley T. J.** The fluid mechanics of large blood vessels: Cambridge monographs on mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
37. **Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C., Seed W. A.** The mechanics of the circulation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.
38. **Хе А. К., Черевко А. А., Чупахин А. П. и др.** Мониторинг гемодинамики сосудов головного мозга // *ПМТФ*. 2017. Т. 58, № 5. С. 7–16.
39. **Yanchenko A. A., Cherevko A. A., Chupakhin A. P., et al.** Nonstationary hemodynamics modelling in a cerebral aneurysm of a blood vessel // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell.* 2014. V. 29, N 5. P. 307–317.
40. **Khe A. K., Cherevko A. A., Chupakhin A. P., et al.** Endovascular blood flow measurement system // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2016. V. 722. 012041.
41. **Cherevko A. A., Bord E. E., Khe A. K., et al.** The analysis of solutions behaviour of Van der Pol Duffing equation describing local brain hemodynamics // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 894. 012012.
42. **Parshin D. V., Ufimtseva I. V., Cherevko A. A., et al.** Differential properties of Van der Pol — Duffing mathematical model of cerebrovascular haemodynamics based on clinical measurements // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2016. V. 722. 012030.

*Поступила в редакцию 17/IV 2020 г.,
после доработки — 17/IV 2020 г.
Принята к публикации 27/IV 2020 г.*