

4. Последние достижения в области жидкостной экстракции. Под ред. К. Хансона. М., Химия, 1974.
5. Тронов В. П., Розенцвайг А. К. Коалесценция дисперсной фазы жидкостных эмульсий при движении в турбулентном режиме.— ЖПХ, 1976, XLIX, № 1.
6. Jeffreys G. V., Davies G. A., Pitt K. The analysis of coalescence in a continuous mixer settler system by a differential model.— A. I. Ch. E. Journal, 1970, vol. 16, N 5.
7. Argaman Y., Kaufman W. J. Turbulence and flocculation.— Proc. of ASCE. J. Sanit. Engng Div., 1970, vol. 96, N SA2.
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
9. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., Мир, 1968.
10. Beal S. K. Turbulent agglomeration of suspensions.— Aerosol Science, 1972, vol. 3, N 2.
11. Громова Л. Г., Джабар-Заде Р. М. Стандартная программа для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты.— В сб.: Вычислительные методы и программирование. М., изд. МГУ, 1962.
12. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ. М., Мир, 1977.
13. Медведев В. Ф., Медведева Л. П. Турбулентное течение разбавленных эмульсий.— ПМТФ, 1975, № 3.
14. Mlinek Y., Resnik W. Drop size in an agitated liquid — liquid systems.— A. I. Ch. E. Journal, 1972, vol. 18, N 1.
15. Gillespie T. The effect of size distribution on the rate constants for collisions in disperse systems.— J. Colloid Sci., 1963, vol. 18, N 6.
16. Тронов В. П., Розенцвайг А. К. К определению частоты слияний капель в дисперсных системах жидкость — жидкость.— ЖПХ, 1975, т. XLVIII, № 5.
17. Розенцвайг А. К., Тронов В. П., Позднышев Г. Н., Мансуров Р. И., Мамлеев Р. А. Моделирование условий образования и разрушения капель дисперсной фазы в турбулентном потоке жидкостных эмульсий.— ЖПХ, 1977, т. L, № 12.
18. Park J. Y., Blair L. M. The effect of coalescence on drop size distribution in an agitated liquid — liquid dispersion.— Chem. Engng Sci., 1975, vol. 30, N 9.
19. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М., Мир, 1973.
20. Sideman S., Shiloh K., Resnik W. Hydrodynamic characteristics of disperse phase crystallisers. II. Coalescence in three phase liquid — liquid — solid systems.— Industrial and Engineering Chemistry. Fundamentals, 1972, vol. 11, N 4.

УДК 532.526

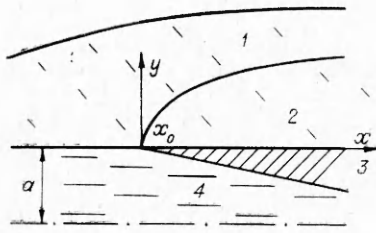
К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, НЕ СМЕШИВАЮЩЕЙСЯ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

В. И. Елисеев

(Днепропетровск)

При распространении струи вязкой жидкости, не смешивающейся со средой, имеющей температуру ниже температуры замерзания истекающей жидкости, с некоторой точки поверхности струи происходит затвердевание струи. Если считать процесс равновесным, то замораживание жидкости происходит в точке, где жидкость на поверхности струи достигает температуры замерзания T_3 . При стационарном процессе область затвердевания распространяется вниз по течению, постепенно расширяясь и захватывая все новые массы жидкости в струе. Подобные процессы происходят при формовании, например, синтетических нитей и пленок из полимерных расплавов [1].

Рассмотрим задачу о затвердевании струи для наиболее простой модели жидкости — ньютоновской. Часто модель ньютоновской жидкости используется для выявления общих закономерностей некоторого сложного процесса. Кроме того, модель ньютоновской жидкости может служить хорошим приближением для некоторых более сложных жидкостей.



В качестве физической модели процесса используем схему, показанную на фигуре. Пусть в некоторой точке x_0 температура жидкости на поверхности достигла температуры замерзания T_3 . От этой точки начинает распространяться область 3 — область затвердевшей жидкости. Граница между жидкостью в струе и твердым материалом является поверхностью фазового перехода. Область 1 — внешний пограничный слой, 2 — новый пограничный слой, образовавшийся в результате резкого изменения граничного условия на поверхности струи в точке x_0 . Развитию такого пограничного слоя и определению параметров течения в нем посвящены работы [2, 3]. Область 4 занята жидкостью, движущейся в струе.

Решение задачи будем строить в окрестности точки x_0 с помощью метода [2, 3], основанного на методе сращиваемых асимптотических разложений [4]. В качестве малого параметра используем величину $\varepsilon = \delta_2^*/\delta^*$ — отношение толщины вытеснения нового пограничного слоя к толщине вытеснения всего пограничного слоя. В дальнейшем будем считать, что толщина нити равна a , течение в области 4 изобарическое (давление жидкости равно внешнему p_a), поперечные градиенты значительно больше продольных, в результате чего можно применить теорию пограничного слоя. Выпишем основные уравнения (жидкость считается весомой и несжимаемой, газ — невесомым и несжимаемым, физические параметры сред постоянные) в виде

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \delta_{i4} g + \nu_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \quad \delta_{i4} = \begin{cases} 1, & i = 4, \\ 0, & i \neq 4, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2, 4),$$

$$\rho_i c_i \left(u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Для области 3 $u_3 = U_T = \text{const}$, $v_3 = 0$. В дальнейшем примем $\{\rho_{1,2}, c_{1,2}, \nu_{1,2}, \lambda_{1,2}\} = \{\rho_G, c_G, \nu_G, \lambda_G\}$; $\{\rho_2, c_2, \lambda_2\} = \{\rho_T, c_T, \lambda_T\}$; $\{\rho_4, c_4, \nu_4, \lambda_4\} = \{\rho_{ж}, c_{ж}, \nu_{ж}, \lambda_{ж}\}$.

В этих формулах u — скорость в направлении оси x ; v — в направлении оси y ; T — температура; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$; ρ — плотность; c — теплоемкость; λ — теплопроводность; ν — кинематическая вязкость.

1. Область 1. Вводя функцию тока ($u_i = \partial \psi_i / \partial y$, $v_i = -\partial \psi_i / \partial x$), решение в области 1 выпишем в следующем виде:

$$(1.1) \quad \psi_1 = U \delta^* [F_0(h) + \varepsilon F_1(h; \Delta) + \varepsilon^2 F_2(h; \Delta) + \dots],$$

$$Q_1 = \delta^* T_3 [q_0(h) + \varepsilon q_1(h; \Delta) + \varepsilon^2 q_2(h; \Delta) + \dots],$$

$$h = \frac{y}{\delta^*}, \quad \Delta = \frac{\delta^*}{\delta_0^*},$$

где $Q = \int (T - T_\infty) dy$; $\delta^* = \int_0^\infty (u - u_\infty) dy$; δ_0^* — толщина вытеснения в точке x_0 . Функции F_0 и q_0 определяют профили скоростей и температур во внешнем пограничном слое в сечении x_0 и считаются известными. Прежде, чем подставить (1.1) в основные уравнения, необходимо задать

$$(1.2) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\nu_\Gamma}{U\delta^{*2}} \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots),$$

$$\frac{d\delta^*}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\nu_\Gamma}{U\delta^*} \varepsilon^{-1} (\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots),$$

где γ_j и α_j — некоторые величины. После подстановки решений получим уравнения для определения F_j и q_j , допускающие непосредственное интегрирование, в результате чего получим

$$F_1 = -\alpha_0(F_0 - hF_0') + k_1F_0',$$

$$F_2 = -\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_0^2)(F_0 - hF_0') + \frac{1}{2}\alpha_0^2h^2F_0'' - \frac{1}{2}\gamma_1F_1 + k_2F_0' + \frac{1}{2}k_1^2F_0'' +$$

$$+ k_1\alpha_0hF_0'' + F_0' \int_0^h \frac{F_0'''}{F_0'^2} dh;$$

$$q_1' = (k_1 + \alpha_0h)q_0'',$$

$$q_2' = k_2q_0'' + \frac{1}{2}k_1^2q_0'' + \frac{1}{2}\alpha_0^2(h^2q_0'')' + k_1\alpha_0(hq_0'')' - \frac{1}{2}\gamma_1(k_1q_0'' + \alpha_0hq_0'') +$$

$$+ \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_0^2)hq_0'' + q_0'' \int_0^h \frac{F_0'''}{F_0'^2} dh + \text{Pr}_\Gamma^{-1} \frac{q_0'''}{F_0'^2}.$$

Для определения члена $j = F_0' \int_0^h \frac{F_0'''}{F_0'^2} dh$ необходимо конкретное выражение для F_0 . Для случая истекающей вниз струи можно воспользоваться асимптотическим решением работы [5]. Если считать, что ψ и Q вдалеке от источника до точки замерзания могут быть представлены как $\psi = x^l F_0 \left(\frac{y}{x^k}\right)$, $Q = x^p q_0 \left(\frac{y}{x^k}\right)$, то из уравнений пограничного слоя следует $F_0''' = (l - k)F_0'^2 - lF_0F_0''$, $q_0''' = (p - k)F_0'q_0'' - lF_0q_0''$.

Используя выражение для F_0'' , можно получить $j = -khF_0' + lF_0'$, а тогда из условий на бесконечности следует (скорость внешнего потока равна нулю) $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = l$. Используя теперь выражение для q_0'' , можно показать, что q_1' и q_2' при $h \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Так как величина ε имеет несколько условный характер, то в выборе коэффициентов γ_j имеется некоторый произвол. Из уравнений (1.2) можно получить

$$\delta^* = \left(\frac{\nu_\Gamma x}{U}\right)^{1/2} (\beta_0 + \beta_2\varepsilon^2 - \beta_3\varepsilon^3 + \dots),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{4}\beta_0, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_2}{3} - \frac{2}{3}\gamma_1\beta_2,$$

β_0 — известная величина. Учитывая, что при $x \rightarrow \infty$ $\varepsilon \rightarrow 1$, а $d\varepsilon/dx \rightarrow 0$, положим

$$1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots = (1 - \varepsilon^2) \left(1 + \varepsilon^2 \frac{\beta_2}{\beta_0} + \varepsilon^3 \frac{\beta_3}{\beta_0} + \dots\right),$$

тогда $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -(1 - \beta_2/\beta_0)$,

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{1/\beta_0^2}}.$$

Коэффициенты k_j могут быть определены из условий сращивания решений (1.1) и решений в области 2.

2. Область 2. Решения в новом пограничном слое представим в виде

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \varepsilon \delta^* U [G_0(H; \Delta) + \varepsilon G_1(H; \Delta) + \dots], \\ Q_2 &= \varepsilon \delta^* T_3 [Q_0(H; \Delta) + \varepsilon Q_1(H; \Delta) + \dots], \quad H = y'/\varepsilon \delta^*.\end{aligned}$$

Из уравнений пограничного слоя можно получить уравнения для G_j

$$\begin{aligned}G_0''' + \frac{1}{2} G_0 G_0'' &= 0, \\ G_1''' - \frac{1}{2} (G_0' G_1' - 2G_0'' G_1 - G_0 G_1'') &= -\frac{\gamma_1}{2} G_0 G_0'', \\ G_2''' - \frac{1}{2} (2G_0' G_2' - 3G_0'' G_2 - G_0 G_2'') &= \frac{\gamma_2}{2} (G_1'^2 - 2G_1 G_1'') + \\ &+ \frac{\gamma_1}{2} (G_0' G_1' - 2G_0'' G_1 - G_0 G_1'') - \frac{\gamma_2 + \alpha_1}{2} G_0 G_0'';\end{aligned}$$

для Q_j

$$\begin{aligned}Q_0''' + \frac{1}{2} \text{Pr}_r G_0 Q_0'' &= 0, \\ Q_1''' - \frac{1}{2} \text{Pr}_r (G_0' Q_1' - G_0 Q_1'') &= -\frac{1}{2} \text{Pr}_r (G_1 Q_0'' + \gamma_1 G_0 Q_0''), \\ Q_2''' - \frac{1}{2} \text{Pr}_r (2G_0' Q_2' - G_0 Q_2'') &= \frac{1}{2} \text{Pr}_r [G_1' Q_1' - 2G_1 Q_1'' - 3G_2 Q_0'' + \\ &+ \gamma_1 (G_0' Q_1' - G_1 Q_0'') - \gamma_1 (G_1 Q_0'' + G_0 Q_1'') - (\gamma_2 + \alpha_1) G_0 Q_0'']. \end{aligned}$$

Пограничные условия на движущейся нити для функции тока можно записать в виде

$$G_j(0; \Delta) = 0, \quad G_0'(0; \Delta) = \frac{U_T}{U}, \quad G_j'(0; \Delta) = 0 \quad (j > 0).$$

Скорость нити определяется из условия сохранения массы

$$U_T = \frac{\rho_{ж}}{\rho_T} \int_0^1 U f_0'(n) dn$$

($U f_0'(n)$ — профиль скоростей в сечении x_0 в струе), в общем случае $U_T \neq U$. Рассмотрим случай, когда $U_T = U$, что дает возможность получить простые асимптотические выражения для G_j

$$G_0 = H, \quad G_1 = B_1 H^2, \quad G_2 = B_2 (H^3 + 6H)$$

и для Q_j

$$\begin{aligned}(2.1) \quad Q_0' &= M_0, \quad Q_1' = K_1 \left(\chi + \frac{1}{2} \text{Pr}_r H \int_0^H \chi dH \right) + M_1 H, \\ Q_2' &= -\frac{1}{2} B_1 K_1 H \chi + K_2 \left(\int_0^H \chi dH + H \chi + \frac{1}{2} \text{Pr}_r H^2 \int_0^H \chi dH \right) + \\ &+ M_2 (H^2 + 2\text{Pr}_r^{-1}), \quad \chi = e^{-\frac{1}{4} \text{Pr}_r H^2}.\end{aligned}$$

Здесь для краткости не дописаны некоторые члены, которые равны нулю. Пользуясь правилом сращивания асимптотических разложений, получим

$$(2.2) \quad B_1 = \frac{1}{2} F_0''(0), \quad B_2 = \frac{1}{3!} F_0'''(0);$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0; \quad M_1 = 1 - \frac{T_3}{T_3}, \quad \frac{1}{2} K_1 \text{Pr}_\Gamma \int_0^\infty \chi dH + M_1 = q_0''(0),$$

$$\frac{1}{2} K_2 \text{Pr}_\Gamma \int_0^\infty \chi dH + M_2 = \frac{1}{2} q_0'''(0).$$

Величины $K_j(\Delta)$ и $M_j(\Delta)$ можно найти из склеивания решений на границах областей 2-3 и 3-4.

3. Область 3. В области 3 положим

$$Q_3 = \varepsilon^2 \delta^* T_3 (\beta_2 + \varepsilon \beta_3 + \dots) [g_0(N; \Delta) + \varepsilon g_1(N; \Delta) + \dots],$$

$$N = \frac{y}{\varepsilon^2 \delta^* (\beta_2 + \varepsilon \beta_3 + \dots)},$$

где $\beta_j(\Delta)$ — некоторые величины, определяющие положение межфазовой границы. Уравнение этой поверхности определяется выражением $N = -1$, т. е. $y_* = -\varepsilon^2 \delta^* (\beta_2 + \varepsilon \beta_3 + \dots)$. Для функций g'_j имеем простые зависимости

$$(3.1) \quad g'_0 = C_{00} + C_{01}N, \quad g'_1 = C_{10} + C_{11}N, \quad g'_2 = C_{20} + C_{21}N, \quad g'_3 = C_{30} + C_{31}N,$$

где $C_{ij}(\Delta)$ могут быть определены из граничных условий при $N = 0$ и $N = -1$.

4. Область 4. В этой области решения запишем в виде следующих разложений (координата y отсчитывается от оси струи):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Psi_4 &= Ub[f_0(n) + \varepsilon f_1(n; \Delta) + \varepsilon^2 f_2(n; \Delta) + \dots], \\ Q_4 &= T_3 b[\theta_0(n) + \varepsilon \theta_1(n; \Delta) + \varepsilon^2 \theta_2(n; \Delta) + \dots], \\ b &= a - \varepsilon^2 \delta^* (\beta_2 + \varepsilon \beta_3 + \dots), \quad n = y/b. \end{aligned}$$

После подстановки (4.1) в уравнения пограничного слоя получим выражения

$$(4.2) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = \beta_2 \frac{\delta_0^*}{a} \Delta (f_0 - n f'_0) + \frac{\delta_0^{*2}}{a^2} \Delta^2 \frac{\text{Re}_\Gamma}{\text{Fr}} f'_0 \int_0^n \frac{dn}{f_0'^2} + \frac{\delta_0^{*2}}{a^2} \Delta^2 \frac{v_{\text{ж}}}{v_\Gamma} f'_0 \int_0^n \frac{f_0'''}{f_0'^2} dn,$$

$$(4.3) \quad f_3 = -\frac{2}{3} \gamma_1 f_2 + \frac{\delta_0^*}{a} \Delta \left(\beta_3 + \frac{2}{3} \beta_2 \gamma_1 \right) (f_0 - n f'_0);$$

$$(4.3) \quad \theta_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= -\beta_2 \frac{\delta_0^*}{a} \Delta n \theta'_0 + \frac{\delta_0^{*2}}{a^2} \Delta^2 \frac{\text{Re}_\Gamma}{\text{Fr}} \theta'_0 \int_0^n \frac{dn}{f_0'^2} + \frac{\delta_0^{*2}}{a^2} \Delta^2 \frac{v_{\text{ж}}}{v_\Gamma} \theta'_0 \int_0^n \frac{f_0'''}{f_0'^2} dn + \\ &+ \frac{\delta_0^{*2}}{a^2} \Delta^2 \text{Pr}_{\text{ж}}^{-1} \frac{v_{\text{ж}}}{v_\Gamma} \frac{\theta_0''}{f_0'}. \end{aligned}$$

При нахождении этих решений было принято, что вследствие симметрии

$$f_j(0) = 0, \quad f_j''(0) = 0, \quad \theta_j''(0) = 0.$$

Функции $f_0(n)$ и $\theta_0(n)$ считаются известными. Они определяют профили скоростей и температур в струе в сечении x_0 .

5. Определение межфазовой границы. Так как течение в области 4 принято изобарическим, то на границе фаз жидкость — твердое тело выполняется условие

$$(5.1) \quad T = T_3.$$

Другим условием должно явиться равенство тепловых потоков с учетом скрытой теплоты фазового перехода. В принятой постановке пограничный слой в жидкости, примыкающий к твердой фазе, исключен из рассмотрения, т. е. здесь принята модель течения с фазовым переходом при наличии скольжения фаз на границе и скачка температур. Такая модель часто используется при течении пленок конденсата [6]. В этом случае граничное условие на границе раздела имеет вид

$$(5.2) \quad -\lambda_{\Gamma} \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y_*} = r \rho_{\text{ж}} v_4 \Big|_{y_*} + \rho_{\text{ж}} v_4 \Big|_{y_*} c_{\text{ж}} (T_4 - T_3) \Big|_{y_*},$$

где r — теплота фазового перехода.

На поверхности движущейся нити должны выполняться равенства температур и тепловых потоков, т. е.

$$(5.3) \quad T_2 \Big|_{y=0} = T_3 \Big|_{y=0};$$

$$(5.4) \quad \lambda_{\Gamma} \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda_{\Gamma} \frac{\partial T_3}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Используя аналитические зависимости (2.1), (3.1), (4.2) и (4.3), из граничных условий (5.1)–(5.4) и соотношений (2.2) найдем

$$C_{00} = 1 - \frac{T_{\infty}}{T_3}, \quad C_{01} = C_{10} = C_{11} = 0, \quad C_{20} = C_{21} = -2 \frac{\rho_{\text{ж}} v_{\Gamma}}{\lambda_{\Gamma}} \frac{r}{T_3} \beta_2 \times \\ \times \left[\beta_2 - \frac{\delta_0^*}{a} \Delta \left(\frac{\text{Re}_{\Gamma}}{\text{Fr}} \int_0^1 \frac{dn}{f_0'^2} + \frac{v_{\text{ж}}}{v_{\Gamma}} \int_0^1 \frac{f_0'''}{f_0'^2} dn \right) \right],$$

$$C_{30} = C_{31} = -\frac{\rho_{\text{ж}} v_{\Gamma}}{\lambda_{\Gamma}} \frac{r}{T_3} \left[5\beta_2 \beta_3 - 2 \frac{\delta_0^*}{a} \Delta \beta_3 \left(\frac{\text{Re}_{\Gamma}}{\text{Fr}} \int_0^1 \frac{dn}{f_0'^2} + \frac{v_{\text{ж}}}{v_{\Gamma}} \int_0^1 \frac{f_0'''}{f_0'^2} dn \right) \right],$$

$$K_1 = 0,$$

$$M_1 = q_0''(0), \quad K_2 = -\frac{3}{2} \frac{\rho_{\text{ж}} v_{\Gamma}}{\lambda_{\Gamma}} \frac{r}{T_3} \beta_3, \quad M_2 = \frac{\text{Pr}_{\Gamma}}{2} C_{20}.$$

Наконец, из граничного условия (5.4) определим

$$\beta_2 = \frac{\delta_0^*}{a} \Delta \left(\frac{\text{Re}_{\Gamma}}{\text{Fr}} \int_0^1 \frac{dn}{f_0'^2} + \frac{v_{\text{ж}}}{v_{\Gamma}} \int_0^1 \frac{f_0'''}{f_0'^2} dn \right) - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\Gamma}}{\rho_{\text{ж}} v_{\Gamma}} \frac{T_3}{r} q_0''(0) \quad (q_0''(0) < 0), \\ (5.5) \quad \beta_3 = -\frac{4}{3} \frac{\lambda_{\Gamma}}{\text{Pr}_{\Gamma} \rho_{\text{ж}} v_{\Gamma}} \frac{T_3}{r} \left(\int_0^{\infty} \chi dH \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{2} q_0''(0) - \frac{1}{2} \text{Pr}_{\Gamma} \frac{\lambda_{\Gamma}}{\lambda_{\Gamma}} \beta_2 q_0''(0) \right\}.$$

Таким образом, получены аналитические выражения для параметров течения в окрестности точки x_0 . В рамках теории пограничного слоя точка x_0 является особой точкой.

При $U \neq U_T$ в окрестности этой точки неограниченно растет τ_w , в рассмотренном же случае сохраняется непрерывность как скоростей, температур, так и напряжения трения и теплового потока, идущего от струи к газу. Выпишем формулы для температуры и теплового потока на поверхности нити

$$T = T_3 \left\{ 1 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_r}{\lambda_T} \beta_2 q_0''(0) \right\},$$

$$q = -\lambda_r T_3 \delta^{*-1} \left[q_0''(0) - \varepsilon \frac{3}{2} \frac{\rho_{ж} v_r}{\lambda_r} \frac{r}{T_3} \beta_3 \right],$$

откуда видно, что непрерывность T и q в точке x_0 сохраняется.

Интересной особенностью рассмотренного процесса затвердевания является то, что область \mathcal{S} появляется в виде острой кромки. Это видно из выражения $y_* = -\varepsilon^2 \delta^* (\beta_2 + \varepsilon \beta_3 + \dots)$, при дифференцировании которого по x будем иметь $\left. \frac{dy_*}{dx} \right|_{x_0} = -\frac{v_r}{U \delta_0^*} \beta_2$, т. е. угол между касательной к поверхности и осью x имеет конечное значение.

Следует еще добавить, что полученные формулы (5.5) ($U = U_T$) справедливы и в случае, когда имеется скорость внешнего потока. При этом влияние величины и направления скорости будет проявляться через величину $q_0''(0)$. Если положить $Pr_r = 1$, то из интеграла Крокко [7] можно получить

$$q_0' = \frac{u - U_\infty}{U - U_\infty} \left(1 - \frac{T_\infty}{T_3} \right), \text{ тогда } q_0''(0) = \mu_r^{-1} \frac{\tau_w}{U - U_\infty} \left(1 - \frac{T_\infty}{T_3} \right).$$

Эта величина может служить для оценки влияния скорости внешнего потока и температуры внешней среды на процесс затвердевания.

Поступила 30 VIII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория формирования химических волокон. Под редакцией А. Т. Серкова. М., Химия, 1975.
2. Елисеев В. И. К теории пограничного слоя с внезапно изменяющимися граничными условиями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 4.
3. Елисеев В. И. О построении решений уравнений сжимаемого ламинарного слоя на пластине с внезапно изменяющимися граничными условиями.— ИФЖ, 1973, т. XXIV, № 3.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., Мир, 1967.
5. Елисеев В. И. Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей.— ПМТФ, 1977, № 2.
6. Исаченко В. П. Теплообмен при конденсации. М., Энергия, 1977.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.