

Произведя интегрирование, найдем суммарный эквивалентный ток I

$$I = 2(1 - \mu_r^{-1}) DqH_0 \quad (2)$$

После замены внешнего поля эквивалентным током рассмотрим получившуюся магнитную цепь, общий магнитный поток Φ_1 , который определим, используя [1]

$$\Phi_1 = H_0(1 - \mu_r^{-1})\mu_0 AS \quad (3)$$

$$A = -\frac{P_1(\alpha)Q_1'(\alpha)}{1 - P_1(\alpha)Q_1'(\alpha)/\mu_r Q_1(\alpha)} \frac{1}{Q_1(\alpha)}$$

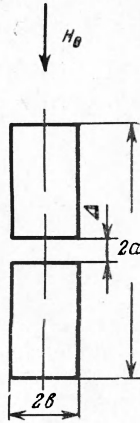
Здесь S — площадь поперечного сечения эллипсоида, P_1 — функция Лежандра первого рода от указанного аргумента.

Найдем теперь общее магнитное сопротивление R_1 всей рассматриваемой цепи без воздушного зазора

$$R_1 = \frac{I}{\Phi_1} = \frac{2Dq}{AS\mu_0} \quad (4)$$

Здесь μ_0 — магнитная постоянная. Наличие воздушного зазора вызовет увеличение общего магнитного сопротивления всей цепи на величину R_2

$$R_2 = \frac{\Delta}{\mu_0 S} \quad (5)$$



Фиг. 1

(где Δ — толщина воздушного зазора) и уменьшение общего магнитного потока Φ_1 , а следовательно, и внешнего поля эллипсоида, которое можно охарактеризовать коэффициентом K

$$K = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{\Delta A}{2qD} = 1 + \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{Q_1(\alpha)}{Q_1'(\alpha)} \right)^{-1} \quad (6)$$

Здесь Φ_1 — общий магнитный поток без зазора, Φ_2 — общий магнитный поток с зазором.

Пример. Определить коэффициент K для стержня с разъемом в средней части, изготовленного из стали, магнитная проницаемость которой $\mu_r = 185$, с соотношением размеров $a/b = 10.1$, $\Delta/b = 0.1$. В этом случае коэффициент K , вычисленный по формуле (6), равен 1.18. Аналогичная величина, определенная экспериментальным путем, равна 1.13. Расхождение расчета с экспериментом составило 4.5%.

Сравнение экспериментальных данных с расчетными показало, что формула (6) дает удовлетворительные результаты при $\Delta/b \leq 0.2$.

Поступила 26 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.

УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Ф. Филиппов (Киев)

Турбулентное течение несжимаемой жидкости в принципе удовлетворяет хорошо известным уравнениям Рейнольдса (см., например, [1]). Однако решить эти уравнения из-за их чрезвычайной сложности до сих пор не удалось. Поэтому возникает задача о выводе других, более простых уравнений, сохраняющих все основные черты турбулентного течения, но в большей мере, чем уравнения Рейнольдса, поддающихся исследованию и приближенному решению.

Ниже приводится вывод таких уравнений. В основу вывода положено предположение, что длина волны λ турбулентных пульсаций существенно меньше размеров системы L . Это предположение позволяет написать систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для фурье-амплитуд быстро меняющейся компоненты поля скоростей, а затем, после введения функции распределения, получить уравнение для функции распределения.

Уравнение для осредненного поля скоростей по существу не отличается от соответствующего уравнения Рейнольдса.

Полученная система уравнений может быть использована для численного расчета как спектра мелкомасштабных пульсаций при заданном среднем поле, так и самого среднего поля, формирующегося под воздействием этих пульсаций.

1. Пульсации с малой длиной волны. Пусть течение жидкости характеризуется числом Рейнольдса R . Тогда для волновых чисел тех пульсаций (возмущений), которые быстро затухают под действием вязкости, справедливо неравенство $k = 2\pi/\lambda \gg R/L$, где L — размеры системы. На возмущения с волновыми числами, меньшими R/L , вязкость уже не оказывает существенного воздействия, но и они затухают в силу устойчивости ламинарного течения, пока $R < R_*$, где R_* — критическое число Рейнольдса. Вообще невязкий механизм затухания может действовать на возмущения, волновые числа которых не превышают R_*/L .

Как только R становится больше R_* , появляются незатухающие возмущения с волновыми числами в интервале $R/L > k > R_*/L$.

Но так как обычно $R_* \approx 1000$, то отсюда следует, что за возникновение турбулентности ответственны возмущения, имеющие крайне малую, по сравнению с размерами системы, длину волны.

Предположим, что возмущения с такими большими волновыми числами доминируют не только на начальной стадии турбулизации, но и в потоке с развитой турбулентностью. Тогда скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и давление $p(\mathbf{r}, t)$ турбулентного течения можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) + p'(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

Функции $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$ плавно зависят от координат и времени, существенно изменяясь лишь на расстояниях, сравнимых с характерными размерами системы, а $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$, $p'(\mathbf{r}, t)$ быстро осциллируют в пространстве и времени.

Введем лагранжевые переменные, связанные с полем скоростей

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t) = (\partial \mathbf{r} / \partial t)_{\mathbf{r}_0}$$

и будем искать $\mathbf{u}'(\mathbf{r}_0, t)$ и $p'(\mathbf{r}_0, t)$ в виде

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}_0, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0}, \quad p'(\mathbf{r}_0, t) = \sum_{\mathbf{k}} p(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \quad (1.2)$$

Амплитуды $\mathbf{u}(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t)$ и $p(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t)$ содержат лишь плавную зависимость от \mathbf{r}_0 , сильная зависимость включена в экспоненциальные множители.

Объем V_0 , в котором справедливы разложения (1.2), выбирается в некоторой окрестности точки \mathbf{r}_0 . Он должен быть достаточно малым по сравнению с размерами системы, чтобы все плавно изменяющиеся функции можно было считать внутри него почти постоянными. В то же время его линейные размеры должны быть достаточно большими, по сравнению с длиной волны тех возмущений, которые интенсивно затухают под действием вязкости. Такой выбор объема V_0 возможен, если число Рейнольдса для рассматриваемого турбулентного течения велико.

2. Уравнения движения для фурье-амплитуд и среднего поля. Функции $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$ — решения уравнения Навье — Стокса [2] и уравнения непрерывности

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\rho^{-1} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, а ν — кинематическая вязкость.

Чтобы найти систему уравнений, которой удовлетворяют фурье — амплитуды разложения (1.2), подставим (1.1) в (2.1), и после умножения левой и правой частей на $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)$ проинтегрируем получившееся уравнение по объему V_0 . Ограничиваясь лишь самыми старшими членами разложения по степеням kL , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{q}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{q}, t) \nabla) \mathbf{U} + i \Sigma (\mathbf{q}' \mathbf{u}(\mathbf{k}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t) = \\ = -\rho^{-1} \mathbf{q}' p(\mathbf{q}, t) - \nu (q^2 - i \text{div } \mathbf{q}') \mathbf{u}(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Производные функции $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ по \mathbf{r} в уравнении (2.2) следует брать в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$. Возникающий от перехода к лагранжевым переменным вектор $\mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q}, \mathbf{r}_0, t)$ определяется следующим образом $q'_x = q_x \partial x_0 / \partial x + q_y \partial y_0 / \partial x + q_z \partial z_0 / \partial x$ и аналогично для компонент q'_y , q'_z .

Из уравнения непрерывности (2.1), следует, что

$$\text{div } \mathbf{U} = 0 \quad (\mathbf{q}' \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)) = 0$$

Так как составляющая вектора $\mathbf{u}(\mathbf{q}, t)$ вдоль \mathbf{q}' равна нулю, то можно положить

$$\begin{aligned} u_x(\mathbf{q}, t) &= \cos \theta' \cos \varphi' a(\mathbf{q}, t) - \sin \varphi' b(\mathbf{q}, t) \\ u_y(\mathbf{q}, t) &= \cos \theta' \sin \varphi' a(\mathbf{q}, t) + \cos \varphi' b(\mathbf{q}, t) \\ u_z(\mathbf{q}, t) &= -\sin \theta' a(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь θ' и φ' — углы вектора \mathbf{q}' в сферической системе координат.

Переход к уравнениям для $a(\mathbf{q}, t)$ и $b(\mathbf{q}, t)$ можно сделать, если подставить (2.3) в (2.2) и исключить $p(\mathbf{q}, t)$

$$\begin{aligned} da(\mathbf{q}, t)/dt &= A_{11}a(\mathbf{q}, t) + A_{12}b(\mathbf{q}, t) - i \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} q' \{ [\sin \theta' \cos \theta_1' \cos(\varphi' - \varphi_1') - \\ &\quad - \cos \theta' \sin \theta_1'] a(\mathbf{k}_1, t) + \sin \theta' \sin(\varphi' - \varphi_1') b(\mathbf{k}_1, t) \} \{ [\cos \theta' \cos \theta_2' \cos(\varphi' - \varphi_2') + \\ &\quad + \sin \theta' \sin \theta_2'] a(\mathbf{k}_2, t) + \cos \theta' \sin(\varphi' - \varphi_2') b(\mathbf{k}_2, t) \} \\ db(\mathbf{q}, t)/dt &= A_{21}a(\mathbf{q}, t) + A_{22}b(\mathbf{q}, t) - \\ &\quad - i \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} q' \{ [\sin \theta' \cos \theta_1' \cos(\varphi' - \varphi_1') - \cos \theta' \sin \theta_1'] a(\mathbf{k}_1, t) + \\ &\quad + \sin \theta' \sin(\varphi' - \varphi_1') b(\mathbf{k}_1, t) \} \{ -\cos \theta_2' \sin(\varphi' - \varphi_2') a(\mathbf{k}_2, t) + \cos(\varphi' - \varphi_2') b(\mathbf{k}_2, t) \} \quad (2.4) \\ A_{11} &= -v q'^2 + iv \operatorname{div} \mathbf{q}' - \cos^2 \theta' \cos^2 \varphi' \partial U_x / \partial x - \cos^2 \theta' \sin^2 \varphi' \partial U_x / \partial y + \\ &\quad + \sin \theta' \cos \theta' \cos \varphi' \partial U_x / \partial z - \cos^2 \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_y / \partial x - \cos^2 \theta' \sin^2 \varphi' \partial U_y / \partial y + \\ &\quad + \sin \theta' \cos \theta' \sin \varphi' \partial U_y / \partial z + \sin \theta' \cos \theta' \cos \varphi' \partial U_z / \partial x + \\ &\quad + \sin \theta' \cos \theta' \sin \varphi' \partial U_z / \partial y - \sin^2 \theta' \partial U_z / \partial z \\ A_{12} &= \cos \theta' d\varphi' / dt + \cos \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_x / \partial x - \cos \theta' \cos^2 \varphi' \partial U_x / \partial y + \cos \theta' \sin^2 \varphi' \times \\ &\quad \times \partial U_y / \partial x - \cos \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_y / \partial y - \sin \theta' \sin \varphi' \partial U_z / \partial x + \sin \theta' \cos \varphi' \partial U_z / \partial z \\ A_{21} &= -\cos \theta' d\varphi' / dt + \cos \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_x / \partial x + \cos \theta' \sin^2 \varphi' \partial U_x / \partial y - \sin \theta' \sin \varphi' \times \\ &\quad \times \partial U_x / \partial z - \cos \theta' \cos^2 \varphi' \partial U_y / \partial x - \cos \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_y / \partial y + \sin \theta' \cos \varphi' \partial U_y / \partial z \\ A_{22} &= -v q'^2 + iv \operatorname{div} \mathbf{q}' - \sin^2 \varphi' \partial U_x / \partial x + \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_x / \partial y + \\ &\quad + \sin \varphi' \cos \varphi' \partial U_y / \partial x - \cos^2 \varphi' \partial U_y / \partial y \end{aligned}$$

Здесь θ'_1, φ'_1 , и θ'_2, φ'_2 — углы векторов \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}'_2 .

Система уравнений (2.4) позволяет решить вопрос о поведении возмущений, длина волны которых существенно меньше размеров системы. Если амплитуда этих возмущений мала (например на начальной стадии их развития), то в уравнениях (2.4) можно пренебречь квадратичными по амплитудам слагаемыми и прийти к простой системе линейных уравнений. Исследуя эту линеаризованную систему, для каждого поля $U(\mathbf{r}_0, t)$ нетрудно найти ту область волновых чисел, которой принадлежат растущие во времени возмущения, а также установить скорость их роста.

Уравнение для среднего поля скоростей $U(\mathbf{r}, t)$ можно получить, если подставить (1.1) в (2.1) и затем проинтегрировать по объему V_0

$$\partial U_i / \partial t + U_k \partial U_i / \partial x_k = -\rho^{-1} \partial P / \partial x_i - \partial / \partial x_k T_{ik} \quad (2.5)$$

где, например,

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \sum_{\mathbf{q}} u_x^*(\mathbf{q}, t) u_x(\mathbf{q}, t) = \\ &= \sum_{\mathbf{q}} [a^*(\mathbf{q}, t) a(\mathbf{q}, t) \cos^2 \theta' \cos^2 \varphi' - a^*(\mathbf{q}, t) b(\mathbf{q}, t) \cos \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' - \\ &\quad - b^*(\mathbf{q}, t) a(\mathbf{q}, t) \cos \theta' \sin \varphi' \cos \varphi' + b^*(\mathbf{q}, t) b(\mathbf{q}, t) \sin^2 \varphi'] \end{aligned}$$

$$T_{xy} = \sum_{\mathbf{q}} u_x^*(\mathbf{q}, t) u_y(\mathbf{q}, t) \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, система уравнений (2.4) и (2.5) замкнута.

3. Уравнение для функции распределения. Зная начальные условия и функцию $U(\mathbf{r}, t)$ при помощи системы уравнений (2.4) можно в принципе проследить за эволюцией возмущений $a(\mathbf{q}, t)$ и $b(\mathbf{q}, t)$. Однако в действительности, поскольку речь идет о возмущениях, длина волны которых существенно меньше размеров системы, никогда в точности нельзя знать начальных данных, и можно говорить в сущности лишь о вероятности, с которой следует ожидать те или другие значения начальных амплитуд $a(\mathbf{q}, 0)$ и $b(\mathbf{q}, 0)$.

Поэтому оказывается необходимым ввести функцию распределения $F(a_{\mathbf{q}_1}, b_{\mathbf{q}_1}; \dots; a_{\mathbf{q}_n}, b_{\mathbf{q}_n}; \dots, t)$ и рассматривать целый ансамбль систем, отличающихся друг от друга лишь величиной амплитуд начальных возмущений. Функция распределения должна удовлетворять уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\mathbf{q}} \left[\frac{\partial}{\partial a_{\mathbf{q}}} L(a_{\mathbf{q}}) + \frac{\partial}{\partial b_{\mathbf{q}}} L(b_{\mathbf{q}}) \right] F = 0 \quad (3.1)$$

характеристиками которого будут уравнения системы (2.4). Отсюда следует, что $L(a_q)$ и $L(b_q)$ — это правые части соответственно первого и второго уравнений (2.4).

Следовательно, чтобы получить исчерпывающую информацию о развитии возмущений в турбулентном потоке, необходимо найти функцию распределения, удовлетворяющую уравнению (3.1) и начальному условию

$$F(a_{q_1}, b_{q_1}; \dots; a_{q_n}, b_{q_n}; \dots; \vartheta) = F_0(a_{q_1}, b_{q_1}; \dots; a_{q_n}, b_{q_n}; \dots)$$

4. Случай сферически-симметричного движения. Для случая сферически-симметричного движения, когда

$$r = r(r_0, t), \quad \partial r / \partial r_0 = r_0^2 / r^2$$

коэффициенты $A_{i\lambda}$ в уравнениях (2.4) имеют вид

$$A_{11} = -\frac{1}{4} v q'^2 + i v \operatorname{div} \mathbf{q}' - (1 - 3 \sin^2 \vartheta') U / r$$

$$A_{12} = A_{21} = 0, \quad A_{22} = -v q'^2 + i v \operatorname{div} \mathbf{q}' - U / r$$

где ϑ' — угол между векторами \mathbf{q}' и \mathbf{r} ; $a(\mathbf{q}, t)$ и $b(\mathbf{q}, t)$ в каждой точке определены в системе координат с осью z вдоль \mathbf{r} . Так как при этом

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^4 \cos^2 \vartheta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right]^{1/2}, \quad \sin^2 \vartheta' = \frac{(r_0/r)^2 \sin^2 \vartheta}{(r/r_0)^4 \cos^2 \vartheta + (r_0/r)^2 \sin^2 \vartheta}$$

где \mathbf{q} , ϑ , ψ — сферические координаты, то $\vartheta \rightarrow 0$, если скорость направлена от центра ($U > 0$, $r/r_0 \rightarrow \infty$) и $\vartheta \rightarrow \pi/2$, если скорость направлена к центру ($U < 0$, $r/r_0 \rightarrow 0$).

Коэффициенты A_{11} и A_{22} при $U > 0$ оказываются отрицательными, если r/r_0 достаточно велико, вне зависимости от направления \mathbf{q} , и поэтому все возмущения затухают и движение не турбулизует.

При $U < 0$ и малых r/r_0 отрицательным для всех направлений вектора \mathbf{q} оказывается лишь коэффициент A_{11} . Коэффициент A_{22} остается положительным в той области волновых чисел, где можно пренебречь вязкостью. Следовательно, при сходящемся сферически-симметричном движении все амплитуды $a(\mathbf{q}, t)$, начиная с некоторого момента времени, затухают, но растут амплитуды $b(\mathbf{q}, t)$, соответствующие определенной области волновых чисел \mathbf{q} .

Рост амплитуд $b(\mathbf{q}, t)$ может сдерживать нелинейное взаимодействие, приводящее к обмену энергией между компонентами $a(\mathbf{q}, t)$ и $b(\mathbf{q}, t)$. Однако как следует из уравнения (2.4), по мере уменьшения r/r_0 этим обменом можно пренебречь, так как слагаемые, ответственные за него, оказываются в $\cos^2 \vartheta' \approx (r/r_0)^3$ раз меньше слагаемых, ответственных за обмен энергией между амплитудами $b(\mathbf{q}, t)$, относящимися к различным \mathbf{q} . Если к тому же вязкость в системе крайне мала, то имеем уравнение

$$\frac{dT}{dt} = -2 \frac{U}{r} T, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} |b^2(\mathbf{q}, t)| \quad (4.1)$$

Наконец, опуская квадратичные по $a(\mathbf{q}, t)$ слагаемые, выпишем уравнение для скорости $U(r_0, t)$, которое следует из (2.5)

$$dU/dt = -\rho^{-1} \partial P / \partial r + 2 T / r \quad (4.2)$$

При помощи системы уравнений (4.1) и (4.2) может быть решена задача о влиянии турбулизации на схлопывание сферической полости (решение этой задачи без учета турбулизации, см., например, в [2]). Приведем представляющее интерес в этой задаче выражение для скорости внутренней границы полости

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) + \left(\frac{dR_0}{dt} \right)^2 \frac{R_0^3}{R^3} - 2 \left[\int_{R_0}^{\infty} \frac{T_0 r_0^4 r_0}{(r_0^3 - R_0^3 + R^3)^{3/2}} - \int_{R_0}^{\infty} T_0 r_0^2 dr_0 \right] \frac{R_0^3}{R^3} \quad (4.3)$$

где R и dR/dt соответственно радиус и скорость границы полости в момент времени t ; а R_0 и dR_0/dt — эти же величины, но в начальный момент; T_0 — начальная энергия мелкомасштабного движения на единицу массы; p_0 — давление на бесконечности.

Из (4.3) следует, что турбулизация, если ее начальное значение достаточно мало, не изменяет закона движения границы сферической полости в несжимаемой жидкости при $R \ll R_0$, когда $dR/dt \approx 1/R^{3/2}$.

Поступила 13 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. М о н и н А. С., Я г л о м А. М., Статистическая гидромеханика. Изд-во «Наука», 1965.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.