

simulation of confined flows.— In: Proceeding of the 6th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Vol. 1. Tbilisi, 1978.

5. Кускова Т. В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. М.: изд. МГУ, 1972, вып. 3.
6. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Pt 1.— J. Comput. Phys., 1966, vol. 1, N 1.

УДК 532.522 : 532.135

ДИНАМИКА ИЗГИБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТРУЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ, ДВИЖУЩИХСЯ В ВОЗДУХЕ

А. Л. Ярин

(Москва)

Причиной распада высокоскоростных ламинарных струй весьма вязких капельных жидкостей является нарастание изгибных (поперечных) возмущений, вызванное динамическим воздействием окружающего воздуха, давление которого на вогнутых участках поверхности струи больше, чем на выпуклых. Для струй ньютоновской жидкости подобный процесс исследован в работах [1, 2] с помощью квазидномерной асимптотической системы уравнений динамики струй капельной жидкости [1, 3], а также путем приближенного рассмотрения энергетического баланса [1]. В данной работе теория [1, 3] обобщается на случай струй нелинейно-вязких (степенных) жидкостей, вязкость которых зависит от скорости деформации.

1. Рассмотрим баланс энергии струи кругового сечения во встречном потоке воздуха, считая, что ее изгиб под действием поперечных возмущений плоский. Будем пренебрегать силами трения и лобового сопротивления, действующими на струю со стороны воздуха, что позволяет приближенно представить плоское изгибное возмущение оси струи одной гармоникой (даже на нелинейной стадии роста, пока амплитуда возмущения не слишком велика):

$$(1.1) \quad H = A(t) \sin(\chi s/a_0),$$

где χ — безразмерное волновое число ($\chi = 2\pi a_0/l$, l — длина волны возмущения); a_0 — начальный радиус струи; t — время; s — координата, отсчитываемая вдоль оси невозмущенной струи.

Работа L за время dt линейно распределенной аэродинамической «подъемной» силы q , приложенной к полуволне возмущенной струи, и кинетическая энергия E этого отрезка струи определяются соотношениями

$$(1.2) \quad L = \int_0^{\pi a_0/\chi} q_n H_{,t} ds dt, \quad E = \frac{\rho f}{2} \int_0^{\pi a_0/\chi} H_{,t}^2 \lambda ds, \quad \lambda = \sqrt{1 + H_{,s}^2}$$

(ρ — плотность жидкости).

Выражениями для проекции аэродинамической силы на нормаль к оси струи q_n и площади сечения струи f будут [1]

$$(1.3) \quad q_n = -\rho_1 U_0^2 f H_{,ss} (1 + H_{,s}^2)^{-5/2}, \quad f = \pi a^2 = \pi^2 a_0^3 \left[\chi \int_0^{\pi a_0/\chi} \lambda ds \right],$$

где ρ_1 — плотность воздуха; U_0 — скорость движения струи.

Растяжение струи при изгибе ведет к изменению поверхностной энергии $E_1 = \alpha \int_0^{\pi a_0/\chi} 2\pi a \lambda ds$ (α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости).

Учитывая следующее из несжимаемости равенство $\partial a^2 \lambda / \partial t = 0$, находим изменение поверхностной энергии струи за время dt в виде

$$(1.4) \quad dE_1 = \pi \alpha \int_0^{\pi a_0 / \lambda} \lambda_{,t} a ds dt.$$

В процессе роста изгибных возмущений струя подвергается в первом приближении одноосному растяжению. Скорость относительного удлинения параллельной оси струи жидкой линии $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ (y и z отсчитываются от центра сечения по нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} к оси струи; τ — касательная к оси), т. е. скорость деформации, в длинноволновом приближении равна

$$(1.5) \quad D_{\tau\tau} = \frac{[(z^{-1} - y) \omega]_{,t}}{(k^{-1} - y) \omega} = \lambda^{-1} \lambda_{,t} - ky \frac{\omega_{,t}}{\omega}.$$

Здесь k — кривизна оси струи; ω — угол между сечениями струи, соответствующими значениям продольной координаты s и $s + ds$:

$$(1.6) \quad \omega = -H_{,ss} / (1 + H_{,s}^2) ds,$$

и использовано очевидное равенство $k^{-1} \omega = \lambda ds$.

Из условия несжимаемости следует

$$(1.7) \quad D_{nn} = D_{bb} = -(1/2) D_{\tau\tau}.$$

Реологическим соотношением нелинейно-вязких жидкостей будет [4]

$$(1.8) \quad \sigma^* = -p g^* + 2K [2\text{Sp}(D^{*2})]^{(n-1)/2} D^*,$$

где σ^* и D^* — тензоры напряжений и скоростей деформаций; g^* — метрический тензор; p — давление; K и n — реологические параметры жидкости. Случаю ньютоновской жидкости отвечает $K = \mu$ (μ — коэффициент вязкости) и $n = 1$.

Используя (1.8), находим с учетом (1.7) выражения для напряжений, действующих в струе при ее одноосном растяжении в процессе изгиба

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{bb} = -(\alpha/a)(1 - ky), \\ \sigma_{\tau\tau} &= -(\alpha/a)(1 - ky) + 3^{(n+1)/2} K |D_{\tau\tau}|^n \text{sgn } D_{\tau\tau}. \end{aligned}$$

Последние выражения совместно с (1.1) и (1.5)–(1.7) позволяют вычислить в длинноволновом приближении работу L_1 внутренних сил в выделенном элементе струи за время dt

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \{L_1 = \int_0^{\pi a_0 / \lambda} \left[\int_D (\sigma_{\tau\tau} D_{\tau\tau} - \sigma_{nn} D_{\tau\tau} / 2 - \sigma_{bb} D_{\tau\tau} / 2) (1 - ky) dS \right] \lambda ds \} dt = \\ = 3^{\frac{n+1}{2}} K \frac{2a_0}{\lambda} \left(A' \frac{\chi^2}{a_0^2} \right)^{n+1} \int_{\Sigma} |y|^{n+1} F(\varepsilon, n) dS dt, \\ F(\varepsilon, n) = \int_0^{\pi/2} |\sin x + \varepsilon \cos^2 x|^{n+1} dx, \end{aligned}$$

где dS — элемент площади поперечного сечения струи D ; $\varepsilon = -A/y$.

Баланс энергии означает, что работа распределенной аэродинамической силы равна сумме приращений кинетической и поверхностной энергий струи и работы внутренних сил. Подчеркнем, что в балансе энергии реологические свойства жидкости определяют лишь величину работы внутренних сил.

Работа распределенной аэродинамической силы и приращения кинетической и поверхностной энергий струи легко вычисляются в длинноволновом приближении с помощью соотношений (1.1)–(1.4). В случае достаточно малых изгибных возмущений ($|\varepsilon| \sim A/a_0 \ll 1$) величина L_1

определяется в основном работой момента внутренних напряжений при повороте сечения струи, а работа продольной силы в сечении при удлинении оси струи дает лишь малую поправку. Соответственно получаем асимптотическое представление для $F(\varepsilon, n)$

$$(1.11) \quad F(\varepsilon, n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) + \varepsilon(n+1) \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) + \varepsilon^2 \frac{3\sqrt{\pi}}{16} (n+1) n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right).$$

Составляя баланс энергии, выполняем в (1.10) с учетом (1.11) интегрирование по сечению струи и приходим к уравнению для амплитуды изгибного возмущения $A(t)$

$$(1.12) \quad A'' + 4 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} \frac{K}{\rho \pi a_0^{n+1}} \chi^{2n+2} \left[\Gamma^2\left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{n+3}{2}\right) \right] \frac{1}{n+3} (A')^n + \frac{3}{2} 3^{\frac{n+1}{2}} \frac{K}{\rho \pi a_0^{n+3}} \chi^{2n+2} \left\{ \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right] \right\} n A^2 (A')^n + A \chi^2 \left(\frac{\alpha}{\rho a_0^3} - \frac{\rho_1 U_0^2}{\rho a_0^2} \right) = 0.$$

Здесь штрихом отмечены производные по t ; второй член слева описывает влияние момента напряжений в сечении струи на ее изгиб, а третий — влияние на изгиб продольной силы в сечении. При $n = 1$ и $K = \mu$ уравнение (1.12) переходит в уравнение для амплитуды поперечных возмущений струи ньютоновской жидкости, полученное в [1]:

$$(1.13) \quad A'' + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho a_0^2} \chi^4 A' + \frac{9}{4} \frac{\mu}{\rho a_0^4} \chi^4 A^2 A' + \left[A \chi^2 \left(\frac{\alpha}{\rho a_0^3} - \frac{\rho_1 U_0^2}{\rho a_0^2} \right) \right] = 0.$$

Аналогичным образом может быть построено уравнение для $A(t)$ в случае $a_0 \ll A \ll l$, т. е. $|\varepsilon| \gg 1$, когда L_1 определяется в основном работой продольной силы в сечении при удлинении струи в процессе изгиба, а поправка дается работой момента внутренних напряжений. При этом для вычисления работы внутренних сил приходится строить асимптотическое пред-

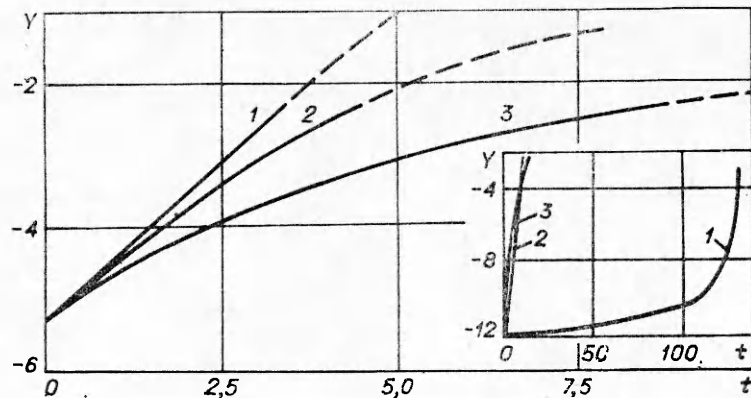
ставление интеграла $\Phi(\varepsilon, n) = \int_0^{\pi/2} \left| \cos^2 x + \frac{1}{\varepsilon} \sin x \right|^{n+1} dx$ (легко видеть, что оно будет содержать в себе 1, $1/\varepsilon$,

$$1/|\varepsilon|^{n+3/2}, 1/\varepsilon^2 \text{ при } 0 < n < 1/2; 1, 1/\varepsilon, (1/\varepsilon^2) \ln(1/|\varepsilon|),$$

$$1/\varepsilon^2 \text{ при } n = 1/2; 1, 1/\varepsilon, 1/\varepsilon^2 \text{ при } n > 1/2).$$

При численном интегрировании уравнения (1.12) выбраны следующие значения параметров: $K = 10 \text{ г/см} \cdot \text{с}^{2-n}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $a_0 = 10^{-1} \text{ см}$, $\rho_1 = 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $U_0 = 10^3 \text{ см/с}$. Поверхностное натяжение жидкости не учитывалось, что непринципиально. Безразмерное волновое число возмущения χ задавалось равным 0,667, что соответствует при выбранных значениях параметров длине волны наиболее быстро растущего малого поперечного воз-

мущения струи ньютоновской жидкости $\left(\chi = \chi_* = \left[\frac{8}{9} \frac{\rho a_0^2}{\mu^2} \left(\rho_1 U_0^2 - \frac{\alpha}{a_0} \right) \right]^{1/6}$, см. (1.13) и [1, 2]). Полученные результаты представлены в безразмерном виде сплошными линиями на фигуре. Амплитуда возмущения $H_{\max} = A$ отнесена к длине его волны $l = 0,943 \text{ см}$, а время — к $T = 0,0047 \text{ с}$ — характерному времени нарастания малых изгибных возмущений струи ньютоновской жидкости с выбранными величинами параметров $\left(T = \left(\frac{\rho \mu a_0^2}{\rho_1^2 U_0^4} \right)^{1/3}$, см. (1.13) и [1, 2]); $Y = \ln(H_{\max})$.



Расчет по уравнению (1.12) велся вплоть до значения амплитуды возмущения, равного радиусу струи, что при выбранных значениях параметров соответствует величине $Y = -2,24$. Исследованы случаи, когда при $t = 0$ начальные возмущения имеют в безразмерном виде амплитуды $A = A' = A_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ и $A_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ (результаты, отвечающие последнему значению A_0 , представлены на врезке в нижнем правом углу фигуры). Кривые 1 соответствуют $n = 0,5$; 2 — $n = 1$; 3 — $n = 1,5$, что охватывает случаи псевдопластической, ньютоновской и дилатантной жидкостей.

Амплитуда начального возмущения $A_0 = 5 \cdot 10^{-3}$, а следовательно, и начальная величина скорости деформации достаточна для того, чтобы в струе псевдопластической жидкости эффективная вязкость была не слишком велика в начальные моменты времени $\mu_1 = K (D_{\tau\tau})^{n-1} \simeq K \left(A' \frac{\gamma^2}{a_0} \right)^{n-1} = 4,74 \text{ П}$. Этому случаю соответствует быстрый сравнительно со струями ньютоновской ($\mu = 10 \text{ П}$) и дилатантной ($\mu_1 = 21,1 \text{ П}$) жидкостей рост изгибных возмущений.

Фактически уменьшение вязких эффектов при псевдопластическом поведении жидкости приближает нас к чисто инерционному решению уравнения

$$(1.12) \quad A \approx A_0 \exp(\gamma t), \quad \gamma = \kappa \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\rho_1 U_0^2 T^2}{\rho a_0^3}} = 0,99. \quad Y = -5,3 + 0,99t$$

(в безразмерном виде).

Рост показателя степени n в реологическом соотношении нелинейно-вязкой жидкости в случае $A_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ ведет к усилению вязких эффектов, стабилизирующих процесс. Так, для малых изгибных возмущений струи ньютоновской жидкости безразмерный инкремент нарастания равен в соответствии с (1.13) 0,69, чему в безразмерных координатах фигуры в случае $A_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ отвечает прямая $Y = -5,3 + 0,69t$. Конечные изгибные возмущения струи ньютоновской жидкости растут еще медленнее (кривая 2 на фигуре), что является следствием стабилизирующего влияния вязких напряжений, обусловленных удлинением оси струи при изгибе (третий член слева в (1.12)). В дилатантной жидкости этот нелинейный эффект усиливается за счет роста вязкости со скоростью деформации (кривая 3 на фигуре), что ведет к дальнейшему замедлению роста изгибных возмущений струи. Кроме того, с ростом n стабилизирующее влияние вязких напряжений, связанных с удлинением оси струи, проявляется раньше, при меньших амплитудах волн возмущений.

При очень малом начальном возмущении ($A_0 = 5 \cdot 10^{-6}$) скорости деформаций в начальные моменты времени настолько малы, а эффективная вязкость псевдопластической жидкости настолько велика ($\mu_1 = 150 \text{ П}$), что доминирующим оказывается второй член слева в (1.12) и рост изгибных возмущений резко замедляется (см. врезку на фигуре). В этом случае увеличение n ведет к ослаблению стабилизирующих вязких эффектов, что

иллюстрируется врезкой на фигуре (для ньютоновской жидкости $\mu = 10 \text{ П}$, для дилатантной — $\mu_1 = 0,669 \text{ П}$).

2. Расчет процесса роста длинноволновых изгибных возмущений струй нелинейно-вязких жидкостей для значений амплитуды $A > a_0$ может быть продолжен с использованием соответствующей асимптотики для случая $|\varepsilon| \gg 1$. Однако можно ожидать, что для достаточно больших возмущений нелинейные эффекты приведут к значительному искажению формы оси струи и представление ее в виде одной гармоники (1.1), используемое в энергетическом методе, будет давать существенную погрешность. Поэтому для расчетов в этом случае естественно воспользоваться системой асимптотических квазиодномерных уравнений динамики струй капельных жидкостей [1, 3], легко обобщаемой на случай нелинейно-вязких жидкостей. Необходимо лишь заменить выражения для величины продольной силы P и момента M напряжений в сечении струи, все остальные соотношения и уравнения остаются прежними.

Используя реологическое соотношение (1.8), формулы для компонентов тензора скоростей деформаций и оценки для напряжений в сечении струи [1, 3], находим линейные выражения для напряжений и вычисляем P и проекции M на нормаль, бинормаль и касательную к оси струи в общем случае неплоского изгиба

$$(2.1) \quad P = \left[3^{-\frac{n+1}{2}} K |\lambda^{-1} V_{\tau,s} - k V_n|^n \operatorname{sgn} (\lambda^{-1} V_{\tau,s} - k V_n) - \alpha G \right] f + P_\alpha,$$

$$P_\alpha = 2\pi a \alpha (1 + \lambda^{-2} a_{,s}^2)^{-1/2},$$

$$M_n = 3^{-\frac{n+1}{2}} K n |\lambda^{-1} V_{\tau,s} - k V_n|^{n-1} I (\lambda^{-1} \Omega_{n,s} + k \Omega_\tau - \kappa \Omega_b),$$

$$M_b = 3^{-\frac{n+1}{2}} K n |\lambda^{-1} V_{\tau,s} - k V_n|^{n-1} I \left(\lambda^{-1} \Omega_{b,s} + \kappa \Omega_n - \frac{3}{2} k \lambda^{-1} V_{\tau,s} + \frac{3}{2} k^2 V_n \right) -$$

$$- \alpha k I a^{-1} (1 + \lambda^{-2} a_{,s}^2)^{-3/2},$$

$$M_\tau = 3^{-\frac{n-1}{2}} K |\lambda^{-1} V_{\tau,s} - k V_n|^{n-1} I (2 \lambda^{-1} \Omega_{\tau,s} + k \lambda^{-1} V_{b,s} + k \kappa V_n - k \Omega_n),$$

где V и Ω — скорость центра жидкого сечения струи и угловая скорость вращения этого сечения; κ — кручение оси струи; G — удвоенная средняя кривизна поверхности струи; $I = \pi a^4/4$ — момент инерции сечения струи; λ — удлинение оси струи при неплоском изгибе.

Соотношения (2.1) получены в предположении о малости скорости поворота жидкого сечения по сравнению со скоростью деформации этого сечения, что отвечает либо достаточно большим амплитудам изгибных возмущений ($|\varepsilon| \gg 1$), либо отсутствию изгиба, как это имеет место при капиллярном распаде прямолинейных струй. В последнем случае $\Omega = 0$, $k = \kappa = 0$, $\lambda = 1$ и из (2.1) получаем выражение для продольной силы в сечении, использованное при расчетах на основе квазиодномерных уравнений капиллярного распада струй степенных жидкостей в работах [5, 6].

Отметим, что в рамках квазиодномерного подхода возможно также получить выражения для P и M , соответствующие случаю очень малых изгибных возмущений ($|\varepsilon| \ll 1$), исследованному здесь с помощью энергетического метода. Естественно, что эти выражения будут отличаться от (2.1), все остальные соотношения и уравнения квазиодномерной теории [1, 3] остаются справедливыми.

Вычислительный алгоритм в данном случае отличается от алгоритма, применявшегося при расчетах струй ньютоновской жидкости [1], лишь итерациями по нелинейности при прогонке.

Результаты численного решения квазиодномерных уравнений динамики струй капельных жидкостей, продолжающие кривые $I-3$ фигуры в область значений $Y > -2,24$ ($A > a_0$), показаны штриховыми линиями. Сшивка решений, представленных на фигуре сплошными и штриховыми

линиями, происходит гладко. Это указывает на то, что приближенный энергетический метод и квазиодномерные уравнения дают согласующиеся результаты.

Автор выражает признательность В. М. Ентову за внимание к работе.

Поступила 4 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Ярин А. Л. Динамика струй капальной жидкости. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1979, № 127.
2. Ентов В. М., Ярин А. Л. Поперечная устойчивость струи капальной жидкости во встречном потоке воздуха.— ИФЖ, 1980, т. 38, № 5.
3. Ентов В. М., Ярин А. Л. Уравнение динамики струи капальной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
4. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неьютоновских жидкостей.— М.: Мир, 1978.
5. Ентов В. М., Кордонский В. И. и др. Исследование распада струй реологически сложных жидкостей. Препринт Ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1980, № 2.
6. Ентов В. М., Кордонский В. И. и др. Исследование распада струй реологически сложных жидкостей.— ПМТФ, 1980, № 3.

УДК 532.5

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТОМ ИЗМЕНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Ю. В. Мартынов, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Исследовано течение слоя вязкой несжимаемой жидкости по вертикальной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, плотно состыкованных по горизонтальной прямой линии. Одна полуплоскость движется относительно другой вдоль линии стыка. Получено точное аналитическое решение для распределения скоростей в потоке. Решение может быть обобщено на случай, когда плоскость состоит из нескольких плотно состыкованных полос, движущихся относительно друг друга вдоль линий стыков с разными скоростями.

Без ограничения общности будем считать, что верхняя полуплоскость покоится, а нижняя — движется. Безразмерные уравнения движения, неразрывности и граничные условия имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right), \\
 & v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Fr}}, \\
 & v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \\
 (2) \quad & y = 0 \quad \begin{cases} x < 0 & v_x = v_y = v_z = 0, \\ x > 0 & v_x = v_y = 0, \quad v_z = 1; \end{cases} \\
 (3) \quad & y = h(x) \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) (1 - h_x^2) - 4h_x \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v_y}{\partial y} (1 - h_x^2) - \frac{1}{\text{Re}} h_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{\alpha h_{xx}}{1 - h_x^2} = p (1 + h_x^2), \\
 & v_y = h_x v_x, \quad \partial v_z / \partial y = 0; \\
 (4) \quad & x \rightarrow \pm \infty \quad v_z = \text{Re}(-y^2/2 + y)/\text{Fr}, \quad v_y \rightarrow 0, \quad v_x \rightarrow \delta,
 \end{aligned}$$