

как нижнюю ветвь — ВАХ распределенного разряда, так и верхнюю — ВАХ контрагированного разряда. Особенность перехода верхней ветви ВАХ в нижнюю (точка *B* — бифуркация ВАХ, см. рис. 2) заключается в том, что при плавном увеличении ЭДС источника в окрестности состояния точки *B* переход осуществляется вдоль нижней ветви и соответствует распределенной форме разряда. При резком повышении напряжения на электродах выключением части балластных реостатов преимущественно реализуется состояние с анодным пятном, отвечающее верхней ветви ВАХ. Имеет место двузначность стационарного решения; оба решения устойчивы. Переход от контрагированного на режим с распределенной формой разряда при токах  $I \geq 600$  А без регулирования ЭДС источника осуществляется с помощью первоначальной подачи в объем легкоионизируемой присадки с последующим ее отключением (остается минимальная подача в катод  $G_k \leq 0,5 \cdot 10^{-5}$  г/с, обеспечивающая его работу в режиме термомиссии с диффузной привязкой). При этом основным генератором свободных электронов в объемной части распределенного разряда вне электродов становится сам плазмообразующий газ аргон ( $T_e > 9500$  К по обработке зондовых ВАХ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. — М.: Наука, 1979.
2. Руткевич И. М., Синкевич О. А. Волны и неустойчивости в низкотемпературной плазме // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа/ВИНИТИ. — 1981. — Т. 14.
3. Bedeaux D., Mazur P., Pasmanter R. A. The ballast resistor; an electro-thermal instability in a conducting wire. 1. The nature of the stationary states // Physica. — 1977. — V. 86A, N 2.
4. Бенилов М. С. О нелинейных режимах протекания тока через слабоионизованный параллельный слой и об их устойчивости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1986. — № 4.
5. Бронин С. Я., Колобов В. М. Устойчивость диффузной формы разряда в приэлектродных областях МГД-генератора // Тр. 8-й Междунар. конф. по МГД преобразованию энергии. — М., 1983. — Т. 1.
6. Глинов А. П. Влияние сопротивления электродов и прикатодного падения потенциала на перегревную неустойчивость диффузного разряда в плотной плазме // ТВТ. — 1982. — Т. 20, № 5.
7. Герман В. О., Кукота Ю. П., Любимов Г. А. Стабилизация диффузной формы привязки разряда на охлаждаемых электродах с транспирационным вводом активизирующих присадок // Генерация потоков электродуговой плазмы. — Новосибирск: Наука, 1987.
8. Дюжев Г. А., Митрофанов Н. К., Старнев Е. А. и др. Физические исследования работы лугового полого катода. — Л., 1978. — (Препр./ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе; № 583).
9. Бакит Ф. Г., Дюжев Г. А., Каплав В. Б. и др. Зондовая диагностика низкотемпературной плазмы. — Л., 1977. — (Препр./ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе; № 532).

г. Москва

Поступила 24/II 1989 г.,  
в окончательном варианте — 20/IV 1989 г.

УДК 532.526.5

А. П. Хохлов

### К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НА ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Поведение пограничного слоя в окрестности точки отрыва на неподвижной или движущейся со скоростью  $u_w = O(Re^{-1/8})$  ( $Re$  — число Рейнольдса) поверхности описывается «трехпалубной» моделью течения, впервые введенной в [1, 2]. Для случая, когда поверхность движется вниз по потоку со скоростью  $Re^{-1/8} \ll u_w \ll 1$ , задача решена в [3, 4] для сверхзвуковых течений, в [5] — для несжимаемой жидкости. Для поверхности, движущейся вверх по потоку, численные результаты в рамках «трехпалубной» схемы представлены в [6].

© 1990 Хохлов А. П.

В данной работе исследуется движение поверхности вверх по потоку со скоростью  $Re^{-1/8} \ll u_w \ll 1$ . Считается, что течение описывается уравнениями Навье—Стокса, внешний поток сверхзвуковой, его параметры обезразмерены обычным образом и  $Re \rightarrow \infty$ . Сначала получаем решение линеаризованной задачи по «трехпалубной» схеме и переходим к пределу при  $u_w Re^{1/8} \rightarrow \infty$ , затем рассмотрим задачу для  $Re^{-1/8} \ll u_w \ll 1$ .

1. В «трехпалубной» модели течение, как известно, разбивается на три области: внешний «невязкий» поток с толщиной  $y = O(Re^{-3/8})$ , основная часть пограничного слоя  $y = O(Re^{-1/2})$ , пристенный слой  $y = O(Re^{-5/8})$ , который вносит главный вклад в индуцируемое давление. Длина области взаимодействия  $O(Re^{-3/8})$ , характерный перепад давлений  $O(Re^{-1/4})$ . Если параметры потока обезразмерить, как в [2], то уравнения, описывающие течение в пристенном слое, примут вид

$$(1.1) \quad U \partial U / \partial x + V \partial U / \partial y + P'(x) = \partial^2 U / \partial y^2, \quad \partial U / \partial x + \partial V / \partial y = 0,$$

где  $U$ ,  $V$ ,  $P$  — продольная, поперечная компоненты вектора скорости и давление соответственно. На стенке выполняется условие прилипания, при  $x \rightarrow \pm \infty$  возмущения затухают:

$$(1.2) \quad U = -U_0, \quad V = 0 \text{ при } y = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} U = y - U_0.$$

Индуцируемое за счет толщины вытеснения давление определяется формулой Аккерета

$$(1.3) \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} (U - y) = A(x), \quad -A'(x) = P - h\theta(x).$$

Здесь  $U_0$ ,  $h$  — обезразмеренная скорость стенки, взятая с обратным знаком, и перепад давлений на скачке. В линейном приближении, т. е. при  $h \rightarrow 0$ , задача решается до конца. Заметим, что в невозмущенном потоке профиль скорости линейный. При этом справедливо разложение  $U = y - U_0 + hU^{(1)} + \dots$ ,  $V = hV^{(1)} + \dots$ ,  $P = hP^{(1)} + \dots$ . Подставляя его в (1.1), получим

$$(1.4) \quad (y - U_0) \partial U^{(1)} / \partial x + V^{(1)} + P^{(1)'}(x) = \partial U^{(1)} / \partial y^2, \quad \partial U^{(1)} / \partial x + \partial V^{(1)} / \partial y = 0.$$

Краевые условия (1.2), (1.3) принимают вид

$$(1.5) \quad U^{(1)}(x, 0) = V^{(1)}(x, 0) = U^{(1)}(\pm \infty, y) = 0;$$

$$(1.6) \quad (\partial U^{(1)} / \partial x)(x, +\infty) = \theta(x) - P^{(1)}(x).$$

С помощью фурье-преобразования по  $x$  задача (1.4)–(1.6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решаем ее:

$$(1.7) \quad U^{(1)} = \int_0^y dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{(ik)^{-1/3} Ai((ik)^{1/3}(y - U_0))}{\left\{ Ai'(-(ik)^{1/3}U_0) + (ik)^{4/3} \int_{-(ik)^{1/3}U_0}^{+\infty} Ai(z) dz \right\}} \frac{dk}{2\pi};$$

$$(1.8) \quad P^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{Ai'(-(ik)^{1/3}U_0)}{\left\{ Ai'(-(ik)^{1/3}U_0) + (ik)^{4/3} \int_{-(ik)^{1/3}U_0}^{+\infty} Ai(z) dz \right\}} \frac{dk}{2\pi(k - i0)},$$

$|\arg(ik)| < \pi$ ;  $(ik)^{1/3} > 0$  при  $(ik) > 0$ . При  $x < 0$ ,  $\text{Im } k \leq 0$  подынтегральные выражения регулярны (за исключением конечного числа полюсов) и обращаются в нуль при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому поведение (1.7), (1.8) при отрицательных  $x$  определяется особенностями подынтегральных выражений, которые совпадают (при  $\text{Im } k < 0$ ) с нулями выражения в фигурных скобках. В [7] показано, что эти нули располагаются по мнимой отрицательной полуоси, их конечное число (порядка  $O(U_0^{8/5})$  при  $U_0 \rightarrow \infty$ ) и они соответствуют собственным функциям задачи (1.4)–(1.6),

которые имеют вид

$$U^{(1)} \sim e^{(ik)_* x} \int_0^y Ai((ik)_*^{1/3}(y - U_0)) dy, \quad P^{(1)} \sim e^{(ik)_* x},$$

где  $(ik)_*$  — какой-либо нуль выражения в фигурных скобках, как уже указывалось выше, вещественный и положительный. Заметим, что если бы не ставилось условие затухания возмущений скорости при  $x \rightarrow +\infty$ , то решение задачи было бы неединственным и отличалось от (1.7), (1.8) на произвольную линейную комбинацию этих собственных функций.

Исследуем более подробно случай  $U \rightarrow +\infty$ . Представим выражение в фигурных скобках как

$$\left\{ Ai'(- (ik)^{1/3} U_0) + (ik)^{4/3} \int_{-(ik)^{1/3} U_0}^{+\infty} Ai(z) dz \right\} = Ai'(- (ik)^{1/3} U_0) \times \\ \times \left[ 1 + ikU_0^{-1} + (- ikU_0^{-1}) g(- (ik)^{1/3} U_0) \right], \quad g(\xi) = 1 + \xi \int_{\xi}^{+\infty} Ai(z) dz / Ai'(\xi).$$

Воспользовавшись асимптотическим представлением  $Ai(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $|\arg z| < \pi$ , запишем  $g(\xi) = O(\xi^{-1})$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $|\arg \xi| < \pi$ , кроме того, для вещественных  $k$   $g(- (ik)^{1/3} U_0)$  ограничена, так как  $Ai'(z)$  обращается в нуль только при отрицательных вещественных  $z$ . Из сказанного следует, что

$$|ikU_0^{-1} g(- (ik)^{1/3} U_0)| = o(|1 + ikU_0^{-1}|) \text{ при } U_0 \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k = 0$$

и в главном приближении при  $U_0 \rightarrow \infty$  (1.7), (1.8) можно представить как

$$(1.7') \quad U^{(1)} = \int_0^y dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} \frac{(ik)^{-1/3} Ai((ik)^{1/3}(y - U_0))}{Ai'(- (ik)^{1/3} U_0) (1 + ikU_0^{-1})} \frac{dk}{2\pi},$$

$$(1.8') \quad P^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} \frac{dk}{2\pi i (k - i0) (1 + ikU_0^{-1})}.$$

Эти выражения, в свою очередь, перепишем в виде свертки

$$(1.9) \quad U^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi, y) G(x - \xi) d\xi;$$

$$(1.10) \quad P^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(\xi) G(x - \xi) d\xi,$$

где

$$(1.11) \quad \tilde{u}(x, y) = \int_0^y dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} (ik)^{-1/3} \frac{Ai((ik)^{1/3}(y - U_0))}{Ai'(- (ik)^{1/3} U_0)} \frac{dk}{2\pi};$$

$$(1.12) \quad \tilde{P}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} \frac{dk}{2\pi i (k - i0)} = \theta(x);$$

$$(1.13) \quad G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikhx} \frac{dk}{2\pi (1 + ikU_0^{-1})} = U_0 \theta(x) \exp(-U_0 x).$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что (1.11) — решение уравнений (1.4) с краевыми условиями (1.5) и заданным давлением, определяемым (1.12). Хотя задача (1.4), (1.5), (1.12) параболическая по  $x$ , она, тем не менее, формулируется как краевая по продольной координате.

Если не ставить условие затухания при  $x \rightarrow +\infty$ , то решение окажется неединственным и будет отличаться от (1.11) на произвольную ли-

нейную комбинацию собственных функций (1.4), (1.5), (1.12), которые имеют вид

$$\tilde{u} \sim e^{(ik)_* x} \int_0^y Ai((ik)_*^{1/3}(y - U_0)) dy,$$

где  $(ik)_*$  — какой-либо корень уравнения  $Ai'(-(ik)^{1/3}U_0) = 0$ .

Из того, что после масштабного преобразования  $\tilde{k} = kU_0^3$ ,  $\tilde{x} = xU_0^{-3}$ ,  $\tilde{y} = yU_0^{-1}$ ,  $\tilde{u} = u*U_0^{-1}$  пропадает явная зависимость (1.11) от  $U_0$ , следует, что характерное изменение  $\tilde{u}$  происходит в области  $y = O(U_0)$ ,  $x = O(U_0^3)$  (область  $B$  на рисунке). Заметим также, что  $\tilde{u}$  непрерывна всюду, за исключением  $x = 0$ . В этой точке  $\tilde{u}(+0, y) - \tilde{u}(-0, y) = U_0^{-1}$ . Такой результат можно получить, если, например, проинтегрировать по  $x$  уравнения (1.4) с давлением (1.12) в окрестности  $x = 0$ .

Так как  $G(x)$  затухает гораздо быстрее (на  $x = O(U_0^{-1})$ ), чем  $\tilde{u}(x, y)$ , то в тех точках, где  $\tilde{u}$  непрерывна, (1.9) можно представить (в главном приближении при  $U_0 \rightarrow \infty$ ) как

$$U^{(1)}(x, y) = \tilde{u}(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) d\xi = \tilde{u}(x, y).$$

В малой окрестности точки разрыва  $\tilde{u} = \tilde{u}(-0, y)\theta(-x) + \tilde{u}(+0, y) \times \theta(x) + o(1)$ ,  $x \rightarrow 0$ , и (1.9) имеет вид

$$U^{(1)} = \tilde{u}(-0, y) \{ \theta(-x) + \theta(x) e^{-U_0 x} \} + \tilde{u}(+0, y) \theta(x) \{ 1 - e^{-U_0 x} \}.$$

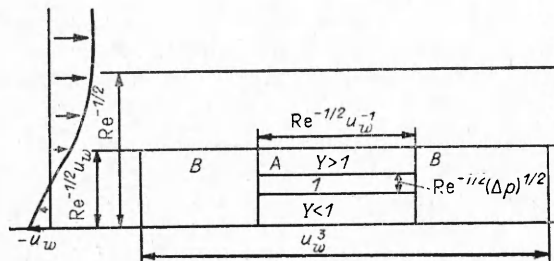
Выражение (1.10) интегрируется точно:

$$(1.14) \quad P^{(1)} = \theta(x) [1 - e^{-U_0 x}].$$

Таким образом, при  $U_0 \rightarrow \infty$  вязкий подслой области взаимодействия распадается на две области:  $A$  и  $B$ . Продольный размер  $A \sim O(U_0^{-1})$ ,  $B \sim O(U_0^3)$ . Толщина областей  $O(U_0)$ . В области  $B$  затухают возмущения скорости, а в  $A$  сглаживается разрыв продольной компоненты вектора скорости и давления. Если оценить вклад толщины вытеснения в давление, то окажется, что в области  $A$  он порядка единицы, а в  $B \sim O(U_0^{-4})$ . Но хотя в области  $B$  влиянием вытеснения можно пренебречь, ее нужно рассматривать, так как в ней формируется начальный профиль скорости для области  $A$ , в которой и ставится теперь задача о взаимодействии. Интересно также, что возмущения давления не распространяются вверх по потоку от скачка (формула (1.14)). Этот результат выполняется только асимптотически при  $U_0 \rightarrow \infty$ . При конечных скоростях стенки возмущения давления, как и следует ожидать, распространяются в обе стороны от скачка.

2. Аналогичная структура решения сохраняется и в нелинейном случае. Предполагаем с самого начала, что  $Re^{-1/8} \ll u_w \ll 1$  и перепад давлений на скачке  $\Delta p = O(u_w^2)$ . Из условия, что наклон линий тока и перепад давления в области взаимодействия одного порядка, ее характерная длина  $\Delta x = O(Re^{-1/2} u_w^{-1})$ .

Длина области, в которой происходит затухание возмущений за счет вязкости,  $O(u_w^3)$ . В линейном случае это области  $A$  и  $B$  соответственно. Поскольку их толщина, аналогично [3],  $O(Re^{-1/2}(\Delta p)^{1/2}) \ll Re^{-1/2}$ , вязкость и плотность считаем постоянными и равными их



значению на стенке, а невозмущенный профиль скорости — линейным. Сделаем следующую замену переменных: в области  $B$

$$y = [u'(0)]^{-1} \text{Re}^{-1/2} u_w Y, \quad x = (\rho_w/\rho_e) (\mu_e/\mu_w) [u'(0)]^{-2} u_w^3 \tilde{x}, \\ u = u_w \tilde{u}, \quad v = (\mu_w/\mu_e) (\rho_e/\rho_w) u'(0) \text{Re}^{-1/2} u_w^{-1} \tilde{v}, \quad p = (\rho_w/\rho_e) u_w^2 \tilde{P};$$

в области  $A$

$$y = [u'(0)]^{-1} \text{Re}^{-1/2} u_w Y, \quad x = (\rho_e/\rho_w) [u'(0)]^{-1} (M_e^2 - 1)^{-1/2} \text{Re}^{-1/2} u_w^{-1} X, \\ u = u_w \tilde{U}, \quad v = (\rho_w/\rho_e) (M_e^2 - 1)^{1/2} u_w^3 \tilde{V}, \quad p = (\rho_w/\rho_e) u_w^2 \tilde{P}.$$

Здесь  $u'(0)$  — наклон невозмущенного профиля скорости на стенке в масштабе пограничного слоя; индексами  $w, e$  обозначены значения соответствующих величин на стенке и во внешнем потоке. Считаем также, что перепад давлений на скачке представляется формулой  $\tilde{P} = h\theta(x)$  ( $h = (\rho_e/\rho_w) \times (\Delta p/u_w^2)$  — безразмерная интенсивность скачка). Тогда уравнения, описывающие течение, примут вид

в области  $B$

$$(2.1) \quad \tilde{u} \partial \tilde{u} / \partial \tilde{x} + \tilde{v} \partial \tilde{u} / \partial Y + h \delta(\tilde{x}) = \partial^2 \tilde{u} / \partial Y^2, \quad \partial \tilde{u} / \partial \tilde{x} + \partial \tilde{v} / \partial Y = 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = -1, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad (\partial \tilde{u} / \partial Y)(\tilde{x}, +\infty) = 1, \quad \tilde{u}(\pm\infty, Y) = Y - 1;$$

в области  $A$

$$(2.2) \quad \tilde{U} \partial \tilde{U} / \partial X + \tilde{V} \partial \tilde{U} / \partial Y + \tilde{P}(X) = 0, \quad \partial \tilde{U} / \partial X + \partial \tilde{V} / \partial Y = 0, \\ \tilde{V}(X, 0) = 0, \quad \lim_{Y \rightarrow +\infty} (\tilde{U} - Y) = A(X), \quad A'(X) = h\theta(X) - \tilde{P}.$$

Начальное условие для  $\tilde{U}$  задается из условия сшивки решений в областях  $A$  и  $B$

$$(2.3) \quad \lim_{X \rightarrow \pm\infty} \tilde{U}(X, Y) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \pm\infty} \tilde{u}(\tilde{x}, Y),$$

причем достаточно задать только один предел либо при  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ , либо при  $X \rightarrow -\infty$ . Вторым предел, как легко видеть, выполняется автоматически. Условие (2.3) является отличием данного случая от случая [3, 4], когда стенка движется вниз по потоку. В [3, 4] для области взаимодействия в качестве начального брался невозмущенный профиль скорости. Интересно также, что хотя течение в области  $B$  описывается обычными уравнениями пограничного слоя, задача формулируется как краевая по продольной координате. Такая формулировка следует из линейного анализа (задача (1.4), (1.5), (1.12) в п. 1), когда было показано, что линеаризованная задача (2.1) имеет счетный набор собственных функций, экспоненциально растущих вниз по потоку. Для устранения этой расходимости и нужно ставить условия затухания возмущений скорости при  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ . Еще одно замечание: так как уравнения в области  $A$  «невязкие», то должен существовать тонкий пристенный слой, где влияние вязкости существенно. Однако вклад этого слоя в индуцируемое давление есть  $O(\text{Re}^{-1/4}) \ll \Delta p$  ( $\Delta p = O(u_w^2)$ ), поэтому в дальнейшем он не рассматривается.

3. Исследуем более подробно случай малых  $h$ . Уравнения, описывающие течение в области  $A$  и  $B$ , линеаризуются всюду, за исключением, быть может, критического слоя в окрестности точки  $Y = 1$ . Рассмотрим сначала область  $A$ . Вне критического слоя справедливо разложение  $\tilde{U} = -1 + Y + hU^{(1)} + \dots$ ,  $\tilde{V} = hV^{(1)} + \dots$ ,  $\tilde{P} = hP^{(1)} + \dots$ , подставляя его в (2.2), получим

$$(3.1) \quad (Y - 1) \partial U^{(1)} / \partial X + V^{(1)} + P^{(1)'}(X) = 0, \quad \partial U^{(1)} / \partial X + \partial V^{(1)} / \partial Y = 0;$$

$$(3.2) \quad V^{(1)}(X, 0) = 0, \quad (\partial U^{(1)} / \partial X)(X, +\infty) = \theta(X) - P^{(1)}(X).$$

В результате линеаризации в уравнениях исчезает продольная компонента вектора скорости, остается только ее производная по  $X$ . Поэтому, если интересоваться только поведением давления в области  $A$ , начальный профиль скорости, определяемый условием сшивки (2.3), можно и не задавать. Следовательно, область  $B$  можно не рассматривать. Подобное упрощение справедливо только в линейном случае. В нелинейной задаче это не так, и для определения давления в области  $A$  нужно знать начальный профиль скорости, который получается в результате решения задачи для области  $B$ .

Для произвольной функции  $P^{(1)}(X)$  решения уравнения (3.1), удовлетворяющие условию непротекания и условию на внешней границе (3.2), вообще говоря, не совпадают. Выпишем их:

$$(3.3) \quad \partial U^{(1)}/\partial X = P^{(1)'}(X), \quad V^{(1)} = -YP^{(1)'}(X);$$

$$(3.4) \quad \partial U^{(1)}/\partial X = \theta(X) - P^{(1)}(X), \quad V^{(1)} = -P^{(1)'}(X) + (Y - 1) \times \\ \times (P^{(1)}(X) - \theta(X)).$$

Соотношение (3.3) удовлетворяет условию непротекания и, во всяком случае, справедливо при  $Y < 1$ ; (3.4) удовлетворяет условию на внешней границе и справедливо при  $Y > 1$ . Единственной точкой (за исключением вязкого пристенного слоя), где уравнения (3.1) теряют применимость, является  $Y = 1$ . Для сшивки решений (3.3), (3.4) при  $Y = 1$  вводится новая область (область  $I$  на рисунке)  $Y - 1 = h^{1/2}\tilde{Y}$ . В ней (обычно ее называют критическим слоем) справедливо разложение  $\tilde{U} = h^{1/2}\tilde{Y} + hU + \dots$ ,  $\tilde{V} = -hP^{(1)'}(X) + h^{3/2}V + \dots$ . Заметим, что теперь в этом слое нельзя пренебрегать «вязкими» слагаемыми, которые в области  $A$  имеют порядок  $O(\text{Re}^{-1/2}u_w^{-4})$ . Подставляя полученные разложения в (2.2) и учитывая «вязкие» слагаемые, запишем

$$(3.5) \quad \tilde{Y}\partial\tilde{U}/\partial\tilde{X} + \tilde{V} - P^{(1)'}(X)\partial\tilde{U}/\partial\tilde{Y} = \mu\partial^2\tilde{U}/\partial\tilde{Y}^2, \quad \partial\tilde{U}/\partial\tilde{X} + \partial\tilde{V}/\partial\tilde{Y} = 0.$$

Краевые условия при  $\tilde{Y} \rightarrow \pm\infty$  принимают вид

$$\lim_{\tilde{Y} \rightarrow -\infty} \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{X}} = P^{(1)'}(X), \quad \lim_{\tilde{Y} \rightarrow +\infty} \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{X}} = \theta(X) - P^{(1)}(X).$$

Прежде чем поставить краевые условия при  $X \rightarrow \pm\infty$ , нужно сказать, что  $\mu = (\mu_w/\mu_e)(\rho_e/\rho_w)^{-1/2}u'(0)(M_\infty^2 - 1)^{-1/2}\text{Re}^{-1/2}u_w^{-1}\Delta p^{-3/2}$  есть отношение длины области взаимодействия к длине «вязкого» затухания возмущений в критическом слое в области  $B$ . И поскольку, вообще говоря,  $\mu = O(1)$ , краевыми условиями по продольной координате будут условия затухания. Чтобы окончательно сформулировать задачу, продифференцируем (3.5) по  $Y$  и обозначим  $\omega = \partial\tilde{U}/\partial\tilde{Y}$  — завихренность в критическом слое. Для завихренности имеем (все индексы опущены)

$$Y\partial\omega/\partial X - P'(X)\partial\omega/\partial Y = \mu\partial^2\omega/\partial Y^2,$$

$$\frac{d}{dX} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega dY + P(X) + P'(X) = \theta(X), \quad \lim_{Y \rightarrow \pm\infty} \omega = \lim_{X \rightarrow \pm\infty} \omega = 0.$$

Легко видеть, что одним из решений задачи является  $\omega = 0$ ,  $P(X) = \theta(X)[1 - e^{-X}]$ , что совпадает с решением, полученным предельным переходом из «трехпалубной» модели. Однако единственность этого решения не доказана.

Автор благодарен А. И. Рубану, а также С. Н. Тимошину и В. Б. Заметаеву за тщательное и критическое обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — № 4.
2. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1969. — V. 312, N 1509.

3. Крапивский П. Л., Нейланд В. Я. Отрыв пограничного слоя от подвижной поверхности тела в сверхзвуковом потоке газа // Уч. зап. ЦАГИ.— 1982.— Т. XIII, № 3.
4. Жук В. И., Рыжов О. С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 1.
5. Сычев Вик. В. Асимптотическая теория нестационарного отрыва // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 6.
6. Жук В. И. О локально-рециркуляционных зонах в сверхзвуковом пограничном слое на движущейся поверхности // ЖВММФ.— 1982.— Т. 22, № 5.
7. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure // J. de Méc.— 1980.— V. 19, N 3.

г. Жуковский

Поступила 22/VII 1988 г.,  
в окончательном варианте — 18/IV 1989 г.

УДК 533.6.011.72+534.2.532

С. Н. Макаров

### УТОЧНЕНИЕ ПРАВИЛА РАВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН УМЕРЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

1. В теории слабых ударных волн (УВ) часто используется правило равных площадей, или правило Уизема, по которому интеграл от скорости течения (избыточной плотности или давления) стационарен во времени (см. [1—3])

$$(1.1) \quad \int_L v dX = \text{const},$$

где  $L$  — длина волны;  $X = x - c_0 t$  — сопутствующая координата. Выражение (1.1) можно рассматривать как закон сохранения для уравнения простой волны

$$v_t + \epsilon v v_X = 0,$$

верный при наличии разрывов [1]. Здесь и ниже  $\epsilon = (1/2)(\gamma + 1)$ . Правило равных площадей описывает процесс возникновения и развития изознтропического скачка в простой волне, а также законы затухания плоских УВ.

Формула (1.1) следует из анализа соответствующей вязкой задачи. Для этого необходимо применять уравнение простой волны с учетом реальной диссипации (уравнение Бюргерса в нелинейной акустике) [2]

$$(1.2) \quad v_t + \epsilon v v_X - (b/2\rho_0)v_{XX} = 0$$

( $b = \zeta + (4/3)\eta + (\gamma - 1)\kappa/c_p$  — диссипативный коэффициент,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\kappa$  — коэффициенты сдвиговой, объемной вязкости и теплопроводности). Существует теорема [4], согласно которой (1.2) обладает единственным законом сохранения, совпадающим с (1.1).

Заметим, что уравнение Бюргерса в данном случае носит не формальный характер, а выводится из полной системы уравнений движения при выполнении естественных асимптотических условий [2,5]

$$(1.3) \quad \partial/\partial X = O(1), \quad \partial/\partial t = O(\mu); \quad v, \rho' = O(\mu); \quad \eta, \zeta, \kappa = O(\mu),$$

где  $\mu$  — малый параметр (амплитуда волны);  $\rho'$  — избыточная плотность. Физический смысл условий (1.3) заключается в медленном изменении профиля бегущей волны вследствие слабой нелинейности и диссипации.

Правило (1.1) справедливо в малых главном порядке относительно амплитуды волны и имеет погрешность  $O(\mu^2)$ . Решение уравнения Бюргерса также имеет равномерную погрешность  $O(\mu^2)$  [5], хотя само уравнение учитывает малые второго порядка.

2. Рассмотрим возможность уточнения формулы (1.1) в малых второго порядка. Для корректной постановки проблемы нужно знать решение вязкой задачи с той же точностью. Решение уравнения Бюргерса непригодно для данной цели. Поэтому необходимо использовать более точное эволюционное уравнение теории волн конечной амплитуды в вязком теплопроводном политропном газе [6]

$$(2.1) \quad v_t + \epsilon v v_X - \frac{b}{2\rho_0} v_{XX} = \frac{3}{4} \epsilon \frac{b}{\rho_0 c_0} v_X^2.$$

© 1990 Макаров С. Н.