

скорость пламени. Отношения теплоемкостей γ_u и γ_b оказывают относительно слабое влияние на время сгорания, но определяют значение конечного давления в E_i -уравнениях и поэтому существенно влияют на максимальную скорость нарастания давления. Чем выше значения γ_b и γ_u , тем меньше время сгорания и больше скорость нарастания давления. Величина γ_b практически не влияет на начальной стадии горения в E_i -уравнениях,

что дает возможность значительно упростить уравнения динамики (в предположении $\gamma_b = \gamma_u$) без существенной потери точности. В целом приближенные E_i -уравнения лучше описывают начальные стадии горения, а π_e -уравнения — конечные. С практической точки зрения удовлетворительные результаты расчета τ и $d\pi/d\tau$ для процесса в целом дает π_e -уравнение в предположении $\gamma_b = \gamma_u$.

Поступила в редакцию
23/IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Абдурагимов. ЖВХО им. Д. И. Менделеева, 1974, 19, 5.
2. В. И. Водяник. Предохранительные устройства для защиты химического оборудования. М., «Химия», 1975.
3. Г. Г. Орлов. ЖВХО им. Д. И. Менделеева, 1976, 21, 4.
4. C. Donat. Staub-Reinhalt. Luft., 1971, 31, 4.
5. G. Richenstorf, G. Heidensohn. Bauzeitung, 1972, 12.
6. H. R. Maisey. Chem. and Proc. Engin., October, 1965, p. 527.
7. D. Bradley, A. Mitcheson. Comb. a. Flame, 1976, 26, 201.
8. В. С. Бабкин, Ю. Г. Кононенко. ФГВ, 1967, 3, 2.
9. В. С. Бабкин. Канд. дис., Новосибирск, ИХКИГ, 1965.
10. В. С. Бабкин, А. В. Вьюн, Л. С. Козаченко. ФГВ, 1967, 3, 3.
11. J. Nagy, J. W. Conn, H. C. Verakis. U. S. Department of Interior, Bureau of Mines, RI 7279, 1969.
12. J. Nagy, E. C. Sieler et. al. U. S. Department of Interior, Bureau of Mines, RI 7507, 1971.
13. В. С. Бабкин, В. И. Бабушок. ФГВ, 1977, 13, 1.
14. A. M. Gartorth. University of the Wittwatersrand, School of Mechanical Engineering, Johannesburg, Rep. 57, 1974.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ ПО СМЕСИ, РЕАГИРУЮЩЕЙ ПРИ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

А. П. Алдушин, Я. Б. Зельдович, С. И. Худяев
(Черноголовка)

Реакция при начальной температуре меняет характеристики взрывчатой смеси перед фронтом пламени и вносит элемент нестационарности в процесс распространения волны горения. Предложенный в [1] способ описания этого эффекта заключается в замене исходной нестационарной задачи на квазистационарную с адиабатически растущей начальной температурой $T_a(t)$ и учитывающим этот рост эффективным источником тепловыделения. Ниже приводится апробирование этой методики путем прямого сопоставления с результатами численного решения исходной нестационарной задачи.

Для простоты рассмотрим случай подобия температурного и концентрационного полей в пренебрежении движения газа, связанным с его расширением, и положим теплофизические характеристики смеси постоянными. Предположим, что зажигание осуществляется горячими продуктами реакции и также не нарушает подобия. В этих предположениях распространение экзотермической реакции n -го порядка описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \varphi(\Theta), \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (1)$$

с нелинейным источником

$$\varphi = A(-\Theta)^n \exp[\Theta/(1 + \beta\Theta)]. \quad (2)$$

Здесь t , x — безразмерное время и координата вдоль распространения фронта; $\Theta = (T - T_b)E/RT_b^2$ — безразмерная температура, отсчитываемая вниз от температуры горения T_b и измеряемая в характеристических интервалах RT_b^2/E ; E — энергия активации; $\beta = RT_b/E$; A — масштабный коэффициент. В численных расчетах принималось $\beta = 0$.

Начальное состояние, соответствующее каталитическому зажиганию, задавалось в виде адиабатически сгоревшего слоя толщиной x_0 перед исходной взрывчатой смесью с температурой Θ_n ; граничные условия предполагают адиабатическую стенку либо симметричное развитие процесса в обе стороны от нулевой координаты:

$$\begin{aligned} \tau = 0: \quad & \Theta(x) = 0, \quad 0 < x < x_0, \\ & \Theta(x) = \Theta_n, \quad x > x_0; \\ x = 0: \quad & d\Theta/dx = 0, \\ x = \infty: \quad & \Theta = \Theta_a, \quad d\Theta/dx = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Безградиентный рост температуры вдали от фронта пламени описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$d\Theta_a/dt = \varphi(\Theta_a), \quad \Theta_a(0) = \Theta_n. \quad (4)$$

Введем новую переменную

$$\vartheta(x, t) = \Theta(x, t)/\Theta_a(t), \quad 0 < \vartheta < 1, \quad (5)$$

характеризующую относительную величину температуры для переменного во времени интервала $(\Theta_b, \Theta_a(t))$. Подставляя (5) в (1) и учитывая (4), получим уравнение теплопроводности с модифицированным законом тепловыделения

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \varphi_1, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\Theta_a} [\varphi(\Theta_a \vartheta) - \vartheta \varphi(\Theta_a)]. \quad (6)$$

В отличие от источника φ функция φ_1 обращается в нуль не только на горячем ($\vartheta = 0$), но и на холодном ($\vartheta = 1$) конце интервала температур. Последнее позволяет искать решение (6) в виде бегущей волны

$$\vartheta = \vartheta(x - \int u dt).$$

Пренебрегая нестационарным членом $\partial \vartheta / \partial t$ в системе координат $\xi = x - \int u dt$, связанной с фронтом пламени, имеем краевую задачу для определения скорости волны u

$$\begin{aligned} -\infty < \xi < \infty, \quad \vartheta''_{\xi\xi} + u\vartheta'_\xi + \varphi_1(\Theta_a, \vartheta) &= 0, \\ \vartheta(-\infty) &= 0, \quad \vartheta(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Возвращаясь к температуре Θ , получим квазистационарную задачу

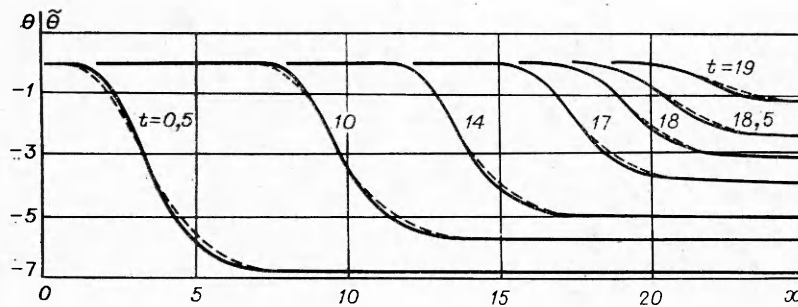


Рис. 1.

о распространении пламени с эффективным источником тепловыделения, зависящим от времени

$$\Theta_{\xi\xi}'' + u\Theta_{\xi}' + \varphi_{\Theta\Theta}(\Theta, \Theta_a) = 0, \quad \Theta(-\infty) = 0, \quad \Theta(\infty) = \Theta_a, \quad (8)$$

$$\varphi_{\Theta\Theta} = \varphi(\Theta) - \Theta\Theta_a^{-1}\varphi(\Theta_a), \quad (9)$$

$$d\Theta_a/dt = \varphi(\Theta_a), \quad \Theta_a(0) = \Theta_n. \quad (10)$$

Решение задачи (8)—(10) есть некоторое приближение к решению исходной задачи (1)—(3) при достаточно больших временах, когда исчезает влияние начальных условий. Для выявления степени соответствия решений проведены численные расчеты по определению нестационарной скорости и распределения температур в волне горения прямым и приближенным методами.

На рис. 1 сплошными линиями показаны температурные профили $\Theta(x)$ для различных моментов времени, полученные в результате решения исходной нестационарной задачи ($n = 1$, $\Theta_n = -7$, $x_0 = 3$, $\beta = 0$). Отметим возрастание температуры в исходной смеси вследствие медленной адиабатической реакции. Теплопроводность и диффузия в областях, далеких от фронта, несущественны вследствие практической безградиентности профилей.

Штриховыми линиями на рис. 1 нанесены температурные профили $\tilde{\Theta}(t)$ квазистационарной задачи, совмещенные с истинными при температуре $\Theta_* = (\Theta_b + \Theta_a)/2$, $\Theta_b = 0$ — температура горения, Θ_a — зависящая от времени температура перед фронтом. Близкое соответствие профилей (разность менее 10%) не только свидетельствует о хорошем приближении к точному решению, но и указывает на существенную роль полусуммы температур в качестве координаты привязки пламени, что отмечалось в [1].

Скорость пламени как функция температуры перед фронтом, вычисленная различными способами, представлена на рис. 2. Кривая u соответствует скорости перемещения координаты, отвечающей полусумме температур $u = dx_*/dt$, $x_* = x(\tilde{\Theta}_*)$, определенной в результате численного решения нестационарной задачи (1)—(3) без каких-либо приближений. Линия \tilde{u} есть скорость, рассчитанная квазистационарным способом, как наименьшее собственное значение краевой задачи (8)—(10) с эффективизированной скоростью выделения тепла. Кривая $u_K = 2\sqrt{\varphi_{\Theta\Theta}'(\Theta_a)}$ — значение скорости пламени, определенное аналитической формулой Колмогорова — Петровского — Пискунова [2], кривая

$u_3 = \sqrt{2\Theta_a^{-2} \int_{\Theta_a}^0 \varphi d\Theta}$, то же, по формуле Зельдовича — Франк-Каме-нецкого [3]. Линия u_K в точке N сливается с кривой \tilde{u} .

Распространение приближенного метода расчета мгновенных характеристик пламени на случай реакции более высоких порядков

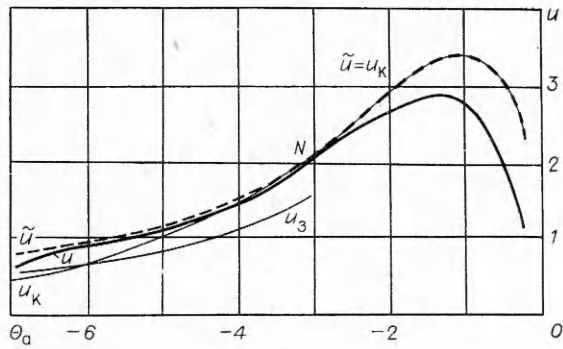


Рис. 2.

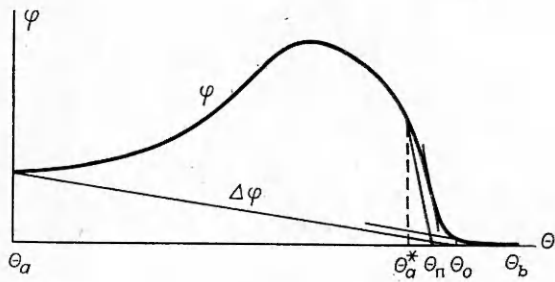


Рис. 3.

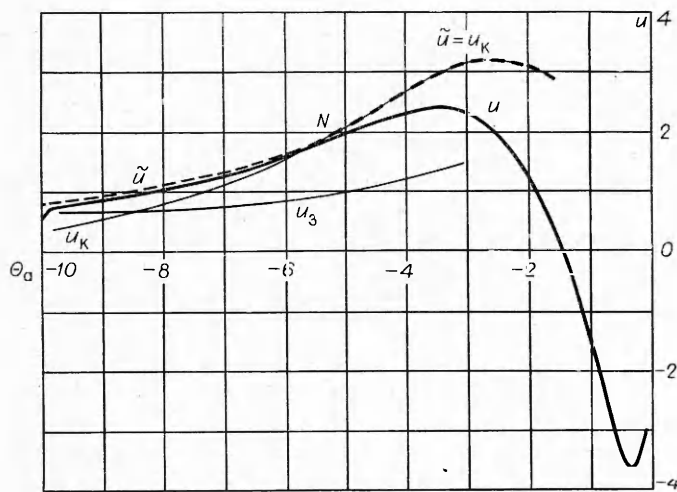


Рис. 4.

($n > 1$) требует некоторой модификации процедуры построения эффективного источника. Непосредственное использование (9) приводит к некорректности краевой задачи (8), (9) вследствие отрицательных значений $\varphi_{\text{эфф}}$ в окрестности $\Theta = 0$. Такая ситуация возникает всякий раз при наличии перегиба на кривой тепловыделения, обусловленного торможением реакции на глубоких стадиях выгорания (рис. 3) при порядке реакции выше первого, или при наличии медленной завершающей реакции многостадийного процесса¹.

Существование высокотемпературного участка с замедленным тепловыделением вносит новый элемент в структуру волны горения [4]. Помимо обычно выделяемых во фронте зон подогрева и реакции с крутыми градиентами возникает зона догорания, в которой происходит медленное повышение температуры от Θ_n (температура перегиба $\varphi(\Theta)$) до Θ_b и дореагирование вещества до полного влияния на процесс распространения волны горения и структуру предшествующих зон и не испытывает воздействия со стороны последних.

Автономность процесса догорания подсказывает способ эффективизации источника при наличии точки перегиба на кривой $\varphi(\Theta)$. Для описания явления распространения реакции коррекцию функции тепловыделения следует проводить лишь в интервале температур, включающим зону догорания. Далее будем полагать:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{эфф}} &= \varphi - \varphi(\Theta_a)(\Theta_0 - \Theta)/(\Theta_0 - \Theta_a), & (\Theta_a < \Theta < \Theta_0), \\ \varphi_{\text{эфф}} &\equiv \varphi, & (\Theta_0 < \Theta < \Theta_b). \end{aligned} \quad (11)$$

Температура Θ_0 определяется из условия, геометрический смысл которого ясен из рис. 3:

$$-\varphi'(\Theta_0) = \varphi(\Theta_a)/(\Theta_0 - \Theta_a). \quad (12)$$

Принятый способ эффективизации источника автоматически исключает влияние догорания на коррекцию источника и пригоден лишь для описания явления распространения при температуре перед фронтом, не слишком близкой к $\Theta_b = 0$. С этим связано ограничение квазистационарного подхода — при значениях $\Theta_a(t)$, больших некоторого критического Θ_a^* (см. рис. 3), уравнение (12) теряет решение (при $n = 2$, $\Theta_a^* = -1,7$). Для описания процесса завершения реакции, протекающего в режиме квазиadiaбатического догорания, можно снова пренебречь (вследствие малых градиентов) теплопроводностью и рассматривать обыкновенное уравнение

$$\partial\Theta/\partial t = \varphi(\Theta), \quad (13)$$

определяющее рост температуры в каждой точке пространства. Начальным условием для (13) является распределение температур при $\Theta_a = \Theta_a^*$.

Нетрудно видеть, что координата x_* , отвечающая полусумме температур $(\Theta_b + \Theta_a)/2 = \Theta_a/2$, при увеличении Θ_a получает возвратное движение, формально соответствующее отрицательной скорости волны в процессе догорания. Действительно, темп изменения относительной температуры $\vartheta = \Theta/\Theta_a$ в режиме догорания определяется уравнением

$$\partial\vartheta/\partial t = 1/\Theta_a \cdot [\varphi(\Theta) - \vartheta\varphi(\Theta_a)]. \quad (14)$$

Скорость точки x_* , отвечающей фиксированному значению ϑ , меняет знак вместе с правой частью (14)

$$\left. \frac{dx_*}{dt} \right|_{\vartheta} = - \frac{(\partial\vartheta/\partial t)_x}{(\partial\vartheta/\partial x)_x}.$$

¹ В реакциях горения нитросоединений и нитроэфиров возможно, что раскисление NO, т. е. реакции $2\text{NO} + 2\text{H}_2 = \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ и $2\text{NO} + 2\text{CO} = \text{N}_2 + 2\text{CO}_2$, является такой стадией.

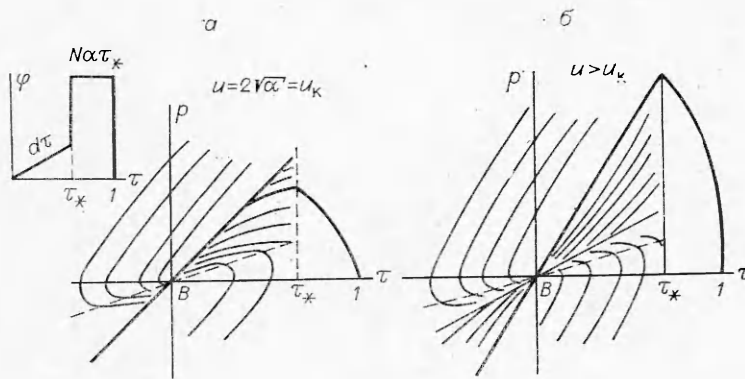


Рис. 5.

Для бимолекулярной реакции нулевая скорость достигается при $\Theta_a = -1,4$ ($\theta = 1/2$).

Результаты численных расчетов, сопоставляющие квазистационарный и нестационарный подходы описания процесса в случае реакции второго порядка, представлены на рис. 4 ($n = 2$, $\Theta_n = -10$, $\beta = 0$, $x_0 = 3$). Обозначения и смысл характеристик те же, что и на рис. 2. Скорость \tilde{u} , вычисленная как наименьшее собственное значение краевой задачи (8), (9) с эффективным источником (11) на этапе распространения, близка к скорости движения u точки x_* ($\Theta_a/2$), найденной из решения нестационарной задачи. Изменение знака скорости распространения волны в процессе догорания соответствует значению $\Theta_a = -1,4$, вычисленному ранее.

Самостоятельного анализа заслуживает обнаруженная при численных расчетах широкая область применимости теории [2]. Последняя, как известно, утверждает равенство скорости пламени наименьшему значению стационарной задачи, определяемому по наклону функции тепловыделения в окрестности начальной температуры

$$u = 2\sqrt{(d\varphi/d\Theta)_{\Theta=\Theta_a}}. \quad (15)$$

Авторы [2] рассматривали случай выпуклой функции тепловыделения ($\varphi_{\Theta}(\Theta_a) \geq \varphi_{\Theta}(\Theta)$), например, $\varphi = k\theta(\Theta - \Theta_a)$, и доказали, что (15) справедливо именно для этого случая.

В противоположном случае вогнутого на начальном участке источника при $\varphi_{\max} \gg (\Theta_{\max} - \Theta_a)\varphi'(\Theta_a)$ известно, что величина скорости определяется областью максимума $\varphi(\Theta)$, а тепловыделением при низких температурах можно пренебречь (теория [3]). Оставался невыясненным вопрос о том, является ли условие выпуклости **необходимым** для выполнения соотношения (15). Как именно происходит переход от формулы [2] к приближенному решению [3].

Численные расчеты, представленные на рис. 2, 4, показывают, что область применимости теории [2] шире, чем это можно предположить. Пример, приведенный ниже, аналитически демонстрирует применимость ее и в случае частично вогнутого источника.

Рассмотрим стационарную задачу о распространении пламени

$$\begin{aligned} u\rho &= p \cdot dp/d\tau + \varphi(\tau), \quad 0 < \tau < 1, \\ p(0) &= p(1) = 0, \\ \tau &= 1 - \Theta \cdot \Theta_a^{-1}, \quad p = d\tau/dx \end{aligned} \quad (16)$$

с источником тепловыделения $\varphi(\tau)$ в виде (рис. 5)

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \alpha\tau, & \tau < \tau_* \\ \alpha N\tau_*, & \tau_* < \tau < 1. \end{cases} \quad (17)$$

Определим величину скорости горения u , т. е. нижнюю границу спектра собственных значений задачи (16), как функцию параметров источника N, τ_* .

Интегрируя (16) на участке $\tau_* < \tau < 1$, найдем положение интегральной кривой $p(\tau)$ в месте скачка функции тепловыделения:

$$p_* = p(\tau_*), \quad p_* u / \varphi_0 + \ln(1 - p_* u / \varphi_0) = u^2 / \varphi_0 \cdot (\tau_* - 1). \quad (18)$$

Характер поведения интегральных кривых на участке линейного изменения $\varphi(\tau)$ показан на рис. 5. Траектории $p(\tau)$, входящие в особую точку B , как следует из выражения для производной

$$p'_\tau = \frac{u}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{u^2}} \right),$$

появляются, начиная с $u = u_k = 2\sqrt{\alpha}$. При $u = u_k$ все интегральные кривые касаются прямой $p = \sqrt{\alpha} \tau$, являющейся одним из решений (16) на интервале $0 < \tau < \tau_*$; при $u > u_k$ общей (за исключением траектории $p_+ = u/2 \cdot (1 + \sqrt{1 - 4\alpha/u^2})\tau$) касательной траекторией является интегральная кривая $p_- = u/2 \cdot (1 - \sqrt{1 - 4\alpha/u^2})\tau$.

Из рис. 5, а ясно, что при $p_* = p(\tau_*, N, u_k) < \sqrt{\alpha} \tau_*$ минимальным собственным значением задачи (16), т. е. искомой скоростью пламени, является u_k . В случае обратного соотношения $p_* > \sqrt{\alpha} \tau_*$ минимальное u определяется равенством (рис. 5, б):

$$p_* = p_+.$$

Подставляя в (18) $p_* = \sqrt{\alpha} \tau_*$, $u = 2\sqrt{\alpha}$, найдем предельную величину скачка N_* , при котором еще имеет место режим [2]:

$$N_*/2 \cdot \ln(1 - 2/N_*) = (1 - 2/\tau_*). \quad (19)$$

Решение (19) показано на рис. 6. Видно, что режим [2] сохраняется при сколь угодно большой величине скачка (интеграл $\int \varphi d\tau$, однако, остается ограниченным), если последний близок к температуре горения.

Действительно, при $\tau_* \rightarrow 1$ из (19) имеем

$$N_* \approx 1/2(1 - \tau_*), \quad u^2 = u_k^2 = 8\varphi_0(1 - \tau_*) = 2u_3^2.$$

При $N > N_*$ скорость пламени определяется уравнением, получающимся из (19) при подстановке $p_* = p_+(\tau_*)$:

$$\frac{up_+}{\alpha N \tau_*} + \ln \left(1 - \frac{up_+}{\alpha N \tau_*} \right) = \frac{u^2}{\alpha N} \frac{\tau_* - 1}{\tau_*}.$$

Вычисление производной в точке $N = N_*$ дает $\frac{du}{dN} \Big|_{N_*+\varepsilon} = \frac{du}{dN} \Big|_{N_*-\varepsilon} = 0$, т. е. переход в режим [2] осуществляется достаточно гладко (сохраняется непрерывность производной).

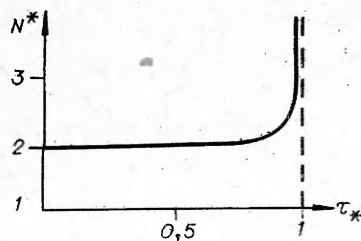


Рис. 6.

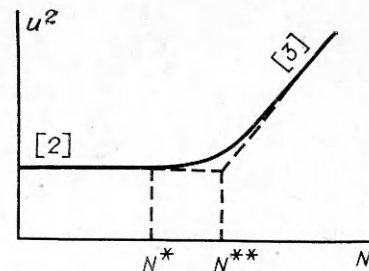


Рис. 7.

Вычислим предел отношения $u^2/\alpha N = y$ при возрастании N :

$$N \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty, p_+ \rightarrow u\tau_*, \quad (20)$$

$$\ln(1-y) + y\tau_*^{-1} = 0.$$

Уравнение (20) всегда имеет решения $y(\tau_*)$, определяющие асимптотику $u(N)$ при больших значениях аргумента:

$$u \approx \sqrt{\alpha N y(\tau_*)}, \quad 0 < y(\tau_*) < 1.$$

При больших значениях u интегральная кривая $p(\tau)$ на участке $0 < \tau < \tau_*$ принимает наклон $dp/d\epsilon = u$, т. е. значение p_* , а вместе с ним и u определяются приближением [3], исключающим медленную реакцию при низких температурах.

Характер зависимости $u^2(N)$ для фиксированного τ_* представлен на рис. 7. При $N < N_*$ имеет место режим [2] ($u = u_K$), планомерно сменяющийся режимом [3]. Условной границей режимов можно полагать $N_{**} = 4/y(\tau_*)$. Способ оценки N_{**} поясняет рис. 7.

В случае значений τ_* , близких к единице, имеем $N_{**} = 2(\tau_*)^{-1}(1 - \tau_*)^{-1} = 4N_*$, $u(N_{**}) \approx 1,25 u_3(N_{**})$. Выражение для u_3 принимает известный вид, справедливый при узкой зоне деакции,

$$\tau_* \rightarrow 1, \quad u_3^2 = 2\varphi_0(1 - \tau_*).$$

Результат рассмотрения можно суммировать заключением о том, что скорости распространения пламени близки к большему из значений u_K и u_3 . Это обстоятельство достаточно четко прослеживается и на рис. 2, 4, иллюстрирующих численные расчеты.

Авторы благодарят К. В. Прибыткову и Л. А. Жукову за помощь в численных расчетах.

Поступила в редакцию
15/XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. Распространение пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре. Препринт, Черноголовка, 1978.
2. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов. Бюл. МГУ, сек. А, 1937, 16.
3. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк-Каменецкий. ХФХ, 1938, 12, 100.
4. А. П. Алдушин, А. Г. Мержанов, Б. И. Хайкин. Докл. АН СССР, 1972, 204, 1139.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ВОЛНА ГОРЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. А. Левин, А. С. Лейбензон

(Москва)

В настоящей работе изучаются одномерные движения совершенного газа с учетом нелинейной теплопроводности и экзотермических реакций. Такие задачи представляют интерес в связи с проблемами распространения тепловых волн в высокотемпературной плазме, в которой могут протекать экзотермические реакции. Ранее вопросы иницирования и распространения волн горения в высокотемпературной плазме изучались в ряде работ [1 — 6].

1. В первой части работы изучаются автомодельные решения задачи о распространении сферической тепловой волны по горячей сме-