

19. Каган Ю. М., Перель В. И. О диагностике плазмы в магнитном поле с помощью тонкого цилиндрического зонда. — ЖТФ, 1968, т. 38, № 10.  
 20. Носачев Л. В., Скворцов В. В. Характеристики зондов в замагниченном потоке синтезированной плазмы. — ЖТФ, 1978, т. 48, № 11.  
 21. Шувалов В. А. О влиянии собственного магнитного поля на структуру возмущенной зоны около тела в потоке разреженной плазмы. — ЖТФ, 1984, т. 54, № 6.

Поступила 17/IV 1985 г.

УДК 532.526

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛОЕВ СМЕШЕНИЯ

Е. В. Богданова, О. С. Рыжов  
(Москва)

Рассматриваются свойства решений уравнения Фолкнера — Скэн в предельном случае, когда величина содержащегося в нем параметра стремится к нулю. Формулируются два типа граничных условий, первый из которых соответствует потоку в симметричном следе, второй — обтеканию пластинки. Результаты расчетов и асимптотического анализа позволяют заключить, что переход от одних граничных условий к другим влечет за собой резкое изменение положения слоя смешения.

1. Пусть  $x$  и  $y$  — декартовы координаты пространства,  $v$  — кинематический коэффициент вязкости,  $U(x)$  — продольная составляющая скорости на внешнем краю пограничного слоя. Следуя Гертлеру [1], введем безразмерные переменные

$$(1.1) \quad \xi = \frac{1}{v} \int_0^x U(x) dx, \quad \eta = yU(x) \left[ 2v \int_0^x U(x) dx \right]^{-\frac{1}{2}}$$

и возьмем функцию тока  $\psi$  в виде

$$(1.2) \quad \psi = v (2\xi)^{1/2} f(\xi, \eta).$$

Уравнение для  $\psi$  гласит

$$(1.3) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta(\xi) \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 2\xi \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right),$$

где

$$(1.4) \quad \beta = 2U^{-2}(x) \frac{dU}{dx} \int_0^x U(x) dx.$$

Сформулируем граничные условия при  $\eta = 0$ , соответствующие потоку в симметричном следе и обтеканию плоской пластинки. На оси следа

$$(1.5) \quad f = \partial^2 f / \partial \eta^2 = 0,$$

в то время как на поверхности пластинки

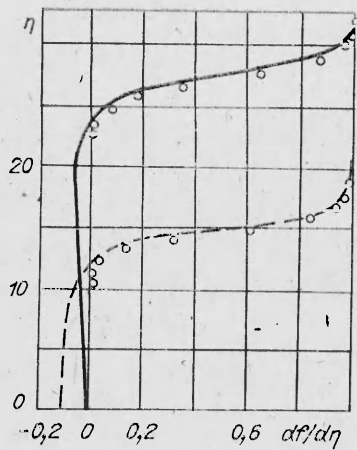
$$(1.6) \quad f = \partial f / \partial \eta = 0.$$

Условие на внешнем краю пограничного слоя ставится в качестве предельного

$$(1.7) \quad \partial f / \partial \eta \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

для всех изучаемых ниже течений.

При  $U = U_0 = \text{const}$  параметр  $\beta = 0$ . В этом случае функция  $f$  может зависеть от единственной переменной  $\eta$ . Однако автомодельного решения уравнения (1.3), которое удовлетворяло бы краевым условиям (1.5), за исключением тривиального  $f = \eta$ , не существует. Замена условий (1.5) на (1.6) приводит к известной задаче об обтекании полубесконечной пластинки равномерным потоком. Ее решение, принадлежащее Блазиусу [1], не представляет интереса для последующего анализа, посвященного



Р и с. 1

2. Пусть  $x_0$  — некоторая постоянная с размерностью длины. Если

$$U = U_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \beta_0 \ln \frac{x}{x_0} \right), \quad |\beta_0| \ll 1,$$

скорость внешнего потенциального потока слабо меняется вдоль оси  $x$ , за исключением малой окрестности точки  $x = 0$ . Согласно (1.4), находим в первом приближении  $\beta = \beta_0$ . Отсюда ясен смысл введения независимых переменных (1.1), в которых решение для функции тока (1.2) остается автомодельным и определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(2.1) \quad \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta_0 \left[ 1 - \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 \right] = 0.$$

При  $\beta_0 \rightarrow 0_+$  решение уравнения (2.1) с краевыми условиями (1.6) стремится к найденному Блазиусом [1]. Чтобы построить поле скоростей включающее возвратное движение жидкости, необходимо положить  $\beta_0 \rightarrow 0_-$  и перейти на другую ветвь решения, указанную в [3]. На рис. 1 сплошной кривой представлены результаты вычислений для  $\beta_0 = -6,0 \times 10^{-4}$ , которые позволяют судить о качественных свойствах предельного решения для потока около пластинки.

При  $\beta_0$ , принимающем весьма малые отрицательные значения, уравнение (2.1) с граничными условиями (1.5) численно проинтегрировано в [4]. Штриховая линия на рис. 1 изображает распределение горизонтальной составляющей скорости поперек следа для той же самой величины  $\beta_0 = -6,0 \cdot 10^{-4}$ .

Приведенные данные свидетельствуют, что предельный переход при  $\beta_0 \rightarrow 0_-$  сопровождается неограниченным ростом области, занятой возвратным движением, причем на его внешнем краю формируется слой смешения, граничащий с набегающим извне равномерным потоком. Кружки на рис. 1 относятся к полученному в [2] решению уже упоминавшейся трехточечной краевой задачи для уравнения (2.1) с  $\beta_0 = 0$ , однако система координат сдвигалась таким образом, чтобы точка перегиба у производной  $df/d\eta$  совпадала с аналогичной точкой в решениях для симметричного следа и пограничного слоя на пластинке. Расчеты не оставляют сомнения, что все рассматриваемые слои смешения идентичны. Существенно подчеркнуть, что изменение граничных условий при интегрировании уравнения (2.1), хотя и не сказывается на внутренней структуре слоя смешения, влечет за собой его резкое смещение в пространстве. При одинаковых  $\beta_0$  слой Чепмена в задаче о следе располагается намного ниже такого же слоя, образующегося при обтекании пластинки.

пограничным слоем с возвратными токами жидкости. Ниже за исходное автомодельное решение принимается введенная в [2] функция  $f_0$ , которая подчиняется первому из условий (1.5) или (1.6), но вместо второго из названных условий, выражающего требование симметрии течения либо прилипания жидкости к поверхности твердого тела, удовлетворяет еще одному предельному соотношению

$$(1.8) \quad df_0/d\eta \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty.$$

Решение Чепмена описывает слой смешения, отделяющий равномерный поток со скоростью  $U_0$  в верхней полуплоскости  $y > 0$  от покоящейся жидкости в нижней полуплоскости  $y < 0$ .

Похожими свойствами обладает указанное в [5] решение задачи о пластинке в равномерном потоке, которое основано на предположении, что внешний градиент давления отсутствует. Это решение неавтономно. Область рециркуляционного движения жидкости в нем описывается соотношением  $\psi = -Hy^2$  с положительной постоянной  $H$ . На расстоянии

$$(2.2) \quad y = (h/H)^{1/2}x^{1/4}$$

от пластинки находится существенно более тонкий слой смешения, характерный поперечный размер которого увеличивается пропорционально  $x^{1/2}$ . Постоянная  $h$  фиксирует расход возвратного течения в слое смешения. Последний, как следует из (2.2), поднимается все выше над пластинкой по мере произвольно осуществляемого уменьшения  $H$ . Из-за равенства нулю градиента давления предельный переход здесь никак не связан со свойствами внешнего потока, учитываемого посредством параметра  $\beta_0$  в уравнении (2.1). Таким образом, даже весьма малые изменения давления вдоль пограничного слоя могут оказать заметное влияние на структуру поля скоростей в рециркуляционной области.

3. Подтвердим изложенные соображения при помощи асимптотического анализа уравнения (2.1). Обозначим через  $f_{0a}$  решение Чепмена  $f_0$ , сдвинутое по осп  $\eta$  на величину  $a$ . Оно удовлетворяет по-прежнему предельным соотношениям (1.7) и (1.8), но не подчиняется первому из граничных условий (1.5) или (1.6). При  $\beta_0 \rightarrow 0_-$  будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$(3.1) \quad f = f_{0a}(\eta) + \varepsilon f'(\eta), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

не делая никаких предположений об относительной величине двух малых параметров. Линеаризация уравнения (2.1) после подстановки в него формулы (3.1) дает

$$(3.2) \quad \frac{d^3 f'}{d\eta^3} + f_{0a} \frac{d^2 f'}{d\eta^2} + \frac{d^2 f_{0a}}{d\eta^2} f' + \frac{\beta_0}{\varepsilon} \left[ 1 - \left( \frac{df_{0a}}{d\eta} \right)^2 \right] = 0.$$

В согласии с (1.7) потребуем, чтобы

$$(3.3) \quad df'/d\eta \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty.$$

Следуя [6], проинтегрируем уравнение (3.2), воспользовавшись тем обстоятельством, что соответствующее ему однородное уравнение обладает двумя линейно-независимыми интегралами:

$$(3.4) \quad f'_1 = \frac{df_{0a}}{d\eta}, \quad f'_2 = f_{0a} + \eta \frac{df_{0a}}{d\eta}.$$

Если положить

$$(3.5) \quad \eta = \xi + a,$$

то исходное решение запишется как

$$(3.6) \quad f_{0a}(\eta) = f_0(\xi).$$

Опираясь на формулы (3.4), окончательно имеем

$$(3.7) \quad f = f_0(\xi) + \varepsilon A_1 \frac{df_0}{d\xi} + \varepsilon A_2 \left[ f_0(\xi) + \xi \frac{df_0}{d\xi} \right] + \varepsilon A_3 \frac{df_0}{d\xi} I_2(\xi) + \beta_0 \frac{df_0}{d\xi} J_3(\xi).$$

Здесь  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  — произвольные постоянные, а интегральные члены  $I_2$  и  $J_3$  определяются посредством равенств

$$(3.8) \quad I_2(\xi) = \int_{\xi_1}^{\infty} \left[ 2 - \frac{f_0(\xi_1) d^2 f_0 / d\xi_1^2}{(df_0/d\xi_1)^2} \right] I_1(\xi_1) d\xi_1;$$

$$(3.9) \quad I_1(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\infty} \frac{df_0/d\xi_2 \times d^2 f_0/d\xi_2^2}{\left[ 2 (df_0/d\xi_2)^2 + d^3 f_0/d\xi_2^3 \right]^2} d\xi_2;$$

$$(3.10) \quad J_3(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} \left[ 2 - \frac{f_0(\xi_1) d^2 f_0 / d\xi_1^2}{(df_0/d\xi_1)^2} \right] J_2(\xi_1) d\xi_1;$$

$$(3.11) \quad J_2(\xi_1) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{df_0/d\xi_2 \times d^2 f_0/d\xi_2^2}{[2(df_0/d\xi_2)^2 + d^3 f_0/d\xi_2^3]^2} J_1(\xi_2) d\xi_2;$$

$$(3.12) \quad J_1(\xi_2) = \int_{\xi_3}^{\xi_2} \frac{[1 - (df_0/d\xi_3)^2] [2(df_0/d\xi_3)^2 + d^3 f_0/d\xi_3^3]}{d^2 f_0/d\xi_3^2} d\xi_3.$$

В дальнейшем необходимо знать асимптотическое поведение построенного решения при  $\xi \rightarrow \infty$  и  $\xi \rightarrow -\infty$ , которое зависит от соответствующих асимптотик функции Чепмена (постоянная  $\xi_0 > 0$  в выражении для  $J_1$  считается достаточно большой). Когда  $\xi \rightarrow \infty$ , в соответствии с граничным условием (1.7) находим

$$(3.13) \quad f_0 \sim \xi - b + B \int_{\xi}^{\infty} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\infty} e^{-\frac{(\xi_2 - b)^2}{2\xi_1}} d\xi_2 + \dots,$$

в то время как при  $\xi \rightarrow -\infty$  предельное соотношение (1.8) ведет к

$$(3.14) \quad f_0 \sim -c + c^{-2} C e^{c\xi} + \dots$$

Значения постоянных  $b$ ,  $c$ ,  $B$  и  $C$  вычисляются путем сращивания обеих асимптотик с решением для области, где  $|\xi| \sim 1$ . Подстановка разложения (3.13) в (3.9) позволяет заключить, что интеграл  $I_1$  экспоненциально быстро стремится к нулю, если  $\xi_1 \rightarrow \infty$ . Обратившись к (3.8), легко получить оценку

$$I_2 \sim 2 \int_{\xi}^{\infty} I_1(\xi_1) d\xi_1,$$

ведущую к выводу об экспоненциальном затухании  $I_2$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Вопрос о сходимости  $J_3$  несколько тоньше. Действительно, применение формулы (3.13) к выражению (3.12) дает

$$J_1 \sim J_{10} + 4 \ln(\xi_2 - b) + \dots$$

с постоянной  $J_{10}$ . Обнаруженная расходимость  $J_1$  при  $\xi_2 \rightarrow +\infty$  слабая, поэтому интеграл  $J_2$ , определяемый через  $J_1$  посредством (3.11), не только сходится, но экспоненциально быстро стремится к нулю при  $\xi_1 \rightarrow \infty$ . Теперь из (3.10) для  $J_3$  вытекает оценка

$$J_3 \sim 2 \int_{\xi}^{\infty} J_2(\xi_1) d\xi_1 + \dots$$

гарантирующая экспоненциальное затухание рассматриваемой величины, когда  $\xi \rightarrow \infty$ .

Поскольку связь (3.5) между переменными  $\xi$  и  $\eta$  линейна, удовлетворить граничному условию (3.3) можно, только положив в решении (3.7) постоянную  $A_2 = 0$ . Что касается постоянных  $A_1$  и  $A_3$ , то они остаются пока произвольными.

Подставив асимптотическое представление (3.14) функции Чепмена в формулу (3.9), при  $\xi_1 \rightarrow -\infty$  находим

$$I_1 \sim I_{10} - c^{-3} \xi_1 + \dots,$$

где  $I_{10}$  — постоянная. Из (3.8) имеем далее

$$(3.15) \quad I_2 \sim \frac{1}{c^2} \left( \frac{c^4 I_{10} - i}{c} - \xi \right) e^{-c\xi} + \dots,$$

если ограничиться лишь экспоненциально возрастающими при  $\xi \rightarrow -\infty$

членами. Будучи примененной к вычислению интеграла (3.12), асимптотика (3.14) дает

$$J_1 \sim J_{10} - c\xi_2 + \dots,$$

когда  $\xi_2 \rightarrow -\infty$ , причем  $J_{10}$  означает постоянную. Согласно (3.11), возрастание  $J_2$  при  $\xi_1 \rightarrow -\infty$  также происходит алгебраически

$$J_2 \sim J_{20} - \frac{1}{c^3} \left( J_{10} c - \frac{c}{2} \xi^2 \right) + \dots$$

с еще одной постоянной  $J_{20}$ . Сохранив в правой части (3.10) только экспоненциально возрастающие при  $\xi \rightarrow -\infty$  члены, пишем

$$(3.16) \quad J_3 \sim \frac{1}{c} \left( c^2 J_{20} + \frac{1 - J_{10}}{c^2} + \frac{1 - J_{10}}{c} \xi + \frac{1}{2} \xi^2 \right) e^{-c\xi} + \dots$$

Формулы (3.15) и (3.16) позволяют получить асимптотическое разложение решения (3.7) в виде

$$(3.17) \quad f \sim -c + \frac{C}{c^2} e^{c\xi} + \frac{\varepsilon A_3}{c^2} \left( \frac{c^4 I_{10} - 1}{c} - \xi \right) + \\ + \frac{\beta_0}{c} \left( c^2 J_{20} + \frac{1 - J_{10}}{c^2} + \frac{1 - J_{10}}{c} \xi + \frac{1}{2} \xi^2 \right) + \dots$$

4. Построенное линейное приближение не является равномерно точным, когда  $\xi \rightarrow -\infty$ . В этой области его можно модифицировать следующим образом. Введем малый параметр  $\alpha = \varepsilon A_3 / c^2$  и предположим, что отношение  $|\beta_0|/\alpha \ll 1$ . Разумеется, сделанное предположение нуждается в обосновании в ходе дальнейшего анализа. Оставим теперь в асимптотическом разложении (3.17) главные члены

$$(4.1) \quad f \sim -c - \alpha(d + \xi) + \dots, \quad d = \frac{1 - c^4 I_{10}}{c}$$

и, вспоминая формулу (3.6), упростим уравнение (2.1). В результате

$$\frac{d^3 f}{d\xi^3} - [c + \alpha(d + \xi)] \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \beta_0 = 0.$$

Отсюда получается выражение для второй производной [6]

$$(4.2) \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} = e^{\frac{1}{2\alpha}[c + \alpha(d + \xi)]^2} \left\{ D - \beta_0 \int_0^\xi e^{-\frac{1}{2\alpha}[c + \alpha(d + \xi_1)]^2} d\xi_1 \right\}.$$

Фигурирующая здесь произвольная постоянная  $D$  определяется из сращения (4.2) с асимптотикой

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} \sim C e^{c\xi} + \frac{\beta_0}{c} + \dots,$$

следующей из (3.17). Это требование выполняется, если

$$(4.3) \quad D = C e^{-c^2/2\alpha - cd}.$$

Удовлетворим первому из условий (1.5) или (1.6), общему как для потока в следе, так и для пограничного слоя на пластинке. Согласно (3.5), переменная  $\xi = -a$  при  $\eta = 0$ . Воспользовавшись приближенным представлением (4.1), находим

$$(4.4) \quad a = c/\alpha + d,$$

откуда немедленно заключаем, что

$$(4.5) \quad \frac{d^2 f(0)}{d\eta^2} = D + \beta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

Интегрирование выражения (4.2) дает

$$(4.6) \quad \frac{df}{d\xi} = \int_0^{\xi} e^{\frac{1}{2\alpha}[c+\alpha(d+\xi_1)]^2} \left\{ D - \beta_0 \int_0^{\xi_1} e^{-\frac{1}{2\alpha}[c+\alpha(d+\xi_2)]^2} d\xi_2 \right\} d\xi_1 + E,$$

причем произвольная постоянная  $E$  должна выбираться из сращивания с асимптотическим разложением

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{C}{c} e^{c\xi} - \alpha + \frac{\beta_0}{c} \left( \frac{1 - J_{10}}{c} + \xi \right) + \dots,$$

вытекающим из (3.17). Сращивание достигается, когда

$$(4.7) \quad E = \frac{C}{c + \alpha d} \approx \frac{\beta_0 J_{10}}{c^2}.$$

С учетом равенства (4.4) отсюда имеем

$$(4.8) \quad \frac{df(0)}{d\eta} = -\alpha - \beta_0 \left\{ \frac{J_{10}}{c} - \int_{-\left(\frac{c}{\alpha} + d\right)}^0 e^{\frac{1}{2\alpha}[c+\alpha(d+\xi_1)]^2} \int_0^{\xi_1} e^{-\frac{1}{2\alpha}[c+\alpha(d+\xi_2)]^2} d\xi_2 d\xi_1 \right\}.$$

Определения (4.3) и (4.7) постоянных  $D$  и  $E$  в равной мере справедливы для обоих классов рассматриваемых течений.

5. Чтобы построить поле скоростей в симметричном следе, необходимо удовлетворить второму из условий (1.5). Из (4.5) находим равенство

$$(5.1) \quad \beta_0 = -D \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} = -C \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-c^2/2\alpha - cd},$$

впервые указанное в [6].

Дадим оценку двойного интеграла из правой части соотношения (4.8), обозначив его для удобства посредством  $-I$ , так как  $I < 0$ . Существуют неравенства [7]

$$\frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 + 2}} < e^{\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi_1^2} d\xi_1 \leq \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4/\pi}},$$

применение которых позволяет утверждать, что

$$(5.2) \quad \frac{1}{\alpha} \left( \ln \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) < -I \leq \frac{1}{\alpha} \left( \ln \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \pi \right).$$

Несмотря на неограниченный рост указанного интеграла при  $\alpha \rightarrow 0$ , его вклад в выражение (4.8) пренебрежимо мал, если рассматривать поле скоростей в следе, поскольку в этом случае коэффициент  $\beta_0$  стремится к нулю в силу (5.1) по экспоненциальному закону. Таким образом, малый параметр [6]  $\alpha = -df(0)/d\eta$ .

Иначе обстоит дело с течением в пограничном слое на пластинке, когда требуется обратить в нуль само выражение (4.8). Вместо формулы (5.1) имеем неравенства

$$(5.3) \quad -\frac{\alpha^2}{\ln \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2} < \beta_0 \leq -\frac{\alpha^2}{\ln \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \pi},$$

основывающиеся на (5.2), причем

$$\frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d^2 f(0)}{\pi d\eta^2}.$$

Как показывают соотношения (5.1) и (5.3),  $\beta_0 < 0$ , а  $|\beta_0|/\alpha \ll 1$  в согласии со сделанным выше предположением. Таким образом, даже весьма малые изменения давления на внешнем краю пограничного слоя способ-

ны оказать существенное влияние на движение жидкости в рециркуляционной области, что объясняет обсуждавшиеся в п. 2 результаты [5].

Отметим основные свойства построенных полей скоростей. Прежде всего из равенств (3.5) и (4.4) находим

$$(5.4) \quad \eta = \eta_{ml} = c/\alpha + d$$

при  $\xi = 0$ . Отсюда вытекает, что слой смешения все дальше отодвигается от оси симметрии следа или обтекаемой пластинки по мере уменьшения градиента давления, характеризующего параметром  $\beta_0$ . Этот вывод асимптотического анализа подтверждает результаты вычислений, суммированные на рис. 1.

Однако между двумя классами рассматриваемых течений существует значительная разница. Легко видеть, что  $|\beta_0|$  при одинаковых  $\alpha$  получается согласно (5.1) по порядку величины меньше, чем из неравенств (5.3). Наоборот, при заданном  $\beta_0$  вычисляемый по (5.1) параметр  $\alpha$  намного превосходит лежащий в диапазоне (5.3). В итоге при одинаковом градиенте внешнего давления слой смешения, ограничивающий область рециркуляционного движения в следе, располагается значительно ниже аналогичного слоя, образующегося при обтекании пластинки. Это заключение, также согласующееся с данными вычислений на рис. 1, противоречит интуитивным представлениям, согласно которым наличие тонкого тела в потоке существенно изменяет поле скоростей лишь вблизи его поверхности. Отсюда ясно, что введение экспериментаторами [8, 9] в след позади тела с тупым носом так называемой разделительной пластинки для гашения асимметричных колебаний может сопровождаться радикальной перестройкой всего течения. При правильной трактовке подобных опытов разделительную пластинку надлежит рассматривать в качестве составной части обтекаемого препятствия.

Тангенциальные вязкие напряжения определяют структуру всего поля скоростей. Действительно, слой смешения и его окрестность, захватывающая внешний край рециркуляционного движения жидкости, описываются вариацией (3.1) функции Чепмена. Для внутренней части области возвратного течения справедливы формулы (4.2) и (4.6), при выводе которых третья производная  $d^3f/d\eta^3$  в исходном уравнении Фолкнера — Скэн также играла существенную роль. Более того, не обращаясь к этим формулам, нельзя удовлетворить граничным условиям не только на поверхности твердого тела, но и на оси симметрии следа без потери связи между градиентом давления и положением слоя смешения.

Сравним в заключение толщину возвратной струи, которая получается в результате асимптотического анализа, с найденной при помощи прямого численного интегрирования уравнения Фолкнера — Скэн. Для удобства отбросим в определении функции Чепмена условие  $df_0/d\xi = 0$  при  $\xi = 0$ , подчинив ее дополнительному требованию [6], чтобы в разложении (3.14) при  $\xi \rightarrow -\infty$  постоянная  $C = c^3$ , тогда  $c = 0,876$ ,  $d = 1,765/c = 2,014$ . Эти значения фиксируют величины  $\beta_0$  и  $\eta_{ml}$  в соотношениях (5.1), (5.3) и (5.4). Результаты расчетов изображены на рис. 2, где область между штриховыми линиями построена по оценкам (5.3), а сплошная кривая представляет данные численного интегрирования уравнения (2.1) при различных  $\beta_0$  для пограничного слоя у пластинки.

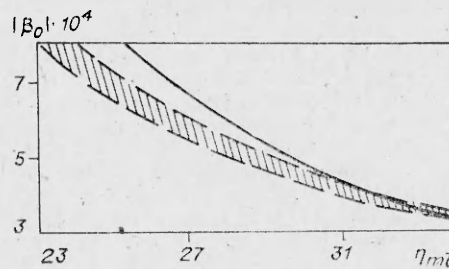


Рис. 2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.
2. Chapman D. R. Laminar mixing of a compressible fluid. Rept/NACA, 1950, N 958.
3. Stewartson K. Further solutions of the Falkner — Skan equation. — Proc. Cambridge Phil. Soc., 1954, v. 50, pt 3.

4. Kennedy E. D. Wave-like solutions of the laminar boundary layer equations.— AIAA J., 1964, v. 2, N 2.
5. Smith F. T. Non-uniqueness in wakes and boundary layers.— Proc. Roy. Soc., A, 1984, v. 391, N 1800.
6. Stewartson K. Falkner — Skan equation for wakes.— AIAA J., 1964, v. 2, N 7.
7. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
8. Acrivos A., Snowden D. D. et al. The steady separated flow past a circular cylinder at large Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1965, v. 21, pt 4.
9. Acrivos A., Leal L. G. et al. Further experiments on steady separated flows past bluff objects.— J. Fluid Mech., 1968, v. 34, pt 1.

Поступила 14/III 1985 г.

УДК 621,181.61 : 629.12

## ТЕПЛООБМЕН В ПЛЕНКЕ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО КОНФУЗОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. М. Лапин, Л. И. Сень, А. М. Тё

(Владивосток)

Рациональная организация процесса термического умягчения природных высокоминерализованных жидкостей, например морской воды, требует их нагрева до температур выше 200°C при безнакипном режиме работы теплообменного аппарата. Один из способов реализации такого нагрева — использование пленочных аппаратов, в которых подвод теплоты к ламинарной пленке жидкости осуществляется со стороны свободной поверхности раздела сред [1]. В отличие от рекуперативного теплообмена здесь можно организовать процесс высокотемпературного нагрева минерализованной жидкости при относительно низкой температуре пристенного слоя пленки и тем самым обеспечить безнакипный режим работы водонагревателя.

Экспериментально установлено [2], что при стекании жидкости по конфузору с общим углом раскрытия более 90° (в отличие от течения по вертикальной поверхности) реализуется двумерный ламинарный безволновой режим течения пленки в широком диапазоне изменения расходов. Такая особенность гидродинамики позволяет полнее использовать преимущества указанного способа нагрева и определяет предпочтительность применения конфузорно-пленочных аппаратов [3, 4] для нагрева накипеобразующих растворов.

В данной работе исследован процесс контактного теплообмена при конденсации чистого пара на пленке жидкости, стекающей по конфузорной поверхности.

**Формулировка задачи.** Считая задачу стационарной и осесимметричной, запишем в дриближении пограничного слоя уравнения сохранения импульсов, неразрывности и энергии для тонкой пленки жидкости:

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + g \sin \alpha;$$

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cos \alpha = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} = 0;$$

$$(4) \quad \rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Здесь  $x$  — продольная координата, направленная по течению вдоль образующей конфузора;  $y$  — поперечная координата, направленная перпендикулярно образующей конфузора; начало координат — на входной кромке конфузора;  $u$  и  $v$  — соответственно  $x$ - и  $y$ -компоненты скорости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $p$  — давление;  $\alpha$  — угол наклона образующей конфузора к горизонту;  $r(x)$  — текущий радиус конфузора;  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ,  $T$  — кинематическая вязкость, плотность, теплоемкость, теплопроводность и температура жидкости.

Задача решается при следующих допущениях: подстилающая поверхность конфузора теплоизолирована, касательное напряжение на границе жидкость — пар отсутствует, конденсат пара не влияет на течение и теп-