

О ВЛИЯНИИ ТОКОВ ХОЛЛА ПРИ УСКОРЕНИИ ПРОВОДЯЩЕГО
ГАЗА В СОБСТВЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. М. Бам-Зеликович

(Москва)

В работе [1] была решена задача о влиянии токов Холла на картину течения проводящего газа, который ускоряется в канале до больших скоростей во внешних электрическом и магнитном полях. В настоящей статье рассматривается влияние токов Холла при ускорении плазмы в собственном магнитном поле, т. е. магнитном поле, индуцированном токами, текущими в плазме.

1. Рассмотрим течение проводящего газа в канале с постоянной площадью поперечного сечения с прямолинейной осью. Введем прямоугольную систему координат, ось x которой направим вдоль оси канала, а начало координат поместим на нижней стенке в начальном сечении канала. Ось y направим перпендикулярно нижней стенке, через y_0 обозначим постоянную высоту канала. Сформулируем предположения, при которых будет решаться задача.

- (1) Все искомые величины не зависят от координаты z .
- (2) Проекция вектора напряженности электрического поля E на направление оси z равна нулю. Разность потенциалов $\phi(x)$, приложенная к верхней и нижней стенкам канала, такова, что $E_x \ll E_y = E(x, y)$.
- (3) Внешние магнитные поля отсутствуют.
- (4) Плазма в среднем нейтральна. Проводимость $\sigma = \text{const}$, параметр $\omega\tau = k = \text{const}$ (ω — циклотронная частота электронов, а τ — время между соударениями). Величина k такова, что k^2 можно пренебречь по сравнению с единицей.
- (5) Высота канала y_0 постоянна.
- (6) Искажением электрического и магнитного полей у боковых стенок канала и на концах канала можно пренебречь.
- (7) Газ ускоряется до больших скоростей ($\sim 10^7$ см / сек), и градиентом давления можно пренебречь по сравнению с электродинамической силой.

Предположения (1), (3), (6) соответствуют случаю течения в цилиндрическом канале с коаксиальными электродами, в котором расстояние y_0 между электродами мало по сравнению с радиусами электродов. О допустимости предположения (7) см., например, [2].

Уравнения неразрывности, движения и обобщенного закона Ома в рассматриваемом случае имеют вид

$$\partial(\rho u) / \partial x + \partial(\rho v) / \partial y = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi} H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi} H \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{4\pi\sigma}{c(1+k^2)} \left[\frac{1}{c} vH - k \left(E - \frac{1}{c} uH \right) \right] \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{4\pi\sigma}{c(1+k^2)} \left[E - \frac{1}{c} uH + k \frac{1}{c} vH \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь ρ — плотность, u и v — проекции скорости на оси x и y , H — проекция напряженности магнитного поля на ось z . Здесь учтено известное уравнение электродинамики $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}$.

Граничными условиями для u , v и ρ будут

$$u = u_{00}, \quad v = 0, \quad \rho = \rho_{00} \quad \text{при } x = 0; \quad v = 0 \quad \text{при } y = y_0 \text{ и } y = 0 \quad (1.4)$$

Кроме того, имеем условия для H и E

$$H = 0 \quad \text{при } x = L, \quad y = 0; \quad \int_0^{y_0} E \, dy = \varphi(x) \quad (1.5)$$

Условие для E выражает, очевидно, тот факт, что разность потенциалов между электродами является заданной величиной. Относительно же условия для H следует заметить следующее. Если бы токов Холла не было, то в силу того, что концевыми эффектами пренебрегаем, H на конце канала должно было бы обращаться в нуль. Наличие токов, текущих вдоль оси x , может приводить к тому, что в конце канала напряженность магнитного поля не равна нулю по всему сечению. Однако, как известно, токи, текущие вдоль поверхности осесимметричного проводника, порождают магнитное поле только вне проводника. Поэтому на внутреннем электроде, т. е. при $y = 0$, напряженность магнитного поля остается равной нулю. В других же точках конечного сечения она должна определяться из решения задачи.

Исключая E из (1.3), получим

$$\partial H / \partial y - k \partial H / \partial x = (4\pi\sigma / c^2) v H \quad (1.6)$$

а для самого E из (1.3) имеем выражение

$$E = (1/c) u H - (c/4\pi\sigma) (\partial H / \partial x + k \partial H / \partial y)$$

и, подставляя в (1.5), найдем

$$\int_0^{y_0} \left[\frac{1}{c} u H - \frac{c}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + k \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] dy = \varphi(x) \quad (1.7)$$

Таким образом, необходимо решать систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных (1.1), (1.2), (1.6) при граничных условиях (1.4), (1.5) и (1.7). Неизвестными функциями являются ρ , u , v и H .

В [1] было указано, что в рассматриваемом случае ускорения до больших скоростей влияние токов Холла приводит к тому, что в канале появляются три различных зоны течения. У нижней стенки (анода) образуется зона сильного разрежения (вакуума), у верхней стенки садится скачок уплотнения, между этими двумя зонами находится ядро потока. Отношение высоты зоны вакуума и зоны за скачком уплотнения к высоте канала, как было показано в [1], будет порядка k .

Рассмотрим прежде всего течение в ядре потока. Разложим искомые функции в ряды по степеням k

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i k^i, \quad u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i k^i, \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i k^i, \quad H = \sum_{i=0}^{\infty} H_i k^i \quad (1.8)$$

Будем решать систему уравнений, пренебрегая членами порядка k^2 . Подставляя выражения (1.8) в уравнения (1.1), (1.2) и (1.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , получим системы уравнений для определения нулевого и первого приближений. Для величин ρ_0 , u_0 , v_0 , H_0 имеем (замечая, что при $k = 0$ токи Холла отсутствуют и движение в канале будет одномерным)

$$v_0 = 0, \quad \frac{\partial(\rho_0 u_0)}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = - \frac{1}{4\pi} H_0 \frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

Для ρ_1, u_1, v_1, H_1 получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u_0 \rho_1 + u_1 \rho_0)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 v_1)}{\partial y} &= 0 \\ (u_0 \rho_1 + u_1 \rho_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \rho_0 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{1}{4\pi} \left(H_0 \frac{\partial H_1}{\partial x} + H_1 \frac{\partial H_0}{\partial x} \right) \\ \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{1}{4\pi} H_0 \frac{\partial H_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial x} = \frac{4\pi\epsilon}{c^2} v_1 H_0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Соответственно граничные условия для нулевого приближения дают

$$\begin{aligned} u_0 = u_{00}, \quad v_0 = 0, \quad \rho_0 = \rho_{00} \quad \text{при } x = 0; \quad H_0 = 0 \quad \text{при } x = L \\ y_0 [(1/c) u_0 H_0 - (c/4\pi\epsilon) dH_0/dx] = \varphi(x) \end{aligned} \quad (1.11)$$

При выводе последнего соотношения из условия (1.7) учтено, что величины нулевого приближения не зависят от y , и поэтому можно соответствующее выражение вынести за знак интеграла.

Из (1.4), (1.5) и (1.7) получаем также граничные условия для первого приближения

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \rho_1 = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad H_1 = 0 \quad \text{при } x = L, y = 0 \\ \int_0^{y_0} \left[\frac{1}{c} (u_0 H_1 + u_1 H_0) - \frac{c}{4\pi\epsilon} \frac{\partial H_1}{\partial x} \right] dy = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

В последнем условии (1.12) интеграл взят по всей высоте канала, а не только по высоте ядра потока, так как разница между этими интегралами будет порядка k . А так как сам интеграл в (1.12) является коэффициентом в разложении при члене порядка k выражения, входящего в формулу (1.7), то, следовательно, ошибка при замене интервала интегрирования будет порядка k^2 , т. е. такого порядка, которым всюду пренебрегаем.

Рассмотрим уравнения нулевого приближения. Из второго и третьего уравнений (1.9) и граничных условий имеем

$$\rho_0 u_0 = \rho_{00} u_{00}, \quad \rho_{00} u_{00} u_0 + H_0^2 / 8\pi = \rho_{00} u_{00}^2 + H_{00}^2 / 8\pi \quad (1.13)$$

Здесь через H_{00} обозначено значение H_0 при $x = 0$, подлежащее определению.

Выражая u_0 через H_0 из (1.13) и подставляя в последнее соотношение (1.11), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения H_0

$$\frac{c}{4\pi\epsilon} \frac{dH_0}{dx} = \frac{H_0}{c} \left[u_{00} + \frac{1}{8\pi\rho_{00}u_{00}} (H_{00}^2 - H_0^2) \right] - \frac{\varphi}{y_0} \quad (1.14)$$

При интегрировании уравнения (1.14) появится произвольная константа. Она может быть выражена через H_{00} из условия, что $H_0 = H_{00}$ при $x = 0$. После этого само H_{00} может быть определено из граничного условия (1.11). Таким образом, нахождение величин нулевого приближения сводится к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Система уравнений (1.10) для величин первого приближения представляет систему четырех линейных уравнений в частных производных. При известных величинах нулевого приближения ее решение при граничных условиях (1.12) может быть сведено к вычислению квадратур. Действительно, исключая H_1 из двух последних уравнений (1.10), получим

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\epsilon H_0^2}{c^2 \rho_{00} u_{00}} v_1 + \frac{H_0}{4\pi \rho_{00} u_{00}} \frac{dH_0}{dx} = 0 \quad (1.15)$$

Это — линейное уравнение относительно v_1 , содержащее только одну производную v_1 по x . Коэффициенты этого уравнения также являются функциями только x . Поэтому уравнение (1.15) можно проинтегрировать по x . Его общим интегралом будет

$$v_1 = e^{-\Lambda_0(x)} \left[f_1(y) - \frac{1}{4\pi\rho_{00}u_{00}} \int_0^x H_0 \frac{dH_0}{dx} e^{\Lambda_0(x)} dx \right], \quad \Lambda_0(x) = \frac{\sigma}{c^2\rho_{00}u_{00}} \int_0^x H_0^2 dx$$

где $f_1(y)$ — произвольная функция y .

Подставляя сюда граничное условие (1.12), получим, что $f_1(y) \equiv 0$ и

$$v_1 = - \frac{1}{4\pi\rho_{00}u_{00}} e^{-\Lambda_0(x)} \int_0^x H_0 \frac{dH_0}{dx} e^{\Lambda_0(x)} dx \quad (1.16)$$

Таким образом, вычисление v_1 сводится к квадратурам. После этого из последнего уравнения (1.10) находим

$$H_1 = y [dH_0/dx + (4\pi\sigma/c^2)v_1H_0] + f_2(x) \quad (1.17)$$

где $f_2(x)$ — произвольная функция x .

Так как из (1.16) следует, что в рассматриваемом случае v_1 зависит только от x , то из первого уравнения (1.10) и граничных условий (1.12) находим

$$u_0\rho_1 + u_1\rho_0 = 0 \quad (1.18)$$

Учитывая (1.18) и (1.13), можем записать теперь оставшееся уравнение (1.10) в виде

$$\rho_{00}u_{00} \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{1}{4\pi} \left(H_0 \frac{\partial H_1}{\partial x} + H_1 \frac{\partial H_0}{\partial x} \right)$$

Или, интегрируя

$$\rho_{00}u_{00}u_1 + (1/4\pi) H_0H_1 = f_4(y) \quad (1.19)$$

где $f_4(y)$ — произвольная функция y .

При $x = 0$ имеем $u_1 = 0$, а H_1 , как следует из (1.17) и (1.12), равно

$$H_1(0, y) = y (dH_0/dx)_0 + f_2(0)$$

Учитывая это, найдем, что

$$f_4(y) = (1/4\pi) H_{00} [y (dH_0/dx)_0 + f_2(0)]$$

Подставляя полученное значение $f_4(y)$, а также значение H_1 из (1.17) в (1.19), получим в явном виде зависимость u_1 от y

$$u_1 = \frac{1}{4\pi\rho_{00}u_{00}} \left\{ y \left[\left(\frac{dH_0}{dx} \right)_0 H_{00} - \frac{dH_0}{dx} H_0 - \frac{4\pi\sigma}{c^2} H_0^2 v_1 \right] + H_{00} f_2(0) - H_0 f_2(x) \right\} \quad (1.20)$$

Таким образом, H_1 и u_1 выражаются через одну произвольную функцию от x : $f_2(x)$. Эта функция должна быть определена из последнего соотношения (1.12). Подставляя в (1.12) значения H_1 из (1.17) и u_1 из (1.20), найдем искомое уравнение для $f_2(x)$

$$\int_0^{y_0} \left[2A(x)y + B(x)f_2(x) + C(x)f_2(0) - \frac{df_2}{dx} \right] dy = 0$$

$$2A(x) = \frac{\sigma}{\rho_{00}u_{00}c^2} \left[\left(\frac{dH_0}{dx} \right)_0 H_{00}H_0 - \frac{dH_0}{dx} H_0^2 - \frac{4\pi\sigma}{c^2} H_0^3 v_1 \right] +$$

$$+ \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{dH_0}{dx} u_0 + \left(\frac{4\pi\sigma}{c^2} \right)^2 H_0 u_0 v_1 - \left[\frac{d^2 H_0}{dx^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(H_0 \frac{dv_1}{dx} + v_1 \frac{dH_0}{dx} \right) \right]$$

$$B(x) = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(u_0 - \frac{1}{4\pi\rho_{00}u_{00}} H_0^2 \right), \quad C(x) = \frac{\sigma}{\rho_{00}u_{00}c^2} H_{00}H_0$$

Здесь $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ — известные функции x . Интегрируя по y и сокращая на y_0 , получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции $f_2(x)$

$$df_2/dx = B(x)f_2(x) + C(x)f_2(0) + y_0A(x)$$

Его общим интегралом будет

$$f_2(x) = \left[\exp\left(\int_0^x B dx\right) \right] \left\{ f_2(0) + \int_0^x [Cf_2(0) + y_0A] \left[\exp\left(-\int_0^x B dx\right) \right] dx \right\} \quad (1.21)$$

Входящая сюда константа $f_2(0)$ может быть определена из не использованного еще граничного условия (1.12) для H_1 , которое вместе с (1.17) показывает, что $f_2(L) = 0$. Итак, формулы (1.16) — (1.18), (1.20) и (1.21) позволяют вычислить в квадратурах в общем случае все искомые величины первого приближения.

2. Проведем все выкладки до конца для случая, когда при отсутствии токов Холла функция $\varphi(x)$ задана оптимальным образом, т. е. она такова, что при ускорении плазмы в канале до заданной скорости джоулевы потери минимальные. В этом случае, как было показано в [3], распределение разности потенциалов вдоль оси канала должно иметь вид

$$\varphi = (H_{00}y_0/c)(1-x/L)\{u_{00} + (H_{00}^2/8\pi\rho_{00}u_{00})[1 - (1-x/L)^2]\} + cH_{00}y_0/4\pi\sigma L \quad (2.1)$$

где H_{00} — значение напряженности магнитного поля в сечении $x = 0$, определяемое по формуле

$$H_{00} = 4\pi\sigma\varphi_0 cL / y_0(4\pi\sigma Lu_{00} + c^2) \quad (\varphi_0 = \varphi(0)) \quad (2.2)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x/L = x^*, \quad y/L = y^*, \quad \rho/\rho_{00} = \rho^*, \quad H/H_{00} = H^* \\ (4\pi\sigma L/c^2)u = u^*, \quad (4\pi\sigma L/c^2)v = v^*, \quad \sigma H_{00}^2 L/\rho_{00}u_{00}c^2 = \lambda \quad (2.3)$$

Условимся в дальнейшем звездочки у безразмерных величин опустить.

Для разности потенциалов, распределенной по длине канала по закону (2.1), нулевое приближение напряженности магнитного поля в канале и u_0 имеют вид

$$H_0 = 1 - x, \quad u_0 = u_{00} + 0.5\lambda [1 - (1-x)^2] \quad (2.4)$$

Из формулы (1.16) находим

$$v_1 = \lambda e^{(\lambda/3)(1-x)^3} \int_0^x (1-x) e^{-(\lambda/3)(1-x)^3} dx \quad (2.5)$$

Из (1.17) и (1.20) получаем

$$H_1 = y(v_1 H_0 - 1) + f(x) \quad (f(x) = f_2(x)/H_{00}) \quad (2.6) \\ u_1 = -\lambda [y(1 - H_0 + v_1 H_0^2) + H_0 f - f_0] \quad (f_0 = f(0))$$

Подставляя соответствующие значения величин в выражение (1.21) для $f_2(x)$ и приводя его к безразмерному виду, получим

$$f(x) = \left[\exp\left(\int_0^x (u_0 - \lambda H_0^2) dx\right) \right] \left[f_0 + \frac{1}{2} y_0 \int_0^x [2y_0 \lambda H_0 f_0 - (u_0 + \lambda H_0) + \right. \\ \left. + v_1(1 + u_0 H_0)] \exp\left(-\int_0^x (u_0 - \lambda H_0^2) dx\right) dx \right]$$

Учитывая формулы (2.4), можно вычислить часть интегралов, входящих в это выражение. Проведя соответствующие выкладки, получим

$$f(x) = e^{-H_0 u_0} \left\{ f_0 [e^{u_0} + J_1(x)] + \frac{1}{2} y_0 J_2(x) \right\}, \quad J_1(x) = \int_0^x e^{H_0 u_0} H_0 dx$$

$$J_2(x) = \int_0^x [v_1(1 + u_0 H_0) - (u_0 + \lambda H_0)] e^{H_0 u_0} dx \quad (2.7)$$

Определим константу f_0 . Для этого заметим, что из граничного условия (1.12) для H_1 и формулы (2.6) следует, что должно быть $f(1) = 0$. Используя это положение, легко вычисляем последнюю произвольную константу f_0

$$f_0 = -y_0 J_2(1) / 2 (e^{u_0} + J_1(1)) \quad (2.8)$$

Таким образом, в ядре потока искомые величины имеют вид

$$u = u_{00} + 0.5\lambda [1 - (1-x)^2] - k\lambda \{y [1 - (1-x)^2] + \lambda (1-x)^2 J(x) e^{(\lambda/3)(1-x)^3}\} + (1-x)f(x) - f_0$$

$$J(x) = \int_0^x (1-x) e^{-(\lambda/3)(1-x)^3} dx \quad v = k\lambda J(x) e^{(\lambda/3)(1-x)^3} \quad (2.9)$$

$$H = 1 - x + k \{f(x) + y [\lambda (1-x) J(x) e^{(\lambda/3)(1-x)^3} - 1]\}$$

где $f(x)$ дается формулой (2.7), а f_0 — формулой (2.8).

Рассмотрим, исходя из полученных формул, более подробно картину течения в ядре потока. Из формулы (2.5) находим

$$dv_1 / dx = \lambda (1-x) [1 - \lambda (1-x) e^{(\lambda/3)(1-x)^3} J(x)]$$

Отсюда видно, что производная dv_1 / dx всегда обращается в нуль в конце канала при $x = 1$. Поэтому в рассматриваемом случае, в отличие от примеров, исследованных в [1], проекция скорости на ось y достигает максимума всегда в конце канала. Значения v/k , вычисленные по формуле (2.5) для трех значений λ ($\lambda = 10$ — сплошная кривая, $\lambda = 3$ — пунктирная кривая, $\lambda = 0.3$ — штрих-пунктирная), показаны на фиг. 1.

Дифференциальное уравнение линий тока с точностью до малых высшего порядка имеет вид

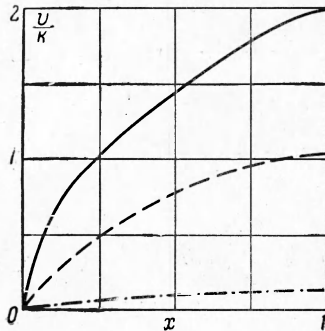
$$dy / dx = kv_1 / u_0$$

Интегрируя и используя формулы (2.4) и (2.5), получим связь y и x вдоль линии тока

$$y = Y + k \int_0^x \frac{\lambda J(x) e^{(\lambda/3)(1-x)^3}}{u_{00} + 0.5\lambda [1 - (1-x)^2]} dx \quad (2.10)$$

где Y — значение y на линии тока при $x = 0$.

Линии тока, вычисленные по этой формуле для $u_{00} = 3$ и двух значений λ , показаны на фиг. 2 ($\lambda = 10$ — сплошная кривая и $\lambda = 3$ — пунктирная кривая). Из формулы (2.10) следует, что, с точностью до членов порядка k^2 , различные линии тока могут быть получены одна из другой простым сдвигом вдоль оси y .



Фиг. 1

3. Течение за скачком уплотнения рассчитывается в случае ускорения собственным магнитным полем совершенно аналогично тому, как это было сделано при внешнем магнитном поле [1]. Остаются справедливыми оценки величины скорости v , и поэтому для плотности и скорости за скачком по-прежнему будут справедливы в первом приближении формулы

$$\begin{aligned} \rho^1 / \rho^0 &= (\kappa + 1) / (\kappa - 1) \\ u_n^1 / u_n^0 &= (\kappa - 1) / (\kappa + 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь κ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме, верхним индексом 0 обозначены величины в ядре потока перед скачком, верхним индексом 1 — за скачком и через u_n — проекция скорости на нормаль к скачку. Если газ полностью ионизован, то можно считать, что при переходе через скачок величина κ не меняется.

Также остаются справедливыми формулы

$$u^1 = u_\tau^1 \cos \alpha + u_n^1 \sin \alpha, \quad v^1 = -u_\tau^1 \sin \alpha + u_n^1 \cos \alpha \quad (3.2)$$

$$u_\tau = u \cos \alpha - v \sin \alpha, \quad u_n = u \sin \alpha + v \cos \alpha \quad (3.3)$$

Здесь α — угол наклона скачка к верхней стенке и u_τ — проекция скорости на касательную к скачку.

Как показано в [1], с принятой степенью точности можно считать за скачком $v \approx 0$. Тогда, учитывая, что касательная составляющая скорости при переходе через скачок не меняется, из (3.1) и (3.2) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = u_n^1 / u_\tau^1 = u_n^1 / u_\tau^0 = [(\kappa - 1) / (\kappa + 1)] u_n^0 / u_\tau^0 \quad (3.4)$$

Ограничиваясь членами порядка k , из (3.3) и (3.4) можно найти, так же как и в случае внешнего магнитного поля,

$$\operatorname{tg} \alpha = (\kappa - 1) v^0 / 2u^0, \quad u^1 = u_\tau^1 = u_\tau^0 = u^0 \quad (3.5)$$

Уравнения неразрывности и движения за скачком с учетом того, что за скачком $v \approx 0$, при сохранении лишь основных членов принимают вид

$$\partial(\rho u) / \partial x = 0, \quad \rho u \partial u / \partial x = -u_{00} \lambda H \partial H / \partial x$$

Интегрируя их, получаем

$$\rho u = \rho^1 u^1, \quad \rho u^2 + 0.5 u_{00} \lambda H^2 = \rho^1 u^{12} + 0.5 u_{00} \lambda H^{12} \quad (3.6)$$

где ρ^1 , u^1 и H^1 — значения ρ , u и H на рассматриваемой линии тока за скачком в том месте, где она пересекает скачок. Подставляя в первое уравнение (3.6) разложения (1.8) и учитывая формулы (1.13), (1.18), (3.1) и (3.5), получим, что за скачком будет

$$\rho u = [(\kappa + 1) / (\kappa - 1)] \rho_{00} u_{00} \quad (3.7)$$

Заметим теперь, что за скачком с точностью до величин порядка k^2 можно считать, что напряженность магнитного поля H не зависит от y . Действительно, из (1.3) следует, что по порядку величин $\partial H / \partial y \sim kH / y_0$. Следовательно, за скачком будет

$$H(x, y) = H(x, y^1) + \int_{y^1}^y \frac{\partial H}{\partial y} dy = H(x, y^1) + O(k^2)$$

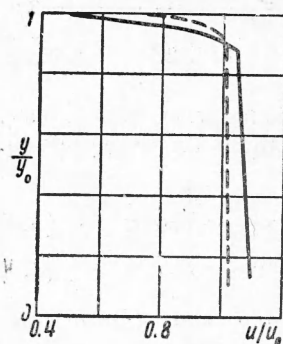
так как интервал интегрирования $y - y^1 \sim ky_0$, где y^1 — координата скачка. Учитывая это, а также формулы (3.7), (3.5) и то, что H на скачке уплотнения разрыва не терпит, получим из второго уравнения (3.6) выражение для скорости u за скачком

$$u(x, y) = u[x^1(y), y] + [(\kappa - 1) / 2(\kappa + 1)] \lambda \{H^2[x^1(y), y] - H^2[x, y^1(x)]\} \quad (3.8)$$

Формула (3.8) дает выражение скорости газа за скачком через параметры в ядре потока перед скачком в рассматриваемом сечении канала (точка $x, y^1(x)$) и в сечении, где линия тока пересекает скачок (точка $x^1(y), y$).

Связь безразмерных координат скачка x^1 и y^1 получим, замечая, что $\operatorname{tg} \alpha = -dy^1/dx^1$. Подставляя сюда значения $\operatorname{tg} \alpha$ из (3.5) и входящие в выражение (3.5) величины u и v в ядре потока из (2.9) и интегрируя, получим с точностью до величин порядка k^2

$$y^1 = y_0 - k \frac{\kappa - 1}{2} \int_0^x \frac{v_1 dx}{u_{00} + 0.5\lambda [1 - (1 - x)^2]} \quad (3.9)$$



Фиг. 3

На фиг. 3 показаны профили скорости на выходе из канала, рассчитанные по формуле (2.9) для ядра потока и (3.8) за скачком уплотнения.

По оси абсцисс отложено отношение скорости потока к u_0 , т. е. к значению скорости на выходе из канала при отсутствии токов Холла, по оси ординат — значение y , отнесенное к высоте канала (к y_0). Расчет проведен для $k = 0.2$, $y_0 = 0.3$, $u_{00} = 3$. Сплошная кривая соответствует $\lambda = 10$, пунктирная — $\lambda = 3$. Точкам излома на кривых соответствует координата скачка уплотнения ($y^1/y_0 \approx 0.887$ — при $\lambda = 10$ и $y^1/y_0 \approx 0.907$ — при $\lambda = 3$). Нижние точки на кривых дают границу области вакуума. Для $\lambda = 10$ эта граница будет при $y/y_0 \approx 0.136$ и для $\lambda = 3$ — при $y/y_0 \approx 0.114$.

Из фиг. 3 видно, что общий характер влияния токов Холла на профиль скорости остается при ускорении в собственном магнитном поле таким же, как и при ускорении во внешнем магнитном поле [1], т. е. в ядре потока скорость меняется не сильно, а в зоне за скачком уплотнения в струйках, прошедших через скачок в начале канала, скорость в 1.5—2 раза меньше, чем в ядре потока. Небольшое отличие состоит лишь в том, что при ускорении в собственном магнитном поле профиль скорости в ядре не симметричен относительно средней линии канала. Это связано с тем, что при ускорении в собственном магнитном поле последнее несимметрично по сечению канала.

Поступила 23 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М. О влиянии токов Холла на течение проводящего газа при больших скоростях потока, ПМТФ, 1965, № 3.
2. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
3. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М. Об ускорении с минимальными потерями проводящего газа в сильных электромагнитных полях. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.