

УДК 539.374

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ ТИПА МАТРИЦА — СФЕРИЧЕСКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

С. П. Киселев, В. М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена математическая модель гетерогенной среды типа упругопластическая матрица — упругие сферические включения с учетом пластических зон, возникающих в окрестности включений. Показано, что учет влияния пластических зон приводит к зависимости осредненных «модулей» объемного сжатия, сдвига и предела текучести не только от объемной концентрации включений, но и от среднего давления в среде.

Рассмотрим гетерогенный материал, состоящий из матрицы, в которой находятся сферические включения радиуса  $a$ . Предположим, что объемная концентрация включений мала ( $m_1 \ll 1$ ), а их предел текучести достаточно велик. Тогда включения непосредственно не контактируют между собой и деформируются упруго. Эта ситуация типична для гетерогенных материалов, имеющих металлическую матрицу и включения в виде частиц карбидов. Уравнение состояния для матрицы и включения считается известным; требуется найти уравнение состояния всего гетерогенного материала, представляющего собой композит. Уравнение состояния должно определять связь между средними напряжениями и средними деформациями в композите. Решению данной проблемы посвящено большое число работ, список которых приведен в монографиях [1–3]. Тем не менее авторам не известны работы, в которых при выводе уравнения состояния композита обсуждалось бы влияние пластической зоны, возникающей в окрестности включения.

Ниже используется метод осреднения, разработанный ранее в [4–6] для пористого упругопластического материала.

Разобьем гетерогенный материал на сферические ячейки радиуса  $b$ , так что в центре каждой ячейки находится сферическое включение радиуса  $a$  (рис. 1). Радиус ячейки  $b$  определяется по формуле

$$b = a/m_1^{1/3}, \quad m_1 = (4/3)\pi a^3 n,$$

где  $n$  — концентрация включений (число включений в единице объема);  $m_1$  — объемная концентрация включений (доля единичного объема, занятая включениями). Производя осреднение истинных напряжений  $\sigma'_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon'_{ij}$  по объему ячейки, получим

$$\sigma_{ij} = m_1 \sigma_{ij}^{(1)} + m_2 \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij} = m_1 \varepsilon_{ij}^{(1)} + m_2 \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad (1)$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma'_{ij} dV, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon'_{ij} dV, \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \sigma'_{ij} dV, \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \varepsilon'_{ij} dV,$$

$$m_k = \frac{V_k}{V}, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3), \quad V = \frac{4}{3}\pi b^3,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + S_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

$\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $e_{ij}$  — тензоры средних напряжений, средних деформаций и их девиаторы, верхний индекс (1) соответствует включению, верхний индекс (2) — матрице. Предполагая деформации малыми, будем считать, что материал включения описывается законом Гука

$$\varepsilon_{kk}^{(1)'} = -p^{(1)'}/K_1, \quad e_{ij}^{(1)'} = S_{ij}^{(1)'}/(2\mu_1), \quad (2)$$

где  $K_1$  — модуль объемного сжатия;  $\mu_1$  — модуль сдвига; по повторяющимся индексам производится суммирование. Материал матрицы в упругой области подчиняется закону Гука, а в пластической — модели Прандтля — Рейса

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk}^{(2)'} &= -p^{(2)'}/K_2, \\ e_{ij}^{(2)'} &= \frac{S_{ij}^{(2)'}}{2\mu_2} \quad \text{при} \quad I_2^{(2)'} < Y_2^2, \quad \dot{e}_{ij}^{(2)'} = \frac{3}{2} S_{ij}^{(2)'} S_{ij}^{(2)'}, \\ \dot{e}_{ij}^{(2)'} &= \frac{\dot{S}_{ij}^{(2)'}}{2\mu_2} + \dot{\lambda} S_{ij}^{(2)'} \quad \text{при} \quad I_2^{(2)'} = Y_2^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $I_2^{(2)'}$  — второй инвариант тензора девиатора истинных напряжений;  $Y_2$  — предел текучести материала матрицы; точкой обозначена производная по времени; параметр  $\dot{\lambda}$  находится из условия  $I_2^{(2)'} = Y_2^2$ .

Осредняя уравнения (2) по объему включения, а (3) по объему матрицы, получим уравнения, связывающие средние напряжения и деформации в матрице

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk}^{(2)} &= -\frac{p^{(2)}}{K_2}, \quad e_{ij}^{(2)} = \frac{S_{ij}^{(2)}}{2\mu_2} \quad \text{при} \quad I_2^{(2)} < Y_2^2, \\ \dot{e}_{ij}^{(2)} &= \frac{\dot{S}_{ij}^{(2)}}{2\mu_2} + \dot{\lambda} S_{ij}^{(2)} \quad \text{при} \quad I_2^{(2)} = Y_2^2, \quad I_2^{(2)} = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} I_2^{(2)'} dV \end{aligned} \quad (4)$$

и включения

$$\varepsilon_{kk}^{(1)} = -\frac{p^{(1)}}{K_1}, \quad e_{ij}^{(1)} = \frac{S_{ij}^{(1)}}{2\mu_1}, \quad (5)$$

где  $p^{(1)}$ ,  $S_{ij}^{(1)}$  — среднее давление и девиатор тензора напряжений во включении;  $p^{(2)}$ ,  $S_{ij}^{(2)}$  — соответствующие величины в матрице. Пусть к внешней границе ячейки приложено однородное напряжение  $\sigma_{ij}$ . Выберем декартову систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , так чтобы ее начало находилось в центре ячейки (рис. 1), а оси совпадали с главными осями тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . В этом случае  $\sigma_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$  (суммирование по  $i$  отсутствует). Подставляя эти соотношения в уравнения системы (1), получим

$$\varepsilon_i = m_1 \varepsilon_i^{(1)} + m_2 \varepsilon_i^{(2)}, \quad p = m_1 p^{(1)} + m_2 p^{(2)}, \quad S_i = m_1 S_i^{(1)} + m_2 S_i^{(2)}. \quad (6)$$

Если  $\varepsilon_i^{(1)}$ ,  $\varepsilon_i^{(2)}$  из уравнений (4), (5) подставить в правую часть первого уравнения (6), то получим зависимость  $\varepsilon_i = \tilde{\varphi}_i(p^{(1)}, p^{(2)}, S_i^{(1)}, S_i^{(2)})$ . С учетом двух последних уравнений в (6) число независимых переменных можно сократить до двух, например  $\varepsilon_i = \varphi_i(p^{(1)}, S_i^{(1)})$ . Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить  $p^{(1)}$ ,  $S_i^{(1)}$  через  $p$  и  $S_i$ , где  $\sigma_i = -p + S_i$  — напряжение, приложенное к ячейке. Для этого нужно решить задачу на ячейке (рис. 1), т. е. уравнения равновесия с граничными условиями

$$\frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma_{ij}'|_{r=b} = \sigma_{ij}, \quad u_i'|_{r=0} = 0,$$

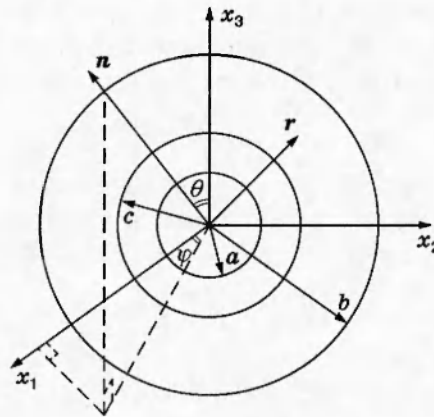


Рис. 1

которые необходимо дополнить замыкающими соотношениями (2), (3). В упругопластическом случае точное решение такой задачи отсутствует, поэтому ниже будет построено приближенное решение.

Сначала рассмотрим более простую задачу, когда к внешней границе ячейки приложено давление  $p$ . Решение такой задачи известно [7], поэтому сформулируем постановку задачи и приведем решение. Для этого наряду с декартовой введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  (рис. 1), в которой уравнение равновесия и граничные условия будут иметь вид

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{2(\sigma'_r - \sigma'_\varphi)}{r} = 0, \quad \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi, \quad u'_\theta = u'_\varphi, \quad \sigma'_r|_{r=b} = -p.$$

Система уравнений должна быть дополнена условиями непрерывности нормальных напряжений и перемещений на границе матрица — включение и равенством нулю перемещений в точке  $r = 0$

$$u'|_{a-0} = u'|_{a+0}, \quad \sigma'_r|_{a-0} = \sigma'_r|_{a+0}, \quad u'|_{r=0} = 0,$$

где  $u' = u'_r(r)$  — смещение материала по  $r$ . Следуя [7], выпишем решение данной задачи. В области, занятой включением, деформация однородна и определяется по формуле

$$\varepsilon_{kk}^{(1)} = -\frac{p^{(1)}}{K_1}, \quad u' = -\frac{p^{(1)}r}{3K_1}. \quad (7)$$

Напряжения в материале в упругом случае  $|p| < |p_0|$  даются формулами

$$\sigma'_r = -p + \Delta p \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) / \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right), \quad \Delta p = p - p^{(1)}, \quad (8)$$

$$\sigma'_\varphi = -p + \Delta p \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) / \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right), \quad \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi.$$

В упругопластическом случае  $|p_0| < |p| < |p_*|$  напряжения в матрице имеют следующий вид:

— при  $a < r \leq c$

$$\sigma'_r = -p^{(1)} + 2\alpha Y_2 \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma'_\varphi = -p^{(1)} + \alpha Y_2 + 2\alpha Y_2 \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & p < 0, \\ -1, & p > 0; \end{cases}$$

— при  $c < r \leq b$

$$\sigma'_r = -p + \frac{2}{3}\alpha Y_2 \left(\frac{c}{b}\right)^3 \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^3\right), \quad \sigma'_\varphi = -p + \frac{2}{3}\alpha Y_2 \left(\frac{c}{b}\right)^3 \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right), \quad \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi, \\ p_0 - p_0^{(1)} = -\frac{2}{3}\alpha Y_2 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^3\right), \quad p_* - p_*^{(1)} = -\frac{2}{3}\alpha Y_2 \ln \left(\frac{b}{a}\right)^3, \quad (9)$$

где  $c$  — радиус пластической зоны (рис. 1);  $p_0$  — давление, при котором возникает пластическая зона;  $p_*$  — давление, при котором пластическая зона заполняет весь объем матрицы, индексом (1) обозначены соответствующие давления во включении, которые находятся ниже из условия непрерывности перемещений при  $r = a$ . Напряжения (8), (9) удовлетворяют условию непрерывности  $\sigma'_r$  на границе матрица — включение. Смещение материала в матрице при  $r > a$  дается формулами

$$u = -\frac{rp^{(2)}}{3K_2} + \delta u, \quad \delta u = \begin{cases} -(p - p^{(1)}) \frac{b^3 a^3}{4\mu_2 (b^3 - a^3) r^2}, & |p| < |p_0|, \\ \frac{\alpha Y_2 c^3}{6\mu_2 r^2}, & |p_0| \leq |p| < |p_*|, \end{cases} \quad (10) \\ p - p^{(1)} + \frac{2}{3}\alpha Y_2 \left(1 - \left(\frac{c}{b}\right)^3 + 3 \ln \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Из последнего уравнения в (10) определяется радиус пластической зоны  $c$ . Воспользуемся условием  $u|_{a-0} = u|_{a+0}$  для определения  $p^{(1)}$ . Рассмотрим сначала упругий случай, когда пластическая зона отсутствует. Найдем  $p^{(1)}$  из условия непрерывности смещения при  $r = a$ . Полагая в формулах (7), (10)  $r = a$  и приравнявая их с точностью до членов  $O(m_1)$ , получим

$$\frac{p^{(1)}}{K_1} = \frac{p}{K_2} + \frac{(1 + \nu_2)(p - p^{(1)})}{2(1 - 2\nu_2)K_2}. \quad (11)$$

При этом учитывается, что

$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{2}{3} \frac{1 + \nu_2}{1 - 2\nu_2} \frac{1}{K_2}, \quad (12)$$

где  $\nu_2$  — коэффициент Пуассона матрицы. Разрешая уравнение (11) относительно  $p^{(1)}$ , получим

$$p^{(1)} = p \left(1 - (K_2 - K_1) / \left(K_2 + K_1 \frac{1 + \nu_2}{2(1 - 2\nu_2)}\right)\right). \quad (13)$$

Данное решение позволяет найти зависимость между  $\epsilon_{kk}$  и  $p$ . Подставляя (4), (7) в первое уравнение (6), найдем

$$\epsilon_i = -m_2 \frac{p^{(2)}}{3K_2} - m_1 \frac{p^{(1)}}{3K_1},$$

откуда с учетом (6), (13)

$$\varepsilon_{kk} = -\frac{p}{K}, \quad K = K_2 \left( 1 + \frac{3m_1(1-\nu_2)(K_1 - K_2)}{(1+\nu_2)K_1 + 2(1-2\nu_2)K_2} \right). \quad (14)$$

Отметим, что формула (14) для  $K$  совпадает с соответствующей формулой (4.7) в [1]. В упругопластическом случае  $|p| > |p_0|$  в окрестности включения возникает пластическая зона  $r = c$  и смещения в матрице определяются формулами (10) при  $|p_0| \leq |p| < |p_*|$ . Приравняв смещения в матрице (10) и включении (7) при  $r = a$ , получим уравнение для  $p^{(1)}$

$$\frac{p^{(1)}}{K_1} = \frac{p}{K_2} - \frac{\varkappa}{3K_2} \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} Y_2 \frac{m_p}{m_1}, \quad (15)$$

где  $m_p = (c/b)^3$  — доля объема, занятая пластической зоной. Радиус пластической зоны  $c$  определяется из последнего уравнения системы (10). Решение этого уравнения можно найти численно и, как показано в [5, 6], аппроксимировать формулой Гарсона

$$\left(\frac{c}{b}\right)^3 = m_p = 1 - m_e, \quad m_e \approx \sqrt{\frac{1+m_1^2}{m_2} - \frac{2m_1}{m_2} \operatorname{ch} \frac{3(p-p^{(1)})}{2Y_2}}, \quad (16)$$

где  $m_e$  — доля объема ячейки, находящейся в упругом состоянии. Согласно [5, 6]  $m_p$  является монотонной (возрастающей) функцией от  $p - p^{(1)}$ , поэтому уравнение (15) при заданном  $p$  ( $|p| > |p_0|$ ) имеет единственный корень  $p^{(1)}$ , который ниже найден для некоторых конкретных случаев численным методом Ньютона. Подставляя (15) в уравнение (13), найдем связь  $\varepsilon_{kk}$  и  $p$  в упругопластическом случае

$$\varepsilon_{kk} = -\frac{p}{K_2} - \frac{m_1}{m_2} \frac{p-p^{(1)}}{K_2} + \frac{\varkappa Y_2}{3K_2} \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} m_p, \quad m_p = \left(\frac{c}{b}\right)^3, \quad |p_0| < |p| \leq |p_*|, \quad (17)$$

где  $p^{(1)}$  определяется из уравнения (15), а  $m_p$  — из уравнения (16). Если уравнение (17) записать в виде  $\varepsilon_{kk} = -p/K$ , то из него следует, что  $K = K(p, m_1)$ . При  $|p| > |p_*|$  осредненный «модуль» объемного сжатия остается постоянным и равным  $K = K(p_*, m_1)$ . Давление  $p_0$ , при котором возникает пластическая зона, определяется из условия  $m_p(p_0) = m_1$ . Подставляя это условие в уравнение (15), перепишем его вместе с предпоследним уравнением из (9) в виде

$$p_0 - p_0^{(1)} = -\frac{2}{3} \varkappa Y_2 m_2, \quad \frac{K_2}{K_1} p_0^{(1)} = p_0 - \frac{1}{3} \varkappa Y_2 \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2}.$$

Решение этой системы уравнений запишется следующим образом:

$$p_0 = -\frac{2}{3} \varkappa Y_2 \left( m_2 + \frac{K_1}{2K_2} \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{K_2}{K_2 - K_1} \right). \quad (18)$$

Рассматривая последовательно сжатие  $\varkappa = -1$ ,  $p_0 > 0$  и расширение  $\varkappa = 1$ ,  $p_0 < 0$  гетерогенного материала, получим, что уравнение (18) будет иметь решение только в случае  $K_2 > K_1$ . Однако это не означает, что пластическая зона может возникать только в случае, когда коэффициент объемного сжатия матрицы  $K_2$  больше, чем  $K_1$  во включении. Согласно [7] компоненты тензора напряжений (9) в состоянии текучести  $a < r < c$  удовлетворяют условию

$$\sigma'_\varphi - \sigma'_r = \varkappa Y_2, \quad \varkappa = \begin{cases} 1, & p < 0, \\ -1, & p > 0. \end{cases} \quad (19)$$

Знак  $\varepsilon$  в (19) выбирается по решению упругой задачи, для которой из (8) получим

$$\sigma'_\varphi - \sigma'_r = -\frac{\delta m_1}{2 m_2} (p - p^{(1)}) \frac{b^3}{r^3}. \quad (20)$$

Согласно (13)

$$p - p^{(1)} = p(K_2 - K_1) / \left( K_2 + K_1 \frac{1 + \nu_2}{2(1 - 2\nu_2)} \right), \quad (21)$$

поэтому при  $K_2 > K_1$  из (20), (21) следует  $\sigma'_\varphi - \sigma'_r \sim -p$ , откуда

$$\sigma'_\varphi - \sigma'_r > 0 \quad \text{при } p < 0, \quad \sigma'_\varphi - \sigma'_r < 0 \quad \text{при } p > 0. \quad (22)$$

Неравенства (22) служат обоснованием выбора знака  $\varepsilon$  в (19). При  $K_2 < K_1$  из (20), (21) следует  $\sigma'_\varphi - \sigma'_r \sim p$ , поэтому справедливы неравенства

$$\sigma'_\varphi - \sigma'_r < 0 \quad \text{при } p < 0, \quad \sigma'_\varphi - \sigma'_r > 0 \quad \text{при } p > 0. \quad (23)$$

Из неравенств (23) найдем, что при  $K_2 < K_1$  в условии текучести (19) знаки  $\varepsilon$  нужно сменить на обратные:

$$\sigma'_\varphi - \sigma'_r = \varepsilon \dot{\gamma}_2, \quad \varepsilon = \begin{cases} -1, & p < 0, \\ 1, & p > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Таким образом, уравнения (19), (24) позволяют определить знак  $\varepsilon$  в (18) для произвольных  $K_1$  и  $K_2$ . Отсюда следует, что пластическая зона будет возникать при любом отношении  $K_2/K_1$ , не равном единице.

Рассмотрим более общий случай, когда к границе ячейки  $r = b$  приложено однородное напряжение  $\sigma_{ij} = (-p + S_i)\delta_{ij}$  (суммирование по  $i$  отсутствует). Как отмечалось выше, точное решение такой задачи отсутствует, поэтому, следуя [4-6], построим приближенное решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma'_r|_{r=b} = -p + S_1 n_1^2 + S_2 n_2^2 + S_3 n_3^2, \quad (25)$$

где  $n_1 = \sin \theta \cos \varphi$ ;  $n_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ;  $n_3 = \cos \theta$  — компоненты вектора нормали к поверхности ячейки (рис. 1). Приближенные решения уравнений равновесия с граничным условием (25) определяются формулами (7)–(10), в которых нужно произвести замену  $-p \rightarrow \sigma_n = -p + S_1 n_1^2 + S_2 n_2^2 + S_3 n_3^2$ . Смещение в декартовой системе координат в точке с координатами  $(r, \theta, \varphi)$  определяется формулой  $u_i = n_i u(r, n_1, n_2, n_3)$ , откуда следует, что смещение точек, образованных пересечением декартовых осей со сферой радиуса  $r$ , определяется формулами (7), (10), в которых необходимо произвести замену  $-p \rightarrow -p + S_i$ . В результате во включении  $r < a$  смещения будут определяться формулой

$$u_i = -p^{(1)} r / (3K_1) + S_i^{(1)} r / (2\mu_1), \quad (26)$$

а в матрице  $a \leq r < b$  — формулой

$$u_i = -p^{(2)} r / (3K_2) + S_i^{(2)} r / (2\mu_2) + \delta u_i. \quad (27)$$

В упругом случае  $|p| < |p_0|$

$$\delta u_i = -\frac{p - p^{(1)}}{\delta K_2} \frac{1 + \nu_2}{1 - 2\nu_2} \frac{m_1}{m_2} \frac{b^3}{r^2} + \frac{S_i - S_i^{(1)}}{4\mu_2} \frac{m_1}{m_2} \frac{b^3}{r^2}. \quad (28)$$

В упругопластическом случае  $|p_0| \leq |p| < |p_*|$

$$\delta u_i = -\frac{\varepsilon \dot{\gamma}_2}{\delta \mu_2} \frac{c_i^3}{r^2}, \quad (29)$$

где  $c_i$  определяется из уравнения

$$p - p^{(1)} - \left( S_i - S_i^{(1)} \right) + \frac{2}{3} \alpha Y_2 \left( 1 - \left( \frac{c_i}{b} \right)^3 + 3 \ln \frac{c_i}{a} \right) = 0. \quad (30)$$

Раскладывая выражение (30) в ряд по степеням  $(S_i - S_i^{(1)})/Y_2$  и подставляя в (29), найдем

$$\delta u_i = \frac{\alpha Y_2}{9K_2} \frac{1 + \nu_2}{1 - 2\nu_2} \frac{b^3}{r^2} m_p + \frac{S_i - S_i^{(1)}}{4\mu_2} \frac{m_p}{m_e} \frac{b^3}{r^2}. \quad (31)$$

Как показано ниже, компоненты девиатора напряжений удовлетворяют неравенству  $(3/2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \leq Y^2$ , откуда для отдельной компоненты получим  $|S_i| \leq \sqrt{2/3} Y$ . Осредненный предел текучести  $Y$  определяется формулой (39), полученной ниже, из которой следует неравенство  $Y < Y_2$ . Таким образом, имеем ограничение сверху

$$\frac{|S_i - S_i^{(1)}|}{Y_2} < \frac{|S_i|}{Y_2} = \frac{|S_i|}{Y} \frac{Y}{Y_2} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Y}{Y_2} < 1,$$

из которого следует обоснованность разложения (31).

Из условия непрерывности смещений (26), (27) при  $r = a$  с учетом (6), (11), (12), (15), (28), (31) следуют уравнения

$$\frac{S_i^{(1)}}{2\mu_1} = \frac{S_i}{2\mu_2} + \frac{S_i - S_i^{(1)}}{4\mu_2}, \quad |p| < |p_0|, \quad \frac{S_i^{(1)}}{2\mu_1} = \frac{S_i}{2\mu_2} + \frac{S_i - S_i^{(1)}}{4\mu_2 m_1} \frac{m_p}{m_e}, \quad |p_0| \leq |p| < |p_*|,$$

разрешая которые, получим формулы для  $S_i^{(1)}$

$$S_i - S_i^{(1)} = S_i (\mu_2 - \mu_1) / \left( \mu_2 + \frac{1}{2} \mu_1 \right), \quad |p| < |p_0|, \quad (32)$$

$$S_i - S_i^{(1)} = S_i (\mu_2 - \mu_1) / \left( \mu_2 + \frac{m_p}{2m_1 m_e} \mu_1 \right), \quad |p_0| \leq |p| < |p_*|.$$

Подставляя (4) в первое уравнение (6) и разделяя шаровую и девиаторную составляющие тензора деформации, найдем

$$e_i = m_2 S_i^{(2)} / (2\mu_2) + m_1 S_i^{(1)} / (2\mu_1), \quad (33)$$

где  $S_i^{(2)} = (S_i - m_1 S_i^{(1)}) / m_2$ . Используя формулы (32), перепишем уравнение (33) в виде

$$e_i = \frac{S_i}{2\mu}, \quad \mu = \begin{cases} \mu_2 \left( 1 + \frac{3m_1(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + 2\mu_2} \right), & |p| < |p_0|, \\ \mu_2 \left( 1 + \frac{m_1(\mu_1 - \mu_2)(m_p m_2 + 2m_1 m_e)}{m_p m_2 \mu_1 + 2m_1 m_e \mu_2} \right), & |p_0| \leq |p| < |p_*|. \end{cases} \quad (34)$$

Формулы (14), (17), (34) представляют собой замыкающие соотношения для гетерогенной среды типа матрица — сферические включения. Из этих формул следует, что наличие пластической зоны приводит к зависимости осредненных «модулей» сдвига  $\mu$  и объемного сжатия  $K$  не только от пористости  $m_1$ , но и от давления  $p$ .

До сих пор предполагалось, что весь материал матрицы либо его часть находится в упругом состоянии  $I_2^{(2)} < Y_2^2$ . Если весь материал матрицы переходит в пластическое состояние  $I_2^{(2)} = Y_2^2$ , то происходит его пластическое течение. Согласно (4) приращение девиатора деформаций дается формулой

$$de_{ij}^{(2)} = \frac{dS_{ij}^{(2)}}{2\mu_2} + d\lambda S_{ij}^{(2)}, \quad (35)$$



где  $d\lambda$  определяется из условия

$$\frac{1}{V_2} \int \frac{3}{2} S_{ij}^{(2)'} S_{ij}^{(2)'} dV = Y_2^2. \quad (36)$$

Представляя девиатор микронапряжений  $S_{ij}^{(2)'}$  в виде суммы средних  $S_{ij}^{(2)} = \frac{1}{V_2} \int S_{ij}^{(2)'} dV$

и пульсационных  $\tilde{S}_{ij}^{(2)}$  напряжений  $S_{ij}^{(2)'} = S_{ij}^{(2)} + \tilde{S}_{ij}^{(2)}$ , из уравнения (36) получим

$$\frac{3}{2} S_{ij}^{(2)} S_{ij}^{(2)} dV + \frac{1}{V_2} \int \frac{3}{2} \tilde{S}_{ij}^{(2)} \tilde{S}_{ij}^{(2)} dV = Y_2^2, \quad (37)$$

где использовано  $\int \tilde{S}_{ij}^{(2)} dV = 0$ . Аналогично [4-6] будем предполагать, что  $\tilde{S}_{ij}^{(2)}$  возникают под действием давления  $p$ , приложенного к поверхности ячейки. В этом случае

$$\frac{1}{V_2} \int \frac{3}{2} \tilde{S}_{ij}^{(2)} \tilde{S}_{ij}^{(2)} dV = \frac{1}{V_2} \int \frac{3}{2} \left( (\tilde{S}_r^{(2)})^2 + 2(\tilde{S}_\varphi^{(2)})^2 \right) dV, \quad (38)$$

где  $\tilde{S}_r^{(2)} = \sigma_r' + p'$ ;  $\tilde{S}_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi' + p'$ ;  $p' = -(1/3)(\sigma_r' + 2\sigma_\varphi')$ ;  $\sigma_r'$ ,  $\sigma_\varphi'$  — микронапряжения в ячейке под действием давления  $p$ , вычисляемые по формулам (8), (9). Подставляя  $\sigma_r'$ ,  $\sigma_\varphi'$  из (8), (9) в (37), (38), найдем

$$\frac{3}{2} S_{ij}^{(2)} S_{ij}^{(2)} = Y^2, \quad (39)$$

$$Y^2 = \begin{cases} Y_2^2 m_2^2 - (9/4)(p - p^{(1)})^2 m_1, & |p| < |p_0|, \\ Y_2^2 m_2 m_e^2, & |p_0| < |p|, \end{cases} \quad (40)$$

где  $p^{(1)}$  и  $m_e$  определены выше. Используя формулу (16), аппроксимируем выражение (40) формулой Гарсона

$$Y^2 = Y_2^2 \left( 1 + m_1^2 - 2 m_1 \operatorname{ch} \left( \frac{3}{2} \frac{p - p^{(1)}}{Y_2} \right) \right).$$

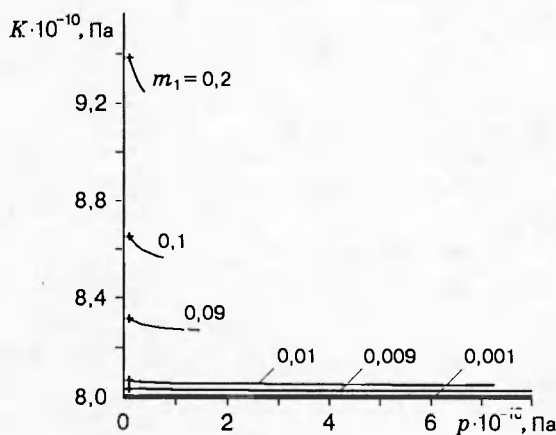


Рис. 2

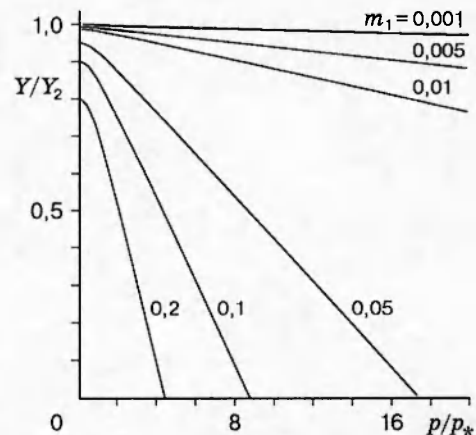


Рис. 3



Уравнения (35), (39), (40) позволяют найти приращения девиатора деформаций при пластическом течении материала матрицы. На рис. 2, 3 показаны зависимости осредненного «модуля»  $K$  и предела текучести  $Y$  от давления  $p$  при различных значениях  $m_1$ , которые рассчитаны по полученным выше формулам (14), (15), (17), (39). Радиус пластической зоны находился из последнего уравнения (10), которое с учетом (15) решалось численно по методу Ньютона. В расчетах полагалось, что ячейка состоит из алюминиевой матрицы ( $K_2 = 8 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu_2 = 2,48 \cdot 10^{10}$  Па,  $Y_2 = 3 \cdot 10^8$  Па) и карбидного SiC включения ( $K_1 = 2,13 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu_1 = 1,87 \cdot 10^{11}$  Па). Крестиками на рис. 2 обозначены точки  $p = p_0$ , в которых возникает пластическая зона. Зависимость  $K(p)$  на рис. 2 строилась до значения  $p = p_*$ , при  $p > p_*$  осредненный «модуль»  $K$  остается постоянным, равным  $K(p_*, m_1)$ . Видно, что под действием пластической зоны  $K$  уменьшается на  $10 \div 20\%$ , однако чем меньше  $m_1$ , тем меньше ее влияние на  $K$ . Отметим, что зависимость осредненного «модуля» сдвига  $\mu$  от давления имеет аналогичный характер. При  $m_1 < 10^{-3}$  величины  $K$ ,  $\mu$ ,  $Y$  практически постоянны и равны соответственно  $K_2$ ,  $\mu_2$ ,  $Y_2$ . С ростом давления  $|p|$  предел текучести  $Y$  уменьшается (рис. 3) и при критическом значении  $|p_*|$  обращается в нуль, в результате тензор средних напряжений в композите  $\sigma_{ij}$  становится шаровым. Таким образом, при  $|p| > |p_*|$  механические свойства композита становятся подобными свойствам жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
2. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Победря Б. Е. Механика композитных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
4. Киселев С. П. Уругоупругая модель деформирования пористого материала // Фильтрация многофазных систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики АН СССР, 1991. С. 151–166.
5. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука, 1992.
6. Киселев С. П., Фомин В. М. О модели пористого материала с учетом пластической зоны, возникающей в окрестности поры // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 6. С. 125–133.
7. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
8. Gurson A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Pt 1 // Trans. ASME. Ser. H. J. Engng. Math. Tech. 1977. V. 99, N 2. P. 2–15.

Поступила в редакцию 31/III 1997 г.,  
в окончательном варианте — 21/VIII 1997 г.