Теплофизика и аэромеханика, 2008, том 15, № 2

УДК 532.536

Резонансное влияние топографии дна на поверхность наклонного слоя вязкой жидкости*

Е.А. Демехин[1], Е.М. Шапарь[1], А.С. Селин[2]

[1]*Южный научный центр РАН, Краснодар*

[2]*Кубанский государственный университет, Краснодар*

Исследовалась реакция поверхности раздела пленки на волнистость стенки малой амплитуды. Рассматривалась линеаризованная версия задачи, описываемая уравнением Орра–Зоммерфельда, решение искалось асимптотическим разложением по малому параметру 1/Re, а также решалась обычная спектральная задача на устойчивость к возмущениям вида $\exp[i\alpha(x-ct)]$.

Расчеты показали, что при некоторых специально подобранных волновых числах α эффекты сноса и дисперсии уравновешивают друг друга, давая нулевую результирующую скорость $c_R = 0$. Если предположить, что жесткая стенка имеет волнистость с тем же α, то можно говорить, что стоячие волны, вызванные волнистой стенкой, находятся в резонансе с собственными возмущениями второго типа.

В работе [1] рассматривалось стекание слоя вязкой жидкости со свободной поверхностью по наклонной плоскости с волнистой стенкой и реакция поверхности раздела на волнистость малой амплитуды. Численно решалась линеаризованная версия задачи. Варьируя угол наклона, длину волны и число Рейнольдса, авторы получили при некоторых параметрах неожиданный эффект аномально сильного влияния волнистости на возникающие на поверхности стоячие волны, которые оказались необычно большой амплитуды. В полной постановке без линеаризации задача решалась в работе [2], выводом которой также стала аномально сильная реакция поверхности раздела на волнистость дна при некоторых параметрах течения. Физическая причина явления, однако, осталась непонятой.

В настоящей работе, как и в [1], рассматривается линеаризованная версия задачи, описываемая уравнением Орра–Зоммерфельда с соответствующими краевыми условиями. Поскольку явление обычно наблюдается при больших числах Рейнольдса Re, решение искалось асимптотическим разложением по малому параметру 1/Re. Аналитическое решение находится в неплохом соответствии с численным.

Кроме того, в работе решается обычная спектральная задача на устойчивость к возмущениям вида $\exp[i\alpha(x-ct)]$. Среди счетного множества собственных значений $\{c^{(k)}\}$ два соответствуют поверхностным волнам. Первый тип возмущений распростра-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-08-33585а, 06-08-96637-р-юг-а.)

няется вниз по потоку $c_R > 0$, и может быть причиной неустойчивости $\alpha c_I > 0$, поэтому обычная теория устойчивости ограничивается только этой модой [3]. Существует, однако, второй тип собственных возмущений, распространяющихся вверх по потоку $c_R < 0$. Поскольку эти возмущения всегда гаснут $\alpha c_I < 0$, они не рассматривались ранее теоретически. Наши расчеты показали, что при некоторых специально подобранных волновых числах α эффект сноса и дисперсии уравновешивают друг друга, давая нулевую результирующую скорость $c_R = 0$. Если предположить, что жесткая стенка имеет волнистость с тем же α, то можно говорить, что стоячие волны, вызванные волнистой стенкой, находятся в резонансе с собственными возмущениями второго типа. Расстройкой резонанса является мнимая часть скорости $c_i \neq 0$, которая при больших Re мала. В пределе невязкой жидкости получено универсальное соотношение для волнового числа резонанса α_m

$$3\mathrm{ctg}\theta / \mathrm{Re} + \alpha_m^2 \mathrm{We} = g(\alpha_m).$$

Приведенные рассуждения были полностью подтверждены сравнением параметров резонанса, полученных во второй и третьей частях работы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается течение слоя вязкой жидкости с плотностью ρ, вязкостью ν и поверхностным натяжением σ по наклонной волнистой поверхности. Форма дна описывается уравнением $y = f(x)$.

Реакция поверхности раздела задается формулой $y = h(x)$, где $h(x)$ должно определяться в процессе решения задачи.

Величины становятся безразмерными, если привести длины к толщине слоя в невозмущенном случае $f = 0$ h_0, а скорости — к средней скорости $u_0 = gh_0^2 \sin\theta/3\nu$; третьей базисной величиной обезразмеривания является плотность жидкости. Система уравнений, описывающая движение, имеет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\cot\theta\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (3)$$

где $\mathrm{Re} = u_0 h_0/\nu = gh_0^3 \sin\theta \big/ 3\nu^2$ — число Рейнольдса. На стенке $y = f$ имеет место условие прилипания

$$u = v = 0, \qquad (4)$$

в то время как на поверхности раздела $y = h(x, t)$ выполняются два динамических и одно кинематическое условие [4, 5]:

$$-p-\mathrm{We}K+\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{1+h_x^2}{1-h_x^2}\frac{\partial u}{\partial y}=p_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{4h_x}{1-h_x^2}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$v=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x},$$

где We = $\sigma/\rho h_0 u_0^2=3^2\sigma\nu^2/\rho g^2 h_0^5\sin^2\theta$ — число Вебера,

$$K=\left(\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}\right)_x. \tag{5}$$

Предположение о малой волнистости дна позволяет линеаризовать задачу. Форма дна считается синусоидальной с некоторым волновым числом α

$$f=\hat{f}\exp(i\alpha x),$$

здесь комплексное сопряжение пропускается. Реакция поля скоростей и поверхности на волнистость дна в линейной постановке выражается возмущениями того же вида:

$$u=U+\hat{u}e^{i\alpha x},\quad v=\hat{v}e^{i\alpha x},\quad h=1+\hat{h}e^{i\alpha x}.$$

При подстановке этих соотношений в систему уравнений (1)–(3), линеаризации задачи и введении функции тока $\hat{u}=\phi'$, $\hat{v}=-i\alpha\phi$ получается краевая задача для уравнения Орра–Зоммерфельда:

$$\varphi^{IV}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=i\alpha\,\mathrm{Re}\left[U\left(\varphi'-\alpha^2\varphi\right)-U''\varphi\right], \tag{6}$$

$$y=1:\ \varphi'''-3\alpha^2\varphi'-\frac{3}{2}i\alpha\,\mathrm{Re}\,\varphi'-3i\alpha\cot\theta\hat{h}-i\alpha^3\,\mathrm{Re}\,\mathrm{We}\hat{h}=0, \tag{7}$$

$$\varphi''+\alpha^2\varphi=3\hat{h},\quad \varphi=-\frac{3}{2}\hat{h}, \tag{8}$$

$$y=0:\ \varphi'=0,\quad \varphi'=-3\hat{f}, \tag{9}$$

где $U=3(y-1/2y^2)$. Цель исследования — получить зависимость реакции $\hat{h}/\hat{f}$ от параметров задачи Re, We, θ и α. Число безразмерных параметров уменьшается на один для фиксированной жидкости. Действительно, We = $3^{1/3}\gamma/\mathrm{Re}^{5/3}(\sin\theta)^{1/3}$, где γ = $\sigma\rho^{-1}\nu^{-4/3}g^{-1/3}$ — число Капицы, описывающее физические свойства жидкости. Для воды $\gamma=2850$. Для фиксированной жидкости параметрами являются Re, θ и α.

АСИМПТОТИКА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

Экспериментально аномально большой отклик на волнистость имеет место при числах Рейнольдса порядка десятков и сотен, поэтому будет рассмотрен предел больших чисел Рейнольдса. Внешнее асимптотическое разложение ищется в виде

$$\varphi\sim\Phi^{(0)}+\frac{1}{\alpha\,\mathrm{Re}}\Phi^{(1)}. \tag{10}$$

Будут использоваться только первые члены в разложении и опускаться надстрочный символ ноль. $\Phi^{(0)}$ удовлетворяет уравнению Рэлея

$$\Phi'' - \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U}\right)\Phi = 0, \tag{11}$$

где $U''/U = -1/(y - (1/2)y^2)$. Это уравнение имеет сингулярную точку при $y = 0$. В работе [6] было найдено два фундаментальных решения (11) в виде разложения около особой точки для бегущей со скоростью c волны. В нашем случае $c = 0$, разложения Толлмина принимают вид:

$$\Phi_1 \sim y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}\alpha y^3,$$

$$\Phi_2 \sim 1 + y\ln y + \frac{1}{2}y^2 \ln y + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 1\right)y^2 - \frac{1}{6}\alpha^2 y^3 \ln y.$$

Первое из этих решений регулярно, а второе имеет сингулярность логарифмического вида.

В силу особенности решение уравнения Рэлея не может удовлетворить граничным условиям на стенке (9). Следовательно, необходимо рассмотреть вязкое внутреннее решение около $y = 0$.

Пусть $F_1(y)$ и $F_2(1)$ — два некоторых фундаментальных решения уравнения (11). С точки зрения численного решения задачи U_x удобно выбрать таким образом, чтобы

$$F_1(1) = 0, \quad F'_1(1) = 1, \tag{12}$$

$$F_2(1) = 1, \quad F'_2(1) = 0. \tag{13}$$

В окрестности $y = 0$ решение уравнения Рэлея может быть представлено как линейная комбинация регулярного и особого решений Φ_1 и Φ_2:

$$F_1(y) \sim a_{11}(\alpha)\,\Phi_1(y) + a_{12}(\alpha)\Phi_2(y), \tag{14}$$

$$F_2(y) \sim a_{21}(\alpha)\Phi_1(y) + a_{22}(\alpha)\Phi_2(y), \tag{15}$$

где коэффициенты a_{ij} являются функциями только волнового числа α и не зависят от Re, θ и γ. Эти функции были получены численным интегрированием (11) с условиями (12)–(13), и это единственный численный результат, который необходим для решения всей задачи. Результаты расчета a_{ij} затабулированы в таблице.

Таблица

α	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}
0,0200	0,1533	–0,5000	0,1999	0,0001
0,4404	0,2359	–0,5213	0,1894	0,5279
0,8408	0,4698	–0,5802	1,5592	0,2029
1,2462	0,9050	–0,6846	0,8311	0,4811
1,8468	2,1017	–0,9492	–1,7782	1,2789
2,2422	3,4530	–1,2233	–7,8318	2,7616
2,6126	5,3542	–1,5821	–1,1205	3,4977

Внешнее невязкое решение также не удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности $y = 1$ (однако вблизи свободной поверхности решение является регулярным в отличие от решения около стенки $y = 0$). Вблизи свободной поверхности вводится растянутая переменная ξ:

$$\xi = m(y-1), \quad m = \frac{\sqrt{3\alpha \operatorname{Re}}}{2}, \quad \frac{d}{dy} = m\frac{d}{d\xi}, \tag{16}$$

где $m \to \infty$. Внутренне разложение ищется в виде

$$\varphi_I \sim \phi_I^{(0)}(\xi) + \frac{1}{m}\phi_I^{(1)}(\xi), \tag{17}$$

где подстрочный символ "I" используется для обозначения того, что решение взято вблизи поверхности раздела. Уравнение Ора–Зоммерфельда после подстановки в него (16), (17) и удержания только первого члена разложения принимает вид

$$\frac{d^4\phi_I}{d\xi^4} - 2i\frac{d^2\phi_I}{d\xi^2} = 0. \tag{18}$$

Это уравнение имеет четыре линейно независимых решения: 1, ξ, $e^{(I+i)\xi}$ и $e^{-(I+i)\xi}$. Последнее решение растет экспоненциально при удалении от поверхности раздела $y = 1$ и, как следствие, не может срастись с внешним решением. Таким образом, около поверхности раздела вязкое решение можно представить в виде комбинации трех оставшихся решений

$$\phi_I = A + B\xi + Ee^{(I+i)\xi}, \tag{19}$$

где A, B и E константы, которые могут быть легко получены из граничных условий (7)–(9) на поверхности раздела:

$$A = \left[\frac{i(\alpha^2+2)}{\alpha \operatorname{Re}} - \frac{3}{2}\right]\hat{h}, \tag{20}$$

$$mB = \left[\frac{\sqrt{3\alpha^2}(\alpha^2+2)(1+i)}{(\alpha \operatorname{Re})^{3/2}} - 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{Re}} - \frac{2}{3}\alpha^2 \operatorname{We}\right]\hat{h}, \tag{21}$$

$$E = \frac{-i\left(\alpha^2+2\right)}{\alpha \operatorname{Re}}\hat{h}. \tag{22}$$

Члены порядка малости выше, чем $(\alpha \operatorname{Re})^{3/2}$, считаются пренебрежимо малыми.

Теперь обратимся к внутреннему вязкому решению около стенки $y = 0$. В качестве параметра разложения взято $k \to \infty$ и вводится растянутая переменная η:

$$k = \left(3\alpha \operatorname{Re}\right)^{1/3}, \quad \eta = ky, \quad d/dy = k\left(d/d\eta\right). \tag{23}$$

Внутреннее решение ищется в виде разложения

$$\phi w \sim \phi_W^{(0)} + \frac{1}{k}\phi_W^{(1)}, \tag{24}$$

где символ "W" обозначает внутреннее решение около стенки. В нулевом приближении получается уравнение Эйри

$$\frac{d^4\phi_W^{(0)}}{d\eta^4} - i\eta\frac{d^2\phi_W^{(0)}}{d\eta^2} = 0. \tag{25}$$

Это уравнение имеет четыре линейно независимых решения: 1, η, $\chi_1(\eta)$, и $\chi_2(\eta)$. Функции $\chi_1(\eta)$ и $\chi_2(\eta)$ являются обобщенными функциями Эйри. Поскольку функция $\chi_2(\eta)$ растет при $\eta \to \infty$, она не подходит для внешнего разложения и исключается из рассмотрения. Таким образом, $\phi_W^{(0)}$ является линейной комбинацией трех оставшихся линейно независимых функций 1, η и $\chi = \chi_1(\eta)$

$$\phi_W^{(0)} = M + N\eta + Q\chi(\eta), \tag{26}$$

где M, N и Q константы, которые могут быть получены из граничных условий (9) и из условия сращивания с внешним разложением.

Первое фундаментальное решение 1 сращивается при $\eta \to \infty$ с внешним решением Φ_2 при $y \to 0$. Второе фундаментальное решение η сращивается при $\eta \to \infty$ с внешним решением Φ_1 при $y \to 0$. Чтобы сращивание включало в Φ_2 и Φ_1 члены $y\ln y$ и $1/2y^2$ соответственно, необходимо использовать внутреннее разложение более высокого порядка, включающее $\phi_W^{(1)}$. Следующий член внутреннего разложения (23), соответствующий $\phi_W^{(0)} = 1$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^4\phi_{W,1}^{(1)}}{d\eta^4} - i\eta\frac{d^2\phi_{W,1}^{(1)}}{d\eta^2} = i, \tag{27}$$

решение которого ведет себя как $\eta\ln\eta$ при $\eta \to \infty$ и соответствует логарифмическому члену в Φ_2. Аппроксимация следующего порядка для $\phi_{W,2}^{(0)} \equiv \eta$ соответствует уравнению:

$$\frac{d^4\phi_{W,2}^{(1)}}{d\eta^4} - i\eta\frac{d^2\phi_{W,2}^{(1)}}{d\eta^2} = i\eta, \tag{28}$$

с частным решением

$$\phi_{W,2}^{(0)} = -\frac{1}{2}\eta^2, \tag{29}$$

соответствующим квадратичному члену в Φ_2.

Подстановка (26) в граничные условия при $y = 0$ (9) даст соответственно:

$$M + Q\chi(0) = 0, \tag{30}$$

$$KN + kQ\chi'(0) = -3\hat{f},$$

откуда следует:

$$Q = -M/\chi(0), \tag{31}$$

$$kN - kM\,\frac{\chi'(0)}{\chi(0)} = -3\hat{f}, \tag{32}$$

где функция $\chi'(0)/\chi(0)$ задается формулой [7]

$$\frac{\chi'(0)}{\chi(0)} = -1{,}288\, e^{1/6(\pi i)}. \tag{33}$$

Постоянные M и N определяются из сращивания с внешним решением. Для получения выражения, описывающего реакцию поверхности на волнистость стенки, необходимо согласовывать все полученные разложения.

Из условия сращивания внутреннего разложения при $\xi \to -\infty$ с внешним при $y \to 1$ следует

$$\Phi(y) = AF_2(y) + mBF_1(y), \tag{34}$$

где A и B определяются из (19)–(22), а F_1 и F_2 удовлетворяют условиям (12)–(13).

Невязкое внешнее разложение является суперпозицией $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$, т. е.

$$\Phi(y) = A(\alpha_{21}\Phi 1 + a_{22}\Phi_2) + mB(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_2) =$$

$$= (a_{11}mB + a_{21}A)\Phi_1 + (a_{12}mB + a_{22}A)\Phi_2, \tag{35}$$

которое при $y \to 0$ имеет вид

$$\Phi(y) \sim (\alpha_{11}mB + a_{21}A)(y - 1/2y2 + \ldots) + (a_{12}mB + a_{22}A)(1 + y\ln y + \ldots).$$

Из условия сращивания (35) с внутренним разложением (26) можно получить выражение для постоянных M и N

$$M = a_{12}mB + a_{22}A,$$

$$KN = a_{11}mB + a_{21}A,$$

и, в конечном итоге, подставляя эти выражения в (32), получить окончательные выражения для реакции

$$\frac{\hat{h}}{\hat{f}} = -3\Bigg/\left(\left(a_{21} - k\,\frac{\chi'(0)}{\chi(0)}\,a_{22}\right)A + \left(a_{11} - k\,\frac{\chi'(0)}{\chi(0)}\,a_{12}\right)mB\right), \tag{36}$$

где A и B определяются из условия (19)–(22), а коэффициенты $a_{ij}(\alpha)$ затабулированы в таблице.

Для всех приведенных расчетов рабочей жидкостью является вода γ = 2850. На рис. 1 показана типичная зависимость

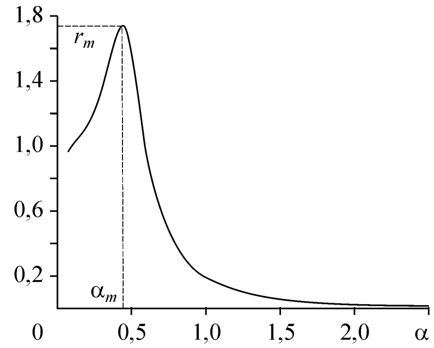


Рис. 1. Сравнение аналитических результатов с численными, полученными методом Галеркина (пунктир), $\theta = \pi/4$.

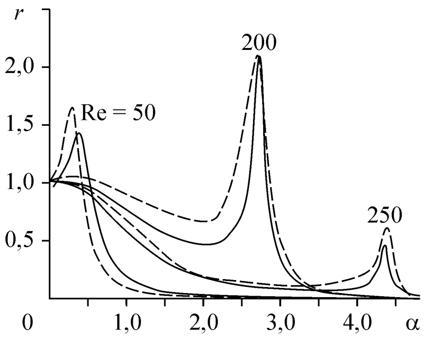


Рис. 2. Зависимость резонансного волнового числа от параметров задачи, Re и θ. Пунктиром показано α_m, полученное из условия, что скорость поверхностной моды, распространяющейся вверх по потоку, равна нулю, $C_R = 0$.

модуля $r = \left|\hat{h}/\hat{f}\right|$ от волнового числа α при Re = 50 и $\theta = \pi/6$. При $\alpha = \alpha_m$ зависимость $r(\alpha)$ имеет ярко выраженный максимум $r = r_m$, где амплитуда реакции раздела почти в два раза превышает амплитуду волнистости стенки. Физическая природа максимума пока не известна.

На рис. 2 показано сравнение результатов аналитической формулы (36) с точным численным решением, полученным методом Галеркина, использованным в [2]. В качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева [8]. Число базисных функций $N = 32$. При удвоении числа функций результат меняется в четвертом знаке после запятой. Имеется хорошее соответствие между асимптотическими результатами, верными при Re $\to \infty$, и точными численными, исключая случаи волнистости с малым волновым числом в области малых чисел Рейнольдса. Сравнение асимптотического и численного решений для разных углов наклона показывает, что асимптотическая теория хорошо работает для больших и умеренных углов наклона.

На рис. 3 и 4 сплошной линией представлена зависимость α_m и r_m от угла θ при различных числах Рейнольдса. Для малых Re не существует максимума α_m. При увеличении Re зависимость приобретает максимум, амплитуда которого увеличивается при увеличении Re.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Результаты расчетов предсказывают необычно большую амплитуду отклика r_m, вплоть до трех. Конечно, необходимо принять во внимание нелинейность реакции, что предполагает решение полной системы Навье–Стокса, как это сделано в [2]. Но вопрос об аномально большом отклике остается, и ключ к его решению нужно искать в резонансе волнистости с поверхностными модами линейной устойчивости.

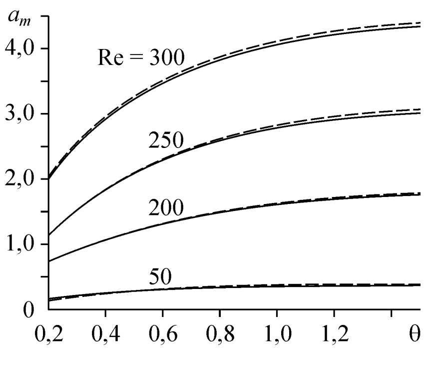


Рис. 3. Зависимость резонансного отклика r_m от параметров задачи, θ и Re.

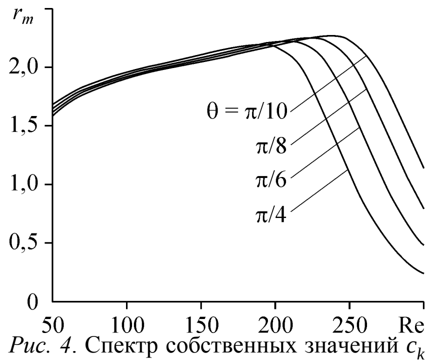


Рис. 4. Спектр собственных значений c_k задачи об устойчивости в комплексной плоскости, $\theta = \pi_3$, Re = 250.

α = 2,6 (*1*), 3,0 (*2*), 3,6 (*3*).

Задача линейной устойчивости тривиального решения описывается краевой задачей на собственные значения для уравнения Орра–Зоммерфельда [4, 5]:

$$\phi^{IV} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi = i\alpha\,\mathrm{Re}\Big[\big(U-c\big)\big(\phi''-\alpha^2\phi\big) - U''\phi\Big], \tag{37}$$

$$y = 1:\ \phi''' - 3\alpha^2\phi + i\alpha\,\mathrm{Re}\big(c-3/2\big)\phi' - 3\alpha\,\mathrm{ctg}\theta - i\alpha^3\,\mathrm{Re}\,\mathrm{We} = 0, \tag{38}$$

$$\phi'' - \alpha^2\phi + 3,\quad \phi = \big(c-3/2\big),\quad y = 0:\ \phi = \phi' = 0, \tag{39}$$

Как и задача о реакции (6)–(9), она может быть решена численно методом Галеркина с базисными функциями Чебышева $T_j(z)$, $j = 0,1,\ \ldots\ N$, $z = 2y - 1 \in [-1, +1]$. Искомая функция ϕ представлялась в виде разложения

$$\phi = \sum\nolimits_{j=0}^{N} \beta_j T_j(z),$$

где β_j — неизвестные коэффициенты разложения. Используя такое разложение искомой функции по первым $N-4$ полиномам Чебышева, уравнение (37) можно представить в виде однородной системы

$$\big(A + cB\big)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = 0. \tag{40}$$

При подстановке разложения для функции ϕ в граничные условия (38)–(39) получались недостающие четыре уравнения для замыкания системы (40). Существование нетривиального решения возможно только при условии равенства нулю определителя $|A + cB|$. Для нахождения собственных значений применялся QR-алгоритм.

В работе представлены результаты только применительно к рассматриваемой задаче, число функций в каждом случае выбиралось $N = 32$.

На рис. 5 приведены результаты типичного расчета спектра комплексных собственных значений $\{c_k\}$, который состоит из счетного множества сдвиговых внутренних и двух поверхностных мод. Последние на фигуре обозначены сплошными круглыми символами. Скорость поверхностных мод является комбинацией двух эффектов: 1) распространение сигнала относительно неподвижной среды соответственно вниз и вверх по потоку, 2) конвективного сноса сигнала вместе с потоком. Для одной из поверхностных мод оба эффекта складываются, и скорость всегда больше нуля. Для второй волны эти эффекты различны по знаку и могут компенсировать друг друга. Так, на рис. 5, *а* при $\alpha = 2{,}6$ скорость второй поверхностной волны положительна. При увеличении α происходит смещение этой волны вправо и при $\alpha = 3{,}0$ скорость волны равна нулю. При дальнейшем увеличении α скорость волны становится отрицательной. В данной системе волнистая стенка играет роль вынуждающей силы с некоторым волновым числом α_m и частотой $\omega_m = 0$.

Условием резонанса неподвижного волнистого дна с некоторой собственной модой с волновым числом α и частотой $\omega = \alpha c$ является равенство волновых чисел и частот: $\alpha = \alpha_m$, $\omega = \omega_m = 0$. При нулевой фазовой скорости $c_R = 0$ $c_i \neq 0$ и, соответственно, мнимая часть скорости не равна нулю $\omega = \alpha c = i\alpha c_i \neq 0$, причем коэффициент $c_i < 0$, т. е. данная мода всегда устойчива. Мнимая часть ω является “расстройкой”

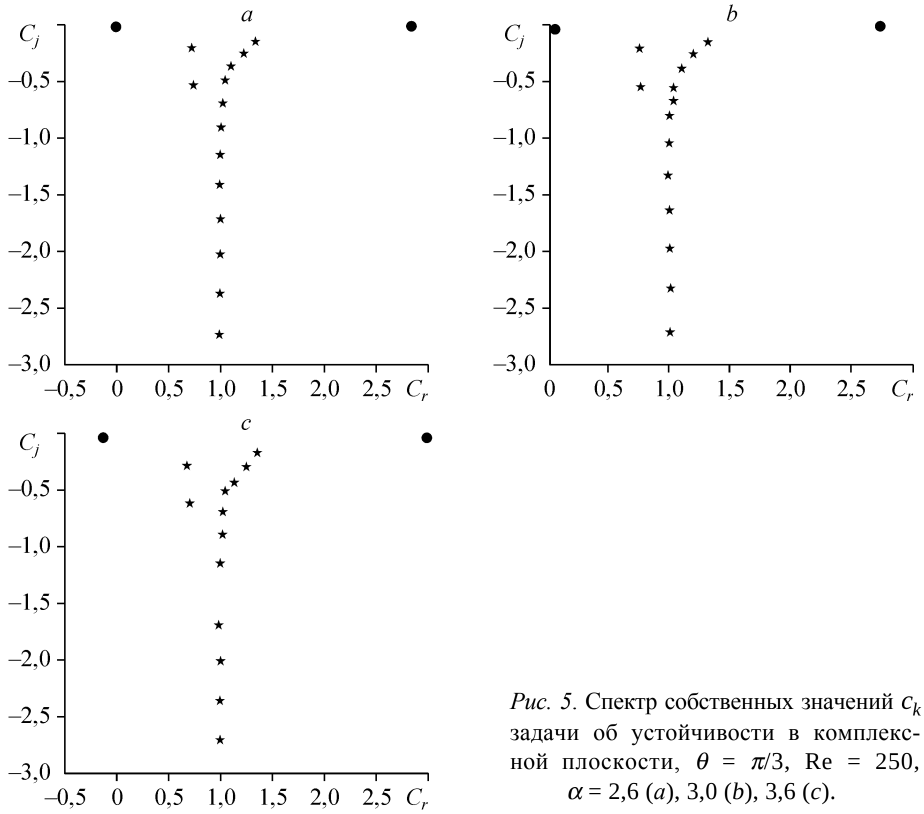


Рис. 5. Спектр собственных значений c_k задачи об устойчивости в комплексной плоскости, $\theta = \pi/3$, Re = 250, $\alpha = 2{,}6$ (*a*), 3,0 (*b*), 3,6 (*c*).

резонанса, чем она меньше, тем сильнее резонанс и больше его амплитуда. При увеличении числа Рейнольдса вязкая диссипация уменьшается и $\alpha c_i \to 0$. Это объясняет, почему резонанс возникает только при достаточно больших Re. На рис. 3 пунктиром показаны α_m, полученные из решения задачи (6)–(9) методом Галеркина и из решения задачи на собственные значения (37)–(39) при условии, что фазовая скорость поверхностной моды, бегущей против течения, равна нулю, $c_R\ (\alpha_m) = 0$. Результаты решения обеих задач совпали с графической точностью. Хорошее соответствие доказывает правильность гипотезы о резонансе поверхностной собственной моды и волнистости стенки. Следует подчеркнуть, что эта поверхностная мода при всех параметрах течения является устойчивой $\alpha c_i < 0$ и в отсутствии волнистой стенки она бы затухала.

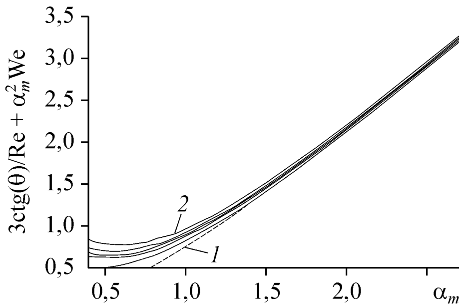
В предположении, что вязкая диссипация отсутствует, рассматривая случай Re $\to \infty$, можно получить универсальные условия резонанса. Действительно, полагая Re = ∞ и $c = 0$, в невязком приближении система (37)–(39) переходит в

$$\phi'' - \left(\frac{U''}{U} + \alpha_m^2\right)\phi = 0,$$

$$y = 1:\quad 3\frac{\mathrm{ctg}\theta}{\mathrm{Re}} + \alpha_m^2 \mathrm{We} = \frac{9}{4}\frac{\phi'}{\phi},$$

$$y = 0:\quad \phi = 0.$$

Рис. 6. Универсальная кривая резонанса (*1*), результаты решения вязкой задачи при различных углах наклона и чисел Рейнольдса (*2*).



Ищется регулярное решение (41). Нетрудно показать, что в этом случае

$$\frac{\phi'(1)}{\phi(1)} = -\frac{\alpha_{22}(\alpha_m)}{\alpha_{12}(\alpha_m)},$$

и, следовательно, $\phi'(1)/\phi(1)$ являются только функцией α_m и

$$3\frac{\mathrm{ctg}\theta}{\mathrm{Re}} + \alpha_m^2 \mathrm{We} = -\frac{9}{4}\frac{\alpha_{22}(\alpha_m)}{\alpha_{12}(\alpha_m)} = g(\alpha_m). \qquad (41)$$

График $3(\mathrm{ctg}\theta/\mathrm{Re}) + \alpha_m^2 \mathrm{We}$ от α_m является местоположением всех точек резонанса в невязком приближении. Эта зависимость может быть получена из (36) при $\alpha \mathrm{Re} \to \infty$ пренебрежением вязкими членами в выражениях (20) и (21) для A и mB. При этом знаменатель (36) обращается в ноль. Универсальная зависимость изображена штриховой линией на рис. 6. Там же сплошными кривыми приведены результаты решения вязкой задачи (6)–(9) для различных θ и Re. Исключая участок малых α_m, кривые совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bontozoglou V., Papapolymerou G.** Laminar flow down a wavy incline // Inter. J. Multiphase Flow. — 1997. — Vol. 23. — P. 69–79.
2. **Trifonov Yu.Ya.** Viscous liquid film flows over a periodic surface // Inter. J. Multiphase Flow. — 1998. — Vol. 24. — P. 1139–1161.
3. **Benjamin T.B.** Wave formation in laminar flow down an inclined plane // J. Fluid Mech. — 1957. — Vol. 2. — P. 554–574.
4. **Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.** Волновое течение пленок жидкости. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1992. — 255 с.
5. **Chang H.-C., Demekhin E.A.** Complex wave dynamics on thin films. — Amsterdam, Elsevier, 2002. — 402 p.
6. **Tollmien W.** Uber die Entstehung der Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Gottingen // Math.-Phys. Klasse. — 1928. — S. 21–44.
7. **Benjamin T.B.** Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. — 1959. — Vol. 6, pt 2. — P. 161–205.
8. **Orzsag S.A.** Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50, No. 4. — P. 689–704.

Статья поступила в редакцию 28 сентября 2006 г.