

М. П. Стронгин, К. В. Кошелев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ОБТЕКАНИИ ОДИНОЧНОЙ ГОРЯЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

На основе численного решения нестационарных уравнений Навье — Стокса анализируется поведение коэффициентов сопротивления и теплообмена испаряющейся сферической частицы в реагирующем высокотемпературном потоке. В процессе установления показана возможность получения (при наличии химической реакции) отрицательного коэффициента сопротивления. Отмечено, что в нестационарном случае возникновение зоны интенсивной химической реакции за кормой сферы вызывает волну давления, прохождение которой через частицу приводит к значительным колебаниям коэффициента сопротивления и в меньшей степени коэффициента теплообмена.

Задача о поведении дисперсной фазы в реагирующем потоке возникает во многих технологических процессах (химия, плазменная технология, энергетика, горение ракетных топлив и др.) [1, 2]. В случае малой объемной концентрации (массовая концентрация может быть значительна) одна из центральных проблем заключается в изучении взаимодействия газового потока и одиночной частицы.

В данной работе рассматривается поведение высокотемпературного реагирующего низкоскоростного потока при обтекании сферической частицы.

Решение этой задачи при $Re \approx 100$, значительной разнице температур натекающего потока T_∞ и поверхности сферы T_s довольно затруднительно. В то же время в процессах плазменной технологии, особенно для испаряющейся частицы, рециркуляционная зона за кормой сферы может определять поведение потока.

Используются следующие предположения: течение газа осесимметричное; числа Кнудсена малы; испарение сферы не меняет ее размеров; натекающий поток полагается стационарным.

Для математической постановки используются нестационарные уравнения Навье — Стокса: неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta) = 0, \quad (1)$$

движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_r v_\theta) - \frac{\rho v_\theta^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_{rr}) + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta G_{r\theta}) + \frac{2}{3} \frac{1}{r} \operatorname{div} v - \frac{2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \operatorname{ctg} \theta + v_r \right), \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta^2) + \frac{\rho v_r v_\theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta G_{\theta\theta}) + \frac{4}{3} \frac{\mu}{r} \operatorname{div} v - \frac{2\mu \operatorname{ctg} \theta}{r^2} (v_r + v_\theta \operatorname{ctg} \theta), \quad (3) \end{aligned}$$

$$G_{rr} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\operatorname{div} v}{3} \right),$$

$$G_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} - \frac{\operatorname{div} v}{3} \right), \quad G_{r\theta} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right),$$

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta),$$

энергии

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta \partial T}{r \partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} \sum_{\alpha=1}^N c_p^{\alpha,r} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \sum_{\alpha=1}^N c_p^{\alpha,\theta} - \sum_{\alpha=1}^N h_\alpha R_\alpha; \quad (4)$$

уравнения для отдельных компонентов

$$\rho \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial y_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta \partial y_\alpha}{r \partial \theta} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (j_r^\alpha) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta^\alpha) + R_\alpha, \quad (5)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N y_\alpha = 1.$$

Здесь t — время; r и θ — сферические координаты; v_r и v_θ — компоненты вектора скорости v по направлениям r и θ соответственно; ρ — плотность; p — давление; T — температура; μ — динамическая вязкость; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; λ — коэффициент теплопроводности; N — количество компонентов смеси; y_α — массовая концентрация α -компонента; $j^\alpha = (j_r^\alpha, j_\theta^\alpha)$ — вектор плотности диффузионного потока α -компонента; R_α — массовая скорость реакции α -компонента; c_p^α и h_α — теплоемкость при постоянном давлении и энтальпия α -компонента. Плотность диффузионного потока определяется соотношениями Стефана — Максвелла

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{\rho D_{\alpha\beta}} \left(\frac{j_r^\beta}{y_\beta} - \frac{j_r^\alpha}{y_\alpha} \right) = \frac{\partial x_\alpha}{\partial r}, \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{\rho D_{\alpha\beta}} \left(\frac{j_\theta^\beta}{y_\beta} - \frac{j_\theta^\alpha}{y_\alpha} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \theta},$$

где $x_\alpha = m y_\alpha / m_\alpha$ — молярная концентрация; m и m_α — молярная масса смеси и α -компонента соответственно; $D_{\alpha\beta}$ — коэффициент бинарной диффузии.

Массовая скорость одной брутто-реакции рассчитывается так:

$$R_\alpha = - m_\alpha k \frac{\rho y_1}{m_1} \frac{\rho y_2}{m_2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad R_3 = - R_1 - R_2. \quad (7)$$

Здесь топливо полагается компонентом 1, окислитель — компонентом 2, продукт реакции — 3. Коэффициент k прямой химической реакции определяется аррениусовской зависимостью:

$$k = k_0 T^2 \exp \left(- \frac{E}{RT} \right).$$

Используется уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho RT / m. \quad (8)$$

Для получения коэффициента вязкости используется формула Будденбергера и Уилки

$$\mu = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha^2 \left(\frac{\mu_\alpha}{x_\alpha} + 1,385 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta m}{m_\alpha \rho D_{\alpha\beta}} \right)^{-1}, \quad (9)$$

где μ_α — коэффициент вязкости α -компонента.

Коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \sum_{\alpha=1}^N \left(\lambda_{\alpha} x_{\alpha} \left[x_{\alpha} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N a_{\beta\alpha} x_{\beta} \right]^{-1} \right), \quad (10)$$

$$a_{\beta\alpha} = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right)^{1/8} \left(\frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{\sigma_{\beta\beta}} \right) \left(\frac{\varepsilon_{\alpha\alpha}}{\varepsilon_{\beta\beta}} \right)^{0,085} \right]^2,$$

$\varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\alpha}$ — параметры потенциала Леннарда — Джонса;

$$m = \left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{y_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{-1}, \quad c_p = \sum_{\alpha=1}^N c_p^{\alpha} y_{\alpha}. \quad (11)$$

Энтальпия вычисляется как

$$h_{\alpha} = \Delta h_{\alpha} + \int_{T_0}^T c_p^{\alpha} dT, \quad (12)$$

где Δh_{α} — энтальпия образования α -компонента при стандартных условиях.

Определим коэффициент бинарной диффузии

$$D_{\alpha\beta} = \frac{0,0166 \sqrt{\frac{m_{\alpha} + m_{\beta}}{m_{\alpha} m_{\beta}}} T^{1,67}}{p \sigma_{\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta}/k)^{0,17}}, \quad (13)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta}}{2}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{\varepsilon_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\beta\beta}},$$

k — константа Больцмана. Значения μ_{α} , λ_{α} , c_p^{α} , m_{α} полагаются функциями температуры T .

На поверхности сферы ставятся условия прилипания и равенства температуры поверхности температуре испарения материала

$$v_{\theta} = 0, \quad T = T_s, \quad (14)$$

а также условие зависимости скорости испарения топлива от теплового потока в сферу

$$L \rho_1 (v_r)_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \rho_{\alpha} (v_r)_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 2 \dots N. \quad (15)$$

Здесь L — скрытая теплота испарения. Принимая во внимание, что $\sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} (v_r)_{\alpha} = \rho v_r$, вместо $\rho_N (v_r)_N = 0$ используется равенство

$$L \rho v_r = \lambda \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (16)$$

Запишем условия невозмущенного потока вдали от сферы ($r = R_{\infty}$)

$$v_r = -v_{\infty} \cos \theta, \quad v_{\theta} = v_{\infty} \sin \theta, \quad T = T_{\infty}, \quad p = p_{\infty}, \quad y_{\alpha} = (y_{\alpha})_{\infty} \quad (17)$$

и осевой симметрии

$$v_{\theta} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial \theta} = 0. \quad (18)$$

В качестве начальных условий использовалось поле течения, соответствующее стоксовому режиму обтекания.

Задача (1) — (18) численно решалась с помощью одного из вариантов метода расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям. Результаты тестовых расчетов и стационарных решений приведены в [3, 4].

На рис. 1 представлены зависимости от безразмерного времени t коэффициентов сопротивления c_D и теплообмена Nu при $Re_{\infty} = 40$, $M_{\infty} = 0$,

$T_s/T_\infty = 0,4$. Начальный индукционный период, идущий примерно до $t = 15$, обрывается резким всплеском коэффициента сопротивления. Это обусловлено волной давления, дошедшей из зоны интенсивной химической реакции за кормой сферы до ее поверхности. Ширина пиков колебаний как раз соответствует времени прохождения волной давления диаметра частицы. Далее коэффициент сопротивления устанавливается.

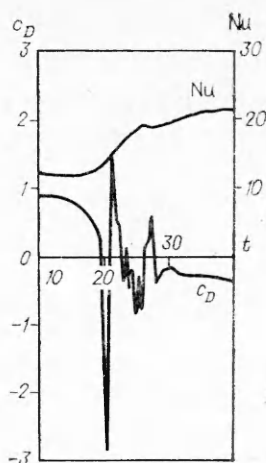


Рис. 1.

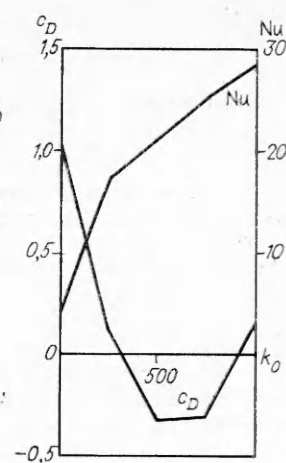


Рис. 2.

Замечательной особенностью данного режима является отрицательность установившегося коэффициента сопротивления. Данный эффект имеет естественное объяснение, связанное с резким усилением теплообмена в кормовой части (что обусловлено интенсивной химической реакцией именно за кормой сферы). Как видно, число Нуссельта не столь чувствительно к прохождению волны давления через частицу, однако этот переход приводит к значительному повышению коэффициента теплообмена.

Интересна зависимость установившегося коэффициента сопротивления c_D от константы скорости химической реакции k_0 (при постоянстве всех остальных параметров). Как видно из рис. 2, существует довольно узкая зона изменения k_0 , при котором коэффициент сопротивления остается отрицательным. По-видимому, этим обусловлено практически полное отсутствие литературных данных о расчетах, в которых был бы отмечен отрицательный коэффициент сопротивления частиц. Однако существуют экспериментальные наблюдения, в которых частицы движутся навстречу потоку, в частности при впрыске топлива в камеру сгорания ракетных двигателей.

Таким образом, предлагаемая модель и метод ее численной реализации позволяют надежно рассчитать параметры потока, обтекающего частицу в условиях резкой неоднородности параметров, что помогает выявить новые интересные эффекты, связанные с большим числом химических реакций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clift R., Grace J. A., Weber M. E. Bubbles, drops and particles.— N. Y.: Acad. Press, 1978.
2. Lee Y. S., Chyou Y. P., Pfender E. Particle dynamics and particle heat and mass transfer in thermal plasmas. Pt II. Particle heat and mass transfer in thermal plasmas // Plasma Chemistry and Plasma Proc.— 1985.— 5, N 4.— P. 391—414.
3. Стронгин М. П. Математическое моделирование потоков в высокотемпературных технологиях.— Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1989.
4. Strongin M. P., Koshelev K. B. The reacting gas flowing the evaporated particle special features // Plasma jets in the development of new material technology.— Utrecht: VSP, 1990.— P. 65—74.

г. Барнаул