

Если не учитывать влияния глубины заложения на длину излучаемой при взрыве упругой волны (что допустимо для малых взрывов), то характерная длина  $c_p t_0$  пропорциональна  $W^{1/3}$ . Формула (6.5) при этом дает

$$W = \text{const} (p_*/\kappa\rho_0 c_p^2) (1 + n^2)^4 H^3,$$

т. е. вес заряда, требуемого для создания воронки выброса, пропорционален кубу линии наименьшего сопротивления.

Автор выражает благодарность А. И. Шахову, выполнившему расчеты.

Поступила 16 IV 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Покровский Г. И. Взрыв. М., Недра, 1967.
2. Описко Н. И., Шемякин Е. И. Движение свободной поверхности однородного грунта при подземном взрыве.— ПМТФ, 1961, № 4.
3. Гутова Г. А., Никифоровский В. С. Откольные явления в упругом полупространстве с внутренним источником.— ФТПРПИ, 1968, № 5.
4. Никифоровский В. С. Действие сферического источника колебаний в упругой среде вблизи поверхности.— ФТПРПИ, 1977, № 3.
5. Haskell N. A. Analytic approximation for the elastic radiation from a contained underground explosion.— J. Geophys. Res., 1967, vol. 72, p. 2583.
6. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии.— Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат., 1951, вып. 24, № 149.
7. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск, изд. Новосиб. ун-та, 1968.
8. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск, Наука, 1979.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.— Л., ГИТТЛ, 1951.
10. Рац М. В., Чернышев С. Н. Трещиноватость и свойства трещиноватых пород. М., Недра, 1970.
11. Спивак А. И., Попов А. Н. Механика горных пород. М., Недра, 1975.
12. Гольденблат И. И., Кошнов В. А. Критерий прочности анизотропных материалов.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6.
13. Механический эффект подземного взрыва. Под ред. М. А. Садовского. М., Недра, 1974.
14. Boardman C. R., Rabb D. D., Mc-Arthur R. D. Responses of four rock mediums to contained nuclear explosions.— J. Geophys. Res., 1964, vol. 69, p. 3457.
15. Атомные взрывы в мирных целях. Под ред. И. Д. Морохова. М., Атомиздат, 1970.

УДК 539.4.011

#### КИНЕТИКА РАЗВИТИЯ ИНТЕРКРИСТАЛЛИТНОЙ ТРЕЩИНЫ ПУТЕМ ДИФфуЗИОННОГО МАССОПЕРЕНОСА

В. Ю. Новокушенов, Ш. Х. Ханнанов

(Уфа)

1. Исследование разрушения при высоких температурах представляет как теоретический, так и практический интерес. В условиях высоких температур и малых напряжений разрушение развивается путем распространения трещин по границам зерен [1]. Такие трещины носят название интеркристаллитные.

Развитие трещин по границам зерен обусловлено целым рядом физических факторов. Прежде всего проскальзывание зерен по границам при высоких температурах способно инициировать трещины. Эти трещины растут преимущественно по границам вследствие ослабления когезивных сил (уменьшение поверхностной энергии разрушения) на границе, а также благодаря ускоренной диффузии атомов вдоль границы. Основное время до разрушения обычно тратится на развитие трещин [1].

В данной работе рассматривается задача о кинетике развития интеркристаллитной трещины за счет диффузионного массопереноса. В процессе роста трещины ее объем возрастает за счет диффузионного переноса вещества из вершины трещины на границу зерен. Такой механизм роста трещины наблюдался в опытах на ряде хрупких материалов [2]. Ранее подобная задача ставилась и решалась численными методами [2]. Ниже для стационарного случая будет представлено аналитическое решение.

2. Рассмотрим следующую модель стационарно растущей трещины, представленную на фигуре. Трещина занимает полуплоскость  $\xi < 0$ ,  $\eta = 0$  в подвижной системе координат, связанной с вершиной трещины (в начальный момент времени  $t = 0$  оси неподвижной  $x, y$  и подвижной  $\xi, \eta$  систем координат совпадают). Для стационарно растущей трещины имеем

$$\xi = x - vt, \quad \eta = y,$$

где  $v$  — скорость роста трещины (трещина растет слева направо вдоль оси  $x$ ). Все величины в стационарном режиме можно представить функциями от  $\xi, \eta$  либо  $x - vt, y$ . Внешние нагрузки создают в вершине трещины коэффициент интенсивности напряжений  $K$ , так что на продолжении плоскости трещины при  $\xi > 0$  действуют нормальные растягивающие напряжения  $\sigma_{yy}(\xi) = \sigma_0(\xi)$

$$(2.1) \quad \sigma_0(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi(\xi + R)}},$$

где  $R$  — радиус закругления кончика трещины. В данной постановке точная форма кончика трещины не исследуется. Выражение (2.1) приближенно учитывает конечность толщины трещины и при  $R \rightarrow 0$  переходит в обычную формулу для напряжений от трещины — разреза [1]. Введение  $R \neq 0$ , как будет видно ниже, является существенным для конкретной постановки задачи. При приложении нормальных напряжений  $\sigma(x, t)$  химический потенциал  $\chi(x, t)$  атомов на границе уменьшается на величину [2, 3]

$$\chi(x, t) = -\Omega\sigma(x, t),$$

где  $\Omega$  — атомный объем. Под действием градиента  $\chi(x, t)$  возникает поток атомов  $J(x, t)$  в тонком слое толщиной  $\delta$  вдоль границы

$$J(x, t) = -\frac{D\delta}{\Omega T} \frac{\partial \chi(x, t)}{\partial x} = \frac{D\delta}{T} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x},$$

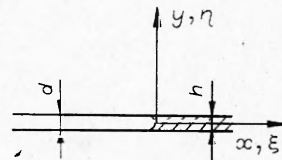
где  $D$  — коэффициент самодиффузии по границе;  $\delta$  — эффективная толщина границы;  $T$  — температура (в эргах). Если предположить, что ширина трещины  $d$  остается постоянной, то скорость трещины  $v$  определяется из соотношения

$$(2.2) \quad v = \frac{\Omega}{d} J(x, t)|_{x=vt} = \frac{\kappa}{d\mu} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=vt},$$

где  $\mu$  — модуль сдвига;  $\kappa = D\delta\Omega\mu/T$ . Действительные напряжения на границе  $\sigma(x, t)$  складываются из напряжений (2.1) от трещины и напряжений  $\sigma_1(x, t)$ , вызываемых слоем отложенного вещества (вещество выносится из кончика трещины и откладывается впереди нее вдоль границы, образуя слой толщины  $h(x, t)$ ):

$$(2.3) \quad \sigma(x, t) = \sigma_0(x, t) + \sigma_1(x, t).$$

Напряжения  $\sigma_1(x, t)$  можно рассчитать как суммарные напряжения от



распределенных дислокаций (относительно дислокаций см. [1])

$$(2.4) \quad \sigma_1(x, t) = \int_{vt}^{\infty} \rho(x', t) \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{1}{x-x'} \sqrt{\frac{x'-vt}{x-vt}} \right] dx',$$

где  $\rho(x, t) = -\partial h(x, t)/\partial x$  — плотность распределения дислокаций;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Уравнение баланса вещества принимает вид

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\Omega \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial x^2}$$

или с учетом  $\partial/\partial t = -vd/d\xi$ ,  $\partial/\partial x = d/d\xi$ ,  $dh/d\xi = -\rho(\xi)$

$$(2.5) \quad -\frac{\kappa}{v\mu} \frac{d^2 \sigma(\xi)}{d\xi^2} = \rho(\xi).$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и полученный результат в (2.3), получим для полных нормальных напряжений на границе  $\sigma(\xi)$

$$(2.6) \quad \sigma(\xi) = \sigma_0(\xi) - \beta \int_0^{\infty} \sigma''(\xi') \left[ \frac{1}{\xi - \xi'} \sqrt{\frac{\xi'}{\xi}} \right] d\xi',$$

где  $\sigma''(\xi)$  — вторая производная по  $\xi$ ;  $\beta = \kappa/2\pi(1-\nu)v$ . Уравнение (2.6) относительно  $\sigma(\xi)$  должно решаться при дополнительных граничных условиях. Первое условие (2.2) при  $\xi = 0$  можно переписать в виде

$$(2.7) \quad \sigma'(0) = v d \mu / \kappa.$$

Далее химический потенциал атомов при  $\xi = 0$  на границе и на кончике трещины должен быть одинаковым, что равносильно условию

$$(2.8) \quad \sigma(0) = 2\gamma/d,$$

где  $\gamma$  — плотность поверхностной энергии трещины. Кроме того, напряжения на бесконечности должны обращаться в нуль

$$(2.9) \quad \sigma(\infty) = 0.$$

Интегрируя (2.6) по  $\xi$ , получаем условие нормировки для  $\sigma(\xi)$

$$(2.10) \quad \int_0^{\infty} [\sigma(\xi) - \sigma_0(\xi)] d\xi = 0.$$

Уравнение (2.6) в исходной форме не позволяет применить известные аналитические методы решения. Поэтому проведем предварительно некоторые преобразования уравнения и граничных условий. Обозначив  $\varphi(\xi) = \sigma''(\xi) \sqrt{\xi}$ , уравнение (2.6) можно записать в виде

$$(2.11) \quad \int_0^{\infty} \varphi(\xi') \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} = \frac{\sqrt{\xi}}{\beta} [\sigma(\xi) - \sigma_0(\xi)].$$

Уравнение (2.11) есть уравнение с ядром типа Коши [4], решение которого, ограниченное при  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ , существует в силу (2.10) и дается выражением

$$\varphi(\xi) = \sigma''(\xi) \sqrt{\xi} = -\frac{\sqrt{\xi}}{\beta \pi^2} \int_0^{\infty} [\sigma(\xi') - \sigma_0(\xi')] \frac{d\xi'}{\xi' - \xi}.$$

Введя новую искомую функцию  $u(\zeta) = \sigma(\zeta) - \sigma_0(\zeta)$ , безразмерную переменную  $\zeta = \xi/\pi\sqrt{\beta}$ , получаем

$$(2.12) \quad u''(\zeta) + \int_0^{\infty} u(\zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} = f(\zeta),$$

где

$$f(\zeta) = -\frac{3}{8\pi\sqrt{\beta}} \frac{K}{\left(\zeta + \frac{R}{\pi\sqrt{\beta}}\right)^{5/2}}.$$

Дополнительные условия для  $u(\zeta)$  с учетом (2.1), (2.7)–(2.9) можно записать в виде

$$(2.13) \quad u(0) = u_1 \equiv (2\gamma/d - K/\sqrt{2\pi R});$$

$$(2.14) \quad u(\infty) = 0;$$

$$(2.15) \quad u'(0) = u_2 \equiv \pi\sqrt{\beta}(v d \mu / \kappa + K/2R\sqrt{2\pi R}).$$

**3.** Перейдем к решению задачи. Уравнение (2.12) выполняется на положительной полуоси  $\zeta$ . Продолжим уравнение на всю ось  $\zeta$ , полагая функции  $u(\zeta)$ ,  $f(\zeta)$  равными нулю при  $\zeta < 0$ . В результате получаем

$$(3.1) \quad u''(\zeta) + \int_{-\infty}^{\infty} u(\zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta} = f(\zeta) + V(\zeta),$$

где

$$V(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta > 0, \\ \int_0^{\infty} u(\zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Проведя над (3.1) преобразование Фурье  $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{i\lambda\zeta} d\zeta$ , приходим к уравнению Винера — Хопфа [5] относительно  $u(\lambda)$ .

$$(3.2) \quad (-\lambda^2 + \pi i \operatorname{sign} \lambda) u(\lambda) = f(\lambda) + V(\lambda) + u_2 - i\lambda u_1.$$

Здесь дополнительные слагаемые в правой части возникли в результате интегрирования  $\int_{-\infty}^{\infty} u''(\zeta) e^{i\lambda\zeta} d\zeta$  по частям с учетом граничных условий (2.13)–(2.15). Обозначим через  $G(\lambda) = (-\lambda^2 + \pi i \operatorname{sign} \lambda)$  символ оператора и представим его в виде

$$G(\lambda) = -(\lambda^2 + 1) \left(1 - \frac{\pi i \operatorname{sign} \lambda + 1}{\lambda^2 + 1}\right) \equiv -(\lambda^2 + 1) g(\lambda).$$

Основным шагом в решении (3.2) является факторизация  $G(\lambda)$ , т. е. представление  $G(\lambda)$  в виде произведения

$$G(\lambda) = G_+(\lambda)G_-(\lambda),$$

где  $G_+(\lambda)$ ,  $G_-(\lambda)$  — функции, голоморфные и отличные от нуля в верхней и нижней полуплоскости соответственно. Применяя  $S$ -теорему (см. [5]), находим в данном случае

$$\begin{aligned} G_+(\lambda) &= (\lambda + i) \exp [\Gamma_+(\lambda)] \equiv (\lambda + i)g_+(\lambda), \\ G_-(\lambda) &= -(\lambda - i) \exp [-\Gamma_-(\lambda)] \equiv -(\lambda - i)g_-(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln [1 - (\pi i \operatorname{sign} \omega + 1)(\omega^2 + 1)^{-1}]}{\lambda \pm i0 - \omega} d\omega.$$

Поделим обе части (3.2) на  $G_-(\lambda)$

$$(3.3) \quad G_+(\lambda)u(\lambda) = G_-^{-1}(\lambda)f(\lambda) + G_-^{-1}(\lambda)V(\lambda) + u_2G_-^{-1}(\lambda) - i\lambda u_1G_-^{-1}(\lambda).$$

Здесь  $G_+(\lambda)u(\lambda)$  — функция, аналитическая в верхней полуплоскости, а последние три слагаемых в правой части (3.3) аналитичны в нижней полуплоскости. Смешанный член  $G_-^{-1}(\lambda)f(\lambda)$  можно разложить на сумму функций, аналитических в соответствующих полуплоскостях:

$$G_-^{-1}f(\lambda) = F_+(\lambda) + F_-(\lambda),$$

где

$$F_{\pm}(\lambda) = \pm \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-^{-1}(\omega)f(\omega)}{\lambda \pm i0 - \omega} d\omega.$$

Разделяя в (3.3) члены с различными областями аналитичности, получим

$$G_+(\lambda)u(\lambda) - F_+(\lambda) = G_-^{-1}(\lambda)V(\lambda) + F_-(\lambda) + u_2G_-^{-1}(\lambda) - i\lambda u_1G_-^{-1}(\lambda).$$

Отсюда по теореме Лиувилля следует

$$(3.4) \quad G_+(\lambda)u(\lambda) - F_+(\lambda) = C = \text{const.}$$

Из (3.4) находим

$$(3.5) \quad u(\lambda) = CG_+^{-1}(\lambda) + \frac{iG_+^{-1}(\lambda)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-^{-1}(\omega)f(\omega)}{\lambda + i0 - \omega} d\omega.$$

Поведение  $u(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  связано с поведением  $u(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow 0$ , так что с учетом (2.13), (2.15) имеем в окрестности бесконечности

$$(3.6) \quad u(\lambda) = \frac{i}{\lambda} u_1 - \frac{1}{\lambda^2} u_2 - O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

С другой стороны, раскладывая решение (3.5) по степеням  $\lambda^{-1}$ , имеем

$$(3.7) \quad u(\lambda) = C\lambda^{-1} + \left[ C \left( -i + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln g(\lambda) d\lambda \right) + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_-^{-1}(\omega)f(\omega) d\omega \right] \times \\ \times \lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}).$$

Сравнивая (3.6), (3.7), находим значение неизвестной постоянной  $C = iu_1$  и получаем соотношение между  $u_1, u_2$

$$(3.8) \quad u_2 = u_1 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln g(\lambda) d\lambda - 1 \right) - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_-^{-1}(\lambda)f(\lambda) d\lambda.$$

Уравнение (3.8) с учетом выражений (2.13), (2.15) для  $u_1, u_2$  является неявным уравнением, определяющим зависимость стационарной скорости развития трещины  $v$  от коэффициента интенсивности напряжений  $K$ :  $v = v(K)$ . В общем случае уравнение (3.8) может быть решено лишь численными методами. При больших скоростях трещины можно воспользоваться асимптотическим разложением (3.8) по степеням  $v$ . Опуская промежуточные выкладки, приведем лишь окончательное выражение

$v = v(K)$  для случая больших скоростей трещины (полагаем  $2R = d$ )

$$(3.9) \quad v = \frac{1-v}{\pi^2} \left( \frac{C_1}{2\pi} - 1 \right)^2 \frac{\gamma K^2}{\mu^2 d^3},$$

где  $C_1 \sim 1$  — постоянная, определяемая интегралом

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{\omega^4 + \nu^2}{(\omega^2 + 1)^2} d\omega.$$

Рассматривая уравнение (3.8) при  $v \rightarrow 0$ , можно убедиться, что стационарное развитие трещины возможно только при скоростях, больших некоторой критической  $v_{\min}$

$$v \geq v_{\min} \simeq \gamma\kappa/\mu d^3.$$

Экспериментальные исследования дают зависимость  $v \sim K^n$ , где  $n$  изменяется в широких пределах. Так, в сплаве Инконель-718 при больших скоростях трещины  $n = 1-2,5$  [2], что близко к теоретическому значению  $n = 2$  в (3.9).

Поступила 16 IV 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Разрушение. Ред. Г. Либовиц. Т. 1. М., Мир, 1973.
2. Vitek V. A theory of diffusion controlled intergranular creep crack growth. — Acta Metallurgica, 1978, vol. 26, N 9.
3. Ханнапов Ш. Х. Статика и кинетика вакансий в неоднородно напряженном кристалле. — ФММ, 1978, т. 45, № 3.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.

УДК 539.374 : 534.1

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ЛИНЕЙНОЙ И ЛОМОНОЙ РАЗГРУЗКАМИ

К. Атабаев, Н. Мамадалиев

(Ташкент, Москва)

Рассматриваются задачи о распространении плоской и сферической волн в нелинейно-сжимаемой среде с линейной и ломаной разгрузками при воздействии интенсивных нагрузок. Решения задач построены обратным способом [1] в предположении, что среда на фронте ударной волны мгновенно нагружается нелинейным образом, а за фронтом в возмущенной области происходит необратимая разгрузка среды. Задача о распространении и отражении упругопластической волны в стержне конечной длины для схемы Прандтля с ломаной разгрузкой решена методом характеристик в работе [2].

В отличие от [2] в данной работе одномерные нестационарные задачи о плоском и сферическом слое решаются аналитически обратным способом, причем рассматривается распространение нелинейной ударной волны нагрузки — разгрузки. Необходимо отметить, что данная работа является продолжением [1] для среды с ломаной разгрузкой. В случае линейной разгрузки среды учитывается конечность интервала времени воздействия приложенной к границе слоя нагрузки и приводятся решения задач в областях за пределами ее действия. Обратный способ заключается в определении волнового поля в слое грунта и профиля приложенной к его границе нагрузки от продуктов взрыва при заданном законе движения ударной волны. Грунт при интенсивных воздействиях, как в [3], принимается нелинейно-сжимаемой идеальной средой. Аналогичный подход ранее применялся в [4] при изучении механического воздействия подземного взрыва. Для конкретной структуры среды представлены результаты