

УДК 624.078.4

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КЛЕЕВОМ СОЕДИНЕНИИ С ОБЛАСТЬЮ НЕПРОКЛЕЯ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПРОЩЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ

С. С. Куреннов

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского  
"Харьковский авиационный институт", 61000 Харьков, Украина  
E-mail: kurennov.ss@gmail.com

Предложена упрощенная двумерная модель нахлесточного клеевого соединения. В предположении, что поперечные перемещения несущих слоев равны нулю, получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии клеевого соединения, вдоль боковых поверхностей которого имеются области непрочекля. Полученное решение представляет собой функциональный ряд, собственные функции не ортогональны. Показано, что наличие области непрочекля может приводить к значительному увеличению напряжений вблизи края клеевого слоя.

Ключевые слова: клеевое соединение, аналитическое решение, двумерная модель.

DOI: 10.15372/PMTF20190419

**Введение.** Большинство математических моделей нахлесточных клеевых соединений, позволяющих определить напряженно-деформированное состояние соединения в аналитической форме, являются одномерными [1]. В этих моделях предполагается равномерное распределение напряжений по ширине соединения и задается априори распределение напряжений по толщине слоев (как правило, равномерное или линейное). Однако в ряде случаев при определении напряженного состояния соединений необходимо учитывать неравномерность напряженно-деформированного состояния склеиваемых пластин по ширине соединения. Примерами таких конструкций являются соединения силовых элементов с обшивкой, ремонтные накладки и т. п. Построение аналитического решения задачи о двумерном напряженном состоянии соединения в общей постановке является чрезвычайно сложным, поэтому аналитическое решение данной задачи в настоящее время отсутствует [2]. Как правило, при исследовании двумерного напряженного состояния соединений используются численные методы [3–5]. В работе [6] предложена упрощенная двумерная модель нахлесточного соединения двух прямоугольных пластин, основанная на гипотезе о большой жесткости соединяемых слоев в направлении, перпендикулярном приложенной нагрузке. С использованием этой модели получено приближенное аналитическое решение задачи о напряженном состоянии клеевого соединения пластин различной ширины [7]. Адекватность данной модели проверена путем сравнения результатов проведенных расчетов с результатами расчетов, выполненных с помощью метода конечных элементов, а также с экспериментальными данными [8].

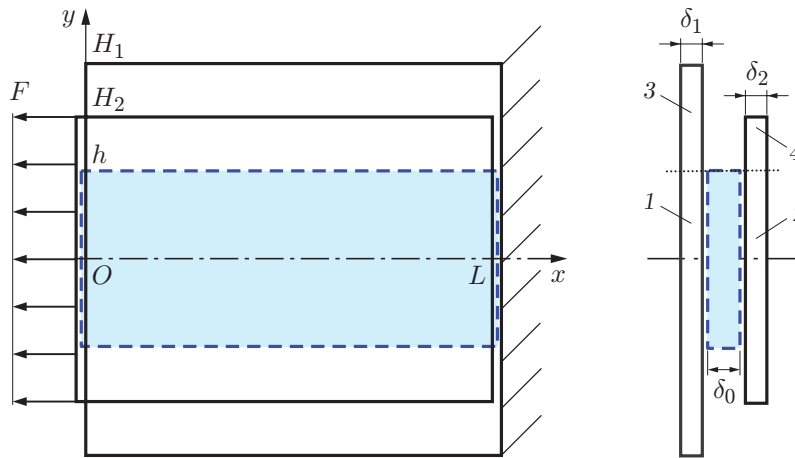


Рис. 1. Схема клеевого соединения:

1, 2 — области пластин, примыкающие к клеевому слою, 3, 4 — области пластин, находящиеся за пределами клеевого слоя

Целью настоящей работы является решение задачи о напряженном состоянии соединения, содержащего области непрочекля, расположенные вдоль боковых границ области склейки. Данная задача решается впервые.

**Постановка задачи и уравнения равновесия.** Рассмотрим симметричное клеевое соединение двух прямоугольных пластин (рис. 1). Ось  $Ox$  является осью симметрии. В силу симметрии задачи отсутствует изгиб в плоскости соединения. Длина соединения равна  $L$ , ширина соединяемых пластин —  $2H_1$ ,  $2H_2$ , ширина области склейки —  $2h$ , толщины соединяемых пластин и клеевого слоя —  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_0$  соответственно. Будем считать, что перемещения и напряжения равномерно распределены по толщине слоев. Соединяемые пластины будем полагать абсолютно жесткими в направлении оси  $Oy$ . Данная модель, являющаяся промежуточной между балочными моделями в строительной механике и более точными моделями теории упругости, впервые предложена в работах В. В. Васильева (см., например, [9, 10]). Следовательно, элементы обоих несущих слоев совершают перемещения только в продольном направлении. Перемещения элементов первого и второго слоев в области склейки обозначим  $U_1$ ,  $U_2$ , на выступающих участках —  $U_3$ ,  $U_4$  соответственно.

Уравнения равновесия элементов несущих слоев в области склейки  $y \in [-h; h]$  имеют вид

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $N_m$ ,  $q_m$  ( $m = 1, 2$ ) — нормальные (в продольном направлении) и касательные усилия в несущем слое  $m$ ;  $\tau$  — касательные напряжения в клеевом слое в продольном направлении.

Соотношения Коши в случае равенства нулю поперечных перемещений имеют вид

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y}, \quad m = 1, 2,$$

где  $E_m$  — модуль упругости слоя  $m$  в направлении оси  $Ox$ ;  $G_m$  — модуль сдвига слоя  $m$  в плоскости  $xOy$ .

Касательные напряжения в клеевом слое пропорциональны разности перемещений:

$$\tau = P_0(U_2 - U_1). \quad (2)$$

Здесь  $P_0$  — жесткость клеевого слоя на сдвиг, которая определяется по формуле

$$P_0 = \frac{G_0}{\delta_0} \quad \text{или} \quad P_0 = \left( \frac{\delta_0}{G_0} + \frac{\delta_1}{2G_1^T} + \frac{\delta_2}{2G_2^T} \right)^{-1},$$

$G_0$  — модуль сдвига клеевого слоя;  $G_m^T$  — модуль сдвига несущих слоев в трансверсальном направлении.

Подставляя приведенные выше соотношения в уравнения (1), получаем систему [6]

$$\alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0, \quad \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0, \quad (3)$$

где  $\alpha_m = E_m \delta_m / P_0$ ;  $\mu_m = G_m / E_m$ .

За пределами области склейки перемещения слоев при указанных выше гипотезах описываются уравнениями [9, 10]

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

С учетом симметрии краевые условия можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=H_1} = \frac{\partial U_4}{\partial y} \Big|_{y=H_2} = 0; \quad (5)$$

$$N_2 \Big|_{x=0} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(y), \quad N_4 \Big|_{x=0} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(y); \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad (7)$$

$$U_1 \Big|_{x=L} = U_3 \Big|_{x=L} = 0. \quad (8)$$

Условия сопряжения имеют вид

$$\frac{\partial U_m}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial U_{m+2}}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad U_m \Big|_{y=h} = U_{m+2} \Big|_{y=h}, \quad m = 1, 2. \quad (9)$$

Условия (5) представляют собой условия равенства нулю касательных напряжений в несущих слоях на оси симметрии и вдоль свободных краев.

**Построение решения.** С использованием первого уравнения системы (3) можно выразить перемещения второго слоя через перемещения первого:

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Подставляя (10) во второе уравнение системы (3), находим

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

где  $\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\beta_3 = \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ ;  $\beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ .

В работе [6] с помощью метода разделения переменных получено общее решение уравнения (11) (при условии  $\mu_1 = \mu_2$ ) и показано, что его можно представить в виде суммы

$$U_m = W_m(x) + V_m(x, y),$$

где  $W_m(x)$  — классическое одномерное решение Фолькерсена [1]. В свою очередь функция  $V_m(x, y)$  является суперпозицией частных решений (10), (11), которые могут быть

представлены в виде линейных комбинаций функций  $e^{\pm\lambda x} \sin ky$  и  $e^{\pm\lambda x} \cos ky$  (как и решение уравнения (4) [9]). При построении решения данной задачи будем использовать ту же структуру решения.

Подставляя частное решение  $e^{\pm\lambda x} \sin ky$  в (11), получаем алгебраическое уравнение, связывающее  $\lambda$  и  $k$ :

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что каждому значению  $\pm\lambda$  соответствуют четыре значения  $k$ , которые можно записать в форме  $\pm k_1(\lambda)$  и  $\pm k_2(\lambda)$ . Следовательно, частное решение уравнения (11), соответствующее, например, положительному значению  $\lambda$ , имеет вид

$$V_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

где  $C_m, S_m$  — произвольные константы.

Из соотношения (10) следует

$$V_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y),$$

где  $\gamma_m = 1 - \alpha_1(\lambda^2 - \mu_1 k_m^2)$ ,  $m = 1, 2$ .

Положим, что частные решения уравнений (3), (4) точно удовлетворяют краевым условиям (5) на границах  $y = 0$ ,  $y = H_1$  и  $y = H_2$  и краевому условию (9) на границе  $y = h$ . Из первых двух условий (5) получаем  $S_1 = S_2 = 0$ . Учитывая, что данные частные решения справедливы и для отрицательных значений  $\lambda$ , частные решения можно представить в виде

$$V_1^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda(x - L)] Y^{(1)}, \quad V_2^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda(x - L)] Y^{(2)},$$

$$Y^{(1)} = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y, \quad Y^{(2)} = C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y,$$

где  $A, B, C_1, C_2$  — произвольные константы.

Частные решения уравнения Пуассона (4), удовлетворяющие краевым условиям (5), имеют вид

$$V_3^* = [A^{(3)} \operatorname{ch} \Lambda x + B^{(3)} \operatorname{ch} \Lambda(x - L)] \cos(\Lambda(y - H_1)/\sqrt{\mu_1}),$$

$$V_4^* = [A^{(4)} \operatorname{ch} \Omega x + B^{(4)} \operatorname{ch} \Omega(x - L)] \cos(\Omega(y - H_2)/\sqrt{\mu_2}),$$

где  $\Lambda, \Omega$  — константы разделения переменных;  $A^{(3)}, A^{(4)}, B^{(3)}, B^{(4)}$  — произвольные константы.

Одномерные решения (3), (4) имеют вид

$$W_m = A_0 x + B_0 + d_m (A_0^{(1)} \operatorname{ch}(x/\sqrt{\beta_4}) + B_0^{(1)} \operatorname{ch}((x - L)/\sqrt{\beta_4})),$$

$$W_3 = a_0^{(1)} x + b_0^{(1)}, \quad W_4 = a_0^{(2)} x + b_0^{(2)},$$

где  $d_1 = 1; d_2 = -\alpha_1/\alpha_2; m = 1, 2; A_0, B_0, a_0, b_0$  — произвольные константы.

Из условия (9) следует

$$W_1 = W_3, \quad W_2 = W_4, \quad V_1^*(x, h) = V_3^*(x, h), \quad V_2^*(x, h) = V_4^*(x, h),$$

$$\frac{\partial V_1^*}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial V_3^*}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad \frac{\partial V_2^*}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial V_4^*}{\partial y} \Big|_{y=h}.$$

Таким образом,

$$A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = 0, \quad a_0^{(m)} = A_0, \quad b_0^{(m)} = B_0, \quad A^{(k)} = C_k A, \quad B^{(k)} = C_k B,$$

где  $C_3, C_4$  — коэффициенты, связывающие  $A^{(3)}, B^{(3)}$  и  $A^{(4)}, B^{(4)}$  с коэффициентами  $A$  и  $B$ . Для определения коэффициентов  $C_1, \dots, C_4$  получаем систему однородных линейных уравнений

$$AC = 0, \quad (13)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & -c_3 & 0 \\ \gamma_1 c_1 & \gamma_2 c_2 & 0 & -c_4 \\ k_1 s_1 & k_2 s_2 & -\lambda \mu_1^{-0,5} s_3 & 0 \\ k_1 \gamma_1 s_1 & k_2 \gamma_2 s_2 & 0 & -\lambda \mu_2^{-0,5} s_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix},$$

$$c_m = \cos k_m h, \quad s_m = \sin k_m h, \quad c_{m+2} = \cos \frac{\lambda(h - H_m)}{\sqrt{\mu_m}}, \quad s_{m+2} = \sin \frac{\lambda(h - H_m)}{\sqrt{\mu_m}}.$$

Система (13) имеет нетривиальное решение, если

$$\det A(\lambda) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет бесконечное счетное множество действительных корней  $\lambda_n$ , которым соответствуют  $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$ ,  $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$  и константы  $C_{1,n}, C_{2,n}, C_{3,n}, C_{4,n}$ , определяемые из системы (13) с точностью до произвольного множителя.

Таким образом, перемещения  $U_1, \dots, U_4$  можно представить в виде

$$U_j = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(j)}(y), \quad (15)$$

где

$$j = 1, \dots, 4, \quad X_n^{(1)} = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n x)}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)}, \quad Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$X_n^{(2)} = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n(x - L))}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)}, \quad Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos(\lambda_n(y - H_1)/\sqrt{\mu_1}), \quad Y_n^{(4)} = C_{4,n} \cos(\lambda_n(y - H_2)/\sqrt{\mu_2}),$$

множители  $\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)$  в знаменателе введены для упрощения исследования решения на сходимости.

Поскольку коэффициенты  $C_{1,n}, C_{2,n}, C_{3,n}, C_{4,n}$  определяются с точностью до произвольного множителя, для них вводится дополнительное условие (нормировка функций)

$$\int_0^h [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^h [Y_n^{(2)}]^2 dx + \int_h^{L_1} [Y_n^{(3)}]^2 dx + \int_h^{L_2} [Y_n^{(4)}]^2 dx = 1.$$

Таким образом, краевые условия (5), (9) выполняются точно. Коэффициенты  $A_0, A_n, B_0, B_n$  находим из краевых условий (6)–(8). С использованием указанных краевых условий получаем уравнения

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)} = 0, \quad A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)} = \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, \quad y \in (0; h),$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(3)} = 0, \quad A_0 L + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \theta_n + B_n \varkappa_n] Y_n^{(3)} = 0, \quad y \in (h; H_1),$$

$$\begin{aligned}
 A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(4)} &= \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, & A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(4)} &= \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, & y \in (h; H_2), \\
 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)} &= 0, & A_0 L + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \theta_n + B_n \varkappa_n] Y_n^{(1)} &= 0, & y \in (0; h), \\
 \theta_n &= \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n L)}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)}, & \varkappa_n &= \frac{1}{\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n L)}, & f(y) &= \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}, & y \in (0; H_2).
 \end{aligned}$$

Ограничив суммирование некоторым числом слагаемых  $N$ , запишем приведенные выше краевые условия в векторной форме

$$A_0 \mathbf{H}^{(1)} + B_0 \mathbf{H}^{(2)} + \sum_{n=1}^N A_n \mathbf{W}_n^{(1)}(y) + \sum_{n=1}^N B_n \mathbf{W}_n^{(2)}(y) - \mathbf{R} = 0, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ L \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_n Y_n^{(3)} \\ 0 \\ Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(2)} \\ \theta_n Y_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} -Y_n^{(1)} \\ -Y_n^{(2)} \\ -Y_n^{(3)} \\ \varkappa_n Y_n^{(3)} \\ -Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ \varkappa_n Y_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Системы функций  $Y_n^{(1)}, \dots, Y_n^{(4)}$  не ортогональны на соответствующих интервалах. При использовании данных функций можно удовлетворить восьми независимым краевым условиям, выбрав соответствующим образом коэффициенты  $A_0, B_0, A_n, B_n$ . Коэффициенты находим из условия ортогональности левой части уравнения (16) линейно независимым вектор-функциям  $\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}, \mathbf{W}_n^{(1)}, \mathbf{W}_n^{(2)}, n = 1, \dots, N$ . Для этого введем скалярное произведение

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_0^h u_1 v_1 dy + \int_0^h u_2 v_2 dy + \int_h^{H_1} u_3 v_3 dy + \int_h^{H_1} u_4 v_4 dy + \\
 &\quad + \int_h^{H_2} u_5 v_5 dy + \int_h^{H_2} u_6 v_6 dy + \int_0^h u_7 v_7 dy + \int_0^h u_8 v_8 dy,
 \end{aligned}$$

где  $u_i, v_i$  — соответствующие компоненты векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

С использованием указанного подхода получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(1,3)} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \mathbf{M}^{(2,3)} \\ \mathbf{M}^{(3,1)} & \mathbf{M}^{(3,2)} & \mathbf{M}^{(3,3)} \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(1)} \\ \mathbf{R}^{(2)} \\ \mathbf{R}^{(3)} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где

$$\mathbf{A} = (A_0, B_0, A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N)^T,$$

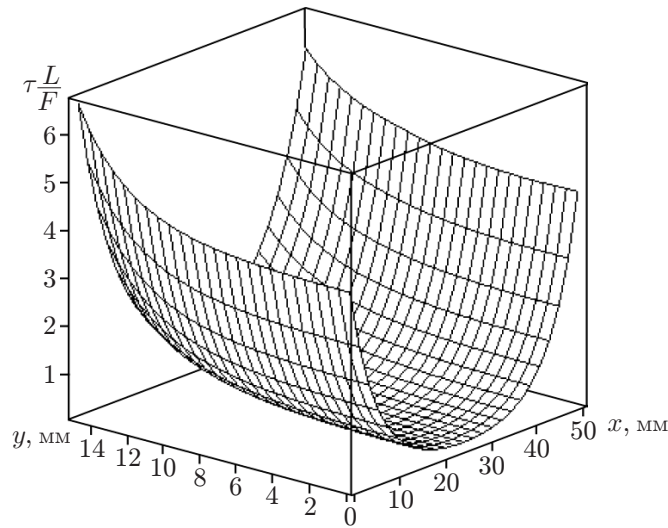


Рис. 2. Напряжения в клеевом слое

$$\begin{aligned}
 M_{i,j}^{(1,1)} &= (\mathbf{H}^{(j)}, \mathbf{H}^{(i)}), & M_{i,n}^{(1,2)} &= (\mathbf{W}_n^{(1)}, \mathbf{H}^{(i)}), & M_{i,n}^{(1,3)} &= (\mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{H}^{(i)}), \\
 M_{k,n}^{(2,2)} &= (\mathbf{W}_n^{(1)}, \mathbf{W}_k^{(1)}), & M_{k,n}^{(2,3)} &= (\mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{W}_k^{(1)}), & M_{k,n}^{(3,3)} &= (\mathbf{W}_n^{(2)}, \mathbf{W}_k^{(2)}), \\
 \mathbf{M}^{(2,1)} &= [\mathbf{M}^{(1,2)}]^\top, & \mathbf{M}^{(3,1)} &= [\mathbf{M}^{(1,3)}]^\top, & \mathbf{M}^{(3,2)} &= [\mathbf{M}^{(2,3)}]^\top, & i &= 1, 2, & j &= 1, 2, \\
 R_i^{(1)} &= (\mathbf{R}, \mathbf{H}^{(i)}), & R_k^{(2)} &= (\mathbf{R}, \mathbf{W}_n^{(1)}), & R_k^{(3)} &= (\mathbf{R}, \mathbf{W}_n^{(2)}), & n &= 1, \dots, N, & k &= 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Функции  $Y_n^{(m)}$  представляют собой линейные комбинации тригонометрических функций, коэффициенты при которых являются ограниченными вследствие введенного выше условия нормировки. Аргументами тригонометрических функций являются выражения вида  $k_{m,n}y$ , где  $k_{m,n}$  при достаточно больших значениях  $m, n$  пропорциональны  $n$ . Следовательно, недиагональные элементы матрицы системы (17), которые находятся на достаточно большом расстоянии от диагонали, пропорциональны  $(nk)^{-1}$ . Таким образом, ряд, составленный из квадратов недиагональных коэффициентов, сходится и решение бесконечной системы линейных уравнений (17) можно получить с помощью метода редукции.

**Модельная задача.** Определим напряженно-деформированное состояние клеевого соединения одинаковых пластин с размерами  $5 \times 4$  см ( $H_1 = H_2 = H = 2$  см,  $L = 5$  см) и толщиной  $\delta_0 = 4$  мм, изготовленных из алюминиевого сплава с модулями Юнга  $E_1 = E_2 = 70$  ГПа и модулями сдвига  $G_1 = G_2 = 25,6$  ГПа. Параметры клеевого слоя:  $\delta_0 = 0,1$  мм,  $G_0 = 0,5$  ГПа. Предположим, что ко второму слою приложена равномерная нагрузка  $F(y) = F = \text{const}$ . На рис. 2 показано распределение касательных напряжений в клеевом слое шириной 3 см ( $h = 1,5$  см,  $h/H = 0,75$ ). Видно, что наличие непроклея вдоль боковой поверхности соединения приводит к значительному увеличению напряжения вблизи боковых поверхностей клеевого слоя. Наибольшее напряжение имеет место в углах клеевого слоя.

Расчеты показали, что с увеличением  $n$  коэффициенты  $A_n, B_n$  в формулах (15) уменьшаются немонотонно и в общем случае зависят от количества удерживаемых членов ряда. Количество членов  $N$  в рядах (15) оказывает существенное влияние только на коэффициенты  $A_n, B_n$  со значениями индексов, близкими к  $N$ . Расчеты также показали, что абсолютные величины коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  можно мажорировать числовым рядом, коэффициенты которого уменьшаются пропорционально  $n^{-2}$ . Это свидетельствует об устойчивости счета и быстрой сходимости решения.

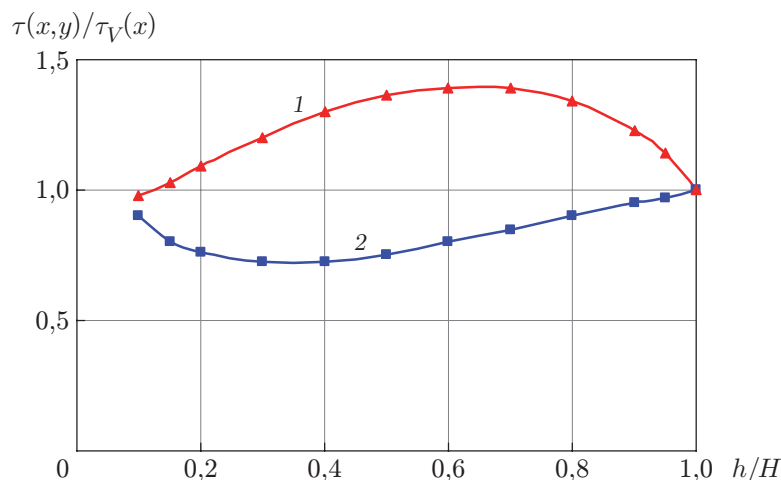


Рис. 3. Зависимость напряжений вблизи боковой поверхности соединения от относительной ширины области непрочности:  
 1 —  $\tau(0, h)/\tau_V(0)$ ; 2 —  $\tau(0, 0)/\tau_V(0)$

Для того чтобы оценить влияние относительной ширины области непрочности  $h/H$  на неравномерность распределения напряжений в клеевом слое по ширине соединения, определим отношение напряжений в клеевом слое, вычисленных по предложенной двумерной модели (2), к напряжениям  $\tau_V(x)$ , полученным по одномерной модели Фолькерсена. Рассмотрим зависимость отношения  $\tau(x, y)/\tau_V(x)$  от отношения  $h/H$  в двух точках на торце соединения: на оси симметрии  $(0; 0)$  и в углу клеевого слоя  $(0; h)$ .

Классическая одномерная модель Фолькерсена описана, например, в работе [1]. В данном случае при  $E_1 = E_2 = E$  и  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  напряжения в клеевом слое вычисляются по формуле

$$\tau_V(x) = \frac{P_0 F H}{\xi E \delta h} \left( \frac{1 + \operatorname{ch} \xi L}{\operatorname{sh} \xi L} \operatorname{ch} \xi x - \operatorname{sh} \xi x \right), \quad \xi = \sqrt{\frac{2P_0}{E\delta}}.$$

Зависимости отношения  $\tau(x, y)/\tau_V(x)$  от отношения  $h/H$  показаны на рис. 3. Видно, что на оси симметрии соединения, вдали от боковых поверхностей, напряжения, рассчитанные по предлагаемой модели, меньше напряжений, рассчитанных по одномерной модели, а вдоль боковых поверхностей — больше. При этом напряжения вблизи боковой поверхности клеевого слоя могут на 40 % превышать напряжения, рассчитанные по одномерной модели. При  $h \rightarrow 0$  или  $h = H$  распределение напряжений по ширине клеевого слоя можно считать равномерным.

**Заключение.** Предложена упрощенная двумерная математическая модель нахлесточного клеевого соединения и получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии в клеевом соединении пластин различной ширины с областями непрочности в продольном направлении. При решении модельной задачи показано, что наличие непрочности вблизи боковой поверхности области склейки приводит к значительному увеличению напряжений в угловых областях клеевого слоя. Предложенная модель может быть использована при определении напряженного состояния клеевого слоя в случае наличия изгиба в плоскости соединения, при расчете напряженного состояния нахлесточных соединений силовых элементов конструкции с обшивкой, при расчете напряжений в зоне соединений элементов интегральных композитных конструкций и т. д.



## ЛИТЕРАТУРА

1. **da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Spelt J. K.** Analytical models of adhesively bonded joints. 1. Literature survey // Intern. J. Adhes. Adhesiv. 2009. V. 29. P. 319–330.
2. **Рябенков Н. Г., Артюхин Ю. П.** Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин // Исслед. по теории пластин и оболочек. 1981. Вып. 16. С. 82–90.
3. **Rapp P.** Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. 2. Displacement formulation for orthotropic adherends // Arch. Civil Mech. Engng. 2015. V. 15, iss. 2. P. 603–619.
4. **Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D. R.** Analysis method for bonded patch repair of a skin with a cutout // Composite Structures. 2002. V. 55. P. 277–294.
5. **Chukwujekwu Okafor A., Singh N., Enemuoh U. E., Rao S. V.** Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // Composite Structures. 2005. V. 71. P. 258–270.
6. **Kurennov S. S.** A simplified two-dimensional model of adhesive joints. Nonuniform load // Mech. Composite Materials. 2015. V. 51, iss. 4. P. 479–488.
7. **Куреннов С. С., Танчик Е. В.** Расчет напряженного состояния клеевого соединения прямоугольных пластинок разной ширины // Вестн. Моск. авиац. ин-та. 2015. Т. 22, № 2. С. 162–169.
8. **Куреннов С. С.** Напряженное состояние пластинок разной ширины. Приближенная теория и эксперимент // Вісник Запорізького нац. ун-ту. 2017. № 1. С. 235–244.
9. **Васильев В. В., Боков Ю. В.** Исследования напряженного состояния клеевого соединения композиционного материала с металлическим листом // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. М.: Центр. аэрогидродинам. ин-т, 1979. Вып. 7. С. 4–10.
10. **Васильев В. В., Лурье С. А.** О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 4. С. 40–49.

*Поступила в редакцию 11/V 2018 г.,  
после доработки — 26/XII 2018 г.  
Принята к публикации 28/I 2019 г.*