

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРХНЕЙ (НИЖНЕЙ) ГРАНИЦЫ УСРЕДНЕННЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ И АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ НА ВЕРХНИЕ (НИЖНИЕ) ГРАНИЧНЫЕ МОДУЛИ

Д.В. Перегудов

Геофизический центр РАН, 119296, Москва, ул. Молодежная, 3, Россия

Разработана общая процедура вычисления верхней (Фойгта) и нижней (Реусса) границы усредненного тензора Гука анизотропной среды по ориентациям кристаллографических осей, основанная на разложении его по неприводимым представлениям группы вращений. Показано, что усредненные по Фойгту (Реуссу) модули зависят не от всей функции распределения, с которой производится усреднение, а лишь от ее моментов второго и четвертого порядков, в широко используемом случае функции распределения, зависящей лишь от одного угла — всего от двух величин. Исследованы ограничения, которые накладывает теория вероятностей на значения моментов, откуда выведены общие ограничения на возможные значения границы Фойгта (Реусса) упругих модулей.

Сейсмическая анизотропия, микронеоднородные среды, усреднение, тензор Гука, граница Фойгта, функция распределения, неравенства для моментов.

UPPER AND LOWER BOUNDS OF AVERAGE ELASTIC CONSTANTS OF AN ANISOTROPIC POLYCRYSTALLINE MEDIUM: CALCULATIONS AND A PRIORI ESTIMATES

D.V. Peregudov

A general procedure is suggested for calculating the upper (Voigt) and lower (Reuss) bounds of the average elastic constants of an anisotropic medium from crystallographic directions. The elastic tensors of Hooke's law can be expanded into irreducible representations of the rotation group. The Voigt/Reuss-averaged elastic constants depend on the second and fourth moments of the distribution function rather than on the entire function used for the averaging. In this case, the distribution function depends on one angle, while the elastic constants depend on two variables. The limitations imposed by the probability theory on the moment values are investigated and used to derive general constraints on the Voigt (Reuss) bounds of elastic constants.

Seismic anisotropy, microheterogeneous media, averaging, Hooke's law, stiffness tensor, Voigt bound, distribution function, inequality for function moment

ВВЕДЕНИЕ

Специфика рассматриваемых в сейсмологии сред состоит в том, что они являются сложными микронеоднородными (в масштабе длин сейсмических волн) средами, причем об ориентации кристаллографических осей отдельных составляющих мы порой имеем лишь самые общие сведения, итоговая же, наблюдаемая на макроуровне анизотропия гораздо слабее анизотропии отдельных составляющих. Например, оливин — один из самых распространенных на Земле минералов и основа горных пород мантии — имеет довольно сильную анизотропию упругих свойств (скорости продольных волн по самой быстрой и самой медленной осям различаются на 25 %), однако анизотропия в мантии не превышает 5 %, в среднем же мантия и вовсе изотропна. Характерной чертой всех исследований, посвященных вычислению упругих модулей горных пород, является введение той или иной функции распределения ориентации кристаллографических осей и усреднение упругих модулей по этой функции распределения.

Задача усреднения упругих свойств микронеоднородной среды имеет более чем столетнюю историю и восходит к работам В. Фойгта [Voigt, 1889], предложившего усреднять непосредственно тензор Гука, и А. Реусса [Reuss, 1929], предложившего усреднять тензор податливости (обратный к тензору Гука). Впоследствии было показано, что усредненный по Фойгту тензор Гука представляет собой верхнюю, а усредненный по Реуссу — нижнюю границу среднего по объему тензора Гука. Первоначально предполагалось, что все ориентации кристаллографических осей равновероятны, а усредненная среда изотропна. Результаты такого подхода подытожены в монографии [Шермергор, 1977, глава 3]. Там же

упоминаются текстуры, когда имеется преимущественная ориентация кристаллографических осей. Нетривиальная функция распределения по ориентациям осей рассматривалась, в частности, в работах [Roe, 1965; Morris, 1969; Zuo et al., 1989; Sayers, 1994, 2005, 2013; Jacobsen, 2003]. Однако полноты и ясности рассмотрения авторам добиться так и не удалось: результаты были получены лишь для частных случаев и представлены в виде громоздких таблиц. На наш взгляд, так произошло потому, что во всех работах был выбран один и тот же малопригодный математический аппарат. Авторы пытались усреднять «в лоб» непосредственно компоненты трехмерных тензоров, преобразуя их при помощи матрицы трехмерных вращений, выражая компоненты последней через углы Эйлера и интегрируя многочисленными произведениями синусов и косинусов. Основная идея настоящей работы состоит в том, что нужно предвзято перейти от компонент трехмерных тензоров к некоторым их линейным комбинациям, что соответствует разложению тензора по неприводимым представлениям группы вращений, аналогично тому, как функция распределения в цитированных выше работах раскладывается по обобщенным шаровым функциям. Усреднение при этом становится тривиальным и может быть выполнено в самом общем виде для любых типов симметрии среды и функции распределения по ориентациям.

Один из первых результатов, который мы на этом пути получаем, состоит в том, что разные, совершенно не похожие друг на друга функции распределения могут оказаться эквивалентными, т. е. приводить к одним и тем же значениям усредненных упругих модулей. Точнее, оказывается, что границы упругих модулей зависят не от функции распределения самой по себе, а лишь от ее моментов второго и четвертого порядков, всего от 106 величин. Любые две функции распределения, имеющие одинаковый набор этих моментов, будут приводить к одинаковым значениям границ усредненных упругих модулей. Выражаясь математическим языком, все функции распределения разбиваются на классы эквивалентных функций, все такие классы можно перечислить, указав значения вторых и четвертых моментов функции распределения, а границы упругих модулей оказываются не функционалами функции распределения, а просто (линейными) функциями этих моментов. Некоторые из этих свойств были подмечены в предыдущих исследованиях, однако только разложение тензора Гука по неприводимым представлениям позволяет прояснить их происхождение.

Упрощения для дальнейшего анализа, вносимые указанным обстоятельством, трудно переоценить. Нужно еще учесть, что речь выше шла о самом общем случае, когда и результирующая среда, и ее отдельные составляющие имеют триклинную симметрию. В практической сейсмологии употребляются куда более симметричные среды. Основной моделью, в рамках которой интерпретируется макроскопическая анизотропия, является поперечно-изотропная среда. А отдельные микросоставляющие имеют либо также поперечно-изотропную симметрию, либо орторомбическую, поскольку основные геологические минералы имеют именно такое строение. Пугающее поначалу число 106 резко сокращается: для поперечно-изотропной среды, состоящей из поперечно-изотропных элементов, функция распределения характеризуется всего двумя числами, а для поперечно-изотропной среды из орторомбических элементов — пятью.

Нам хотелось бы особо подчеркнуть, что, хотя мы всюду дальше для определенности будем говорить об усреднении по Фойгту (т. е. о верхней границе упругих модулей), в действительности все наши рассуждения будут опираться лишь на трансформационные свойства тензора Гука при повороте осей координат и на его симметрию по индексам. В равной степени описанный подход годится для усреднения по Реуссу (т. е. для нижней границы упругих модулей). Более того, поскольку тензор податливости s_{ijkl} является обратным к тензору упругости c_{ijkl} , то любая симметрия последнего (например, поперечная изотропия) является таковой и для s_{ijkl} . Поэтому не только общие формулы, но и все приведенные ниже формулы для частных случаев остаются справедливыми, если в них заменить компоненты тензора c_{ijkl} на соответствующие компоненты тензора s_{ijkl} . Также все выводы работы остаются справедливыми для любого тензора, характеризующего любые, не обязательно упругие, свойства среды и имеющего те же свойства симметрии по индексам, что и тензор Гука. И конечно, сам подход очевидным образом может быть распространен на другие типы тензоров (например, тензор диэлектрической проницаемости), характеризующих анизотропные свойства среды.

Следует отметить, что, в зависимости от конкретного устройства микронеоднородной среды, границы Фойгта и Реусса могут быть как близки к усредненному по объему тензору Гука, так и достаточно далеки от него. Это можно проследить явно для тех случаев, когда усредненный по объему тензор Гука может быть рассчитан точно. Например, в работе [Schoenberg, Muir, 1989] выведены формулы для точного усредненного по объему тензора Гука среды из однородных плоскопараллельных слоев в предположении, что деформация в пределах каждого слоя постоянна, а нормальные к границам слоев напряжения и двумерная в плоскости слоев часть тензора деформации постоянны в пределах всей среды. Рассмотрим среду, состоящую из чередующихся слоев двух типов равной мощности. Пусть слои состоят из одного и того же поперечно-изотропного материала с тензором Гука, равным

$$c = \begin{pmatrix} 50.0000 & 34.0000 & 19.3666 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 50.0000 & 19.3666 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 25.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{SYM} & \cdot & 4.0000 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4.0000 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8.0000 \end{pmatrix},$$

только в первом слое ось симметрии совпадает с нормалью к границам слоев, а во втором кристаллографические оси развернуты при помощи ортогональной матрицы

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0.3330 & 0.5768 & -0.7459 \\ -0.7381 & 0.6518 & 0.1745 \\ 0.5868 & 0.4924 & 0.6428 \end{pmatrix}.$$

Тогда усредненный по Фойгту тензор Гука соответствует среде орторомбической симметрии и равен

$$c^a = \begin{pmatrix} 43.4076 & 30.5525 & 22.5825 & -1.2113 & -2.9524 & -2.2617 \\ \cdot & 45.1080 & 22.9014 & -2.8042 & -1.8331 & -2.5601 \\ \cdot & \cdot & 29.8784 & -2.2567 & -2.6894 & -0.9044 \\ \cdot & \text{SYM} & \cdot & 5.7039 & 0.6319 & 0.1724 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5.9267 & 0.4715 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7.6724 \end{pmatrix},$$

тогда как точный усредненный по объему тензор Гука соответствует среде моноклинной симметрии и равен

$$c^e = \begin{pmatrix} 41.7069 & 29.1243 & 20.7635 & -0.5581 & -1.8317 & -1.9712 \\ \cdot & 43.2189 & 20.9677 & -1.7618 & -0.9331 & -2.3162 \\ \cdot & \cdot & 27.6542 & -1.2496 & -1.4892 & -0.5790 \\ \cdot & \text{SYM} & \cdot & 5.0915 & 0.2194 & 0.0543 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5.1689 & 0.2704 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7.6173 \end{pmatrix}.$$

Количественное различие этих тензоров можно охарактеризовать отношением нормы разности $c^a - c^e$ к норме самого c^e , а за квадрат нормы естественно принять свертку тензора самого c с собой по всем индексам, $\|c^2\| = c_{ijkl}c_{ijkl}$. Тогда $\|c^a - c^e\| / \|c^e\| = 0.0$.

Матрица u_1 соответствует повороту оси симметрии поперечно-изотропной среды на 50° . Если же взять вместо нее матрицу поворота на 10° вокруг оси x .

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9848 & -0.1736 \\ 0 & -0.1736 & 0.9848 \end{pmatrix},$$

то усредненный по Фойгту тензор Гука будет равен

$$c^a = \begin{pmatrix} 50.0000 & 33.7794 & 19.5872 & 1.2512 & 0 & 0 \\ \cdot & 49.3267 & 19.6629 & 1.8830 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 25.0806 & 0.2546 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{SYM} & \cdot & 4.2963 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4.0603 & 0.3420 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7.9397 \end{pmatrix},$$

тогда как точный усредненный по объему тензор Гука равен

$$c^e = \begin{pmatrix} 49.6347 & 33.2299 & 19.5127 & 1.1635 & 0 & 0 \\ \cdot & 48.5001 & 19.5509 & 1.7514 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 25.0653 & 0.2364 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{SYM} & \cdot & 4.2737 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4.0594 & 0.3369 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7.9109 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\|c^a - c^e\| / \|c^e\| = 0.013$.

Второй результат настоящей работы возникает из естественного желания проанализировать в общем случае зависимость усредненных по Фойгту модулей от функции распределения по ориентации осей, коль скоро эта зависимость сводится к линейной функции небольшого числа параметров. При этом о самой функции распределения не делается никаких предположений, кроме того, что она существует. Оказывается, что уже этого вкпе с весьма общими предположениями о типах симметрии исходных монокристаллов и усредненной поликристаллической среды достаточно для получения интересных выводов. Например, в случае, когда и исходные монокристаллы, и результирующий поликристалл являются поперечно-изотропными средами, усредненные по Фойгту модули упругости являются линейными функциями двух параметров. Сами же эти параметры, являясь вторым и четвертым моментами функции распределения (дисперсией и эксцессом), подчиняются известным из теории вероятности неравенствам, определяющим область допустимых значений этих параметров. Уже отсюда ясно, что значения верхней и нижней границ пяти упругих модулей усредненной поперечно-изотропной среды сильно коррелированы между собой, а их значения заключены в некоторых, достаточно жестких рамках. Подобные ограничения позволяют судить о том, насколько границы наблюдаемой анизотропии могут либо не могут быть объяснены тем или иным предполагаемым устройством среды.

Математические задачи, возникающие в процессе нашего рассмотрения, можно разделить на два типа. Во-первых, это задачи теории представлений групп, конкретно — группы вращений трехмерного евклидова пространства. Здесь нам понадобятся понятия неприводимого тензора, углового момента в квантовой механике, спинора, разложения на неприводимые представления, обобщенных шаровых функций. Во-вторых, это задачи теории вероятности так называемая ограниченная задача моментов: может ли существовать функция распределения с заданными значениями нескольких низших моментов и, если может, то как она выглядит (точнее — как выглядит простейший представитель класса таких функций). В одномерном случае эти задачи были решены еще в XIX веке П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым [Крейн, Нудельман, 1973]. Их результаты можно непосредственно применить к анализу поперечно-изотропной среды, составленной из поперечно-изотропных монокристаллов, что и сделано в настоящей работе. Однако для поперечно-изотропной среды из орторомбических составляющих необходимо было решить задачу моментов в двумерном случае, что, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес и может иметь независимые приложения, и чему мы планируем посвящать отдельную публикацию.

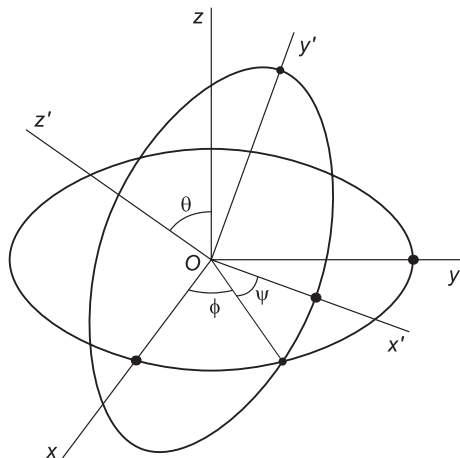


Рис. 1. Углы Эйлера.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется микронеоднородная среда, тип симметрии и упругие модули которой фиксированы, т. е. задан тензор Гука c_{ijkl} в кристаллографических осях, а направления кристаллографических осей распределены с некоторой функцией распределения $f(\psi, \theta, \phi)$, где ψ, θ, ϕ — углы Эйлера поворота кристаллографических осей относительно лабораторных (рис. 1).

В предлагаемой работе решаются две задачи.

1. Определение усредненного по Фойгту тензора Гука в лабораторных осях, т. е. вычисление среднего

$$c_{ijkl}^a = c_{pqrs} \int u_{ip} u_{jq} u_{kr} u_{ls} f du, \quad (1)$$

где u_{ik} — ортогональные матрицы трехмерных вращений, а интегрирование по группе вращений производится следующим образом:

$$\int f du = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\psi, \theta, \phi). \quad (2)$$

2. Определение корреляции и граничных значений усредненного по Фойгту тензора Гука. Под корреляцией мы здесь понимаем линейную зависимость компонент c^a в случае, когда функция распределения характеризуется меньшим числом моментов, чем число компонент тензора Гука. Эта задача в настоящей работе решается для поперечно-изотропной среды, состоящей из поперечно-изотропных монокристаллов.

ПОДХОД С РАЗЛОЖЕНИЕМ НА НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Первая задача, по сути дела, теоретико-групповая и может быть решена с помощью разложения входящих в нее величин по неприводимым представлениям группы вращений. Тензор Гука c_{ijkl} реализует некоторое представление группы вращений. Это представление не является неприводимым, так как неприводимыми являются полностью симметричные тензоры, дающие нуль при свертке по любым двум индексам, а тензор Гука имеет свойства симметрии

$$c_{ijlk} = c_{klij} = c_{jikl} = c_{ijlk} \quad (3)$$

(симметричен по перестановке пар индексов и индексов в каждой паре) и допускает образование двух ненулевых свертков

$$a_{ij} = c_{ijkk}, \quad b_{ik} = c_{ijkj}, \quad (4)$$

известных как тензор упругости всестороннего сжатия и тензор упругости Фойгта [Helbig, 1994]. Эти тензоры, в свою очередь, являются симметричными тензорами и могут быть разложены на единичный тензор и бесследовую часть

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} a, \quad b_{ij} = \bar{b}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} b, \quad (5)$$

где

$$a = a_{ii}, \quad b = b_{ii}. \quad (6)$$

Таким образом, для построения неприводимого тензора \bar{c}_{ijkl} (который уже будет симметричен по всем индексам и давать нуль при свертке), нужно к тензору Гука прибавить комбинацию из тензоров \bar{a}_{ij} , \bar{b}_{ij} и единичного тензора. Эта комбинация, очевидно, должна удовлетворять тем же свойствам симметрии, что и тензор Гука. Всего можно построить восемь подобных комбинаций, а потому

$$\begin{aligned} c_{ijkl} = & \bar{c}_{ijkl} + \alpha (\bar{a}_{ij} \delta_{kl} + \bar{a}_{kl} \delta_{ij}) + \beta (\bar{a}_{ik} \delta_{jl} + \bar{a}_{jl} \delta_{ik} + \bar{a}_{il} \delta_{jk} + \bar{a}_{jk} \delta_{il}) + \\ & + \gamma a \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta a (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \varepsilon (\bar{b}_{ij} \delta_{kl} + \bar{b}_{kl} \delta_{ij}) + \\ & + \zeta (\bar{b}_{ik} \delta_{jl} + \bar{b}_{jl} \delta_{ik} + \bar{b}_{il} \delta_{jk} + \bar{b}_{jk} \delta_{il}) + \eta b \delta_{ij} \delta_{kl} + \xi b (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты определяются из условий, что свертка левой части по kl и jl дает тензоры a_{ij} и b_{ik} соответственно

$$\begin{aligned} \alpha = 5/7, \quad \beta = -2/7, \quad \gamma = 2/15, \quad \delta = -1/30, \\ \varepsilon = -4/7, \quad \zeta = 3/7, \quad \eta = -1/15, \quad \xi = 1/10. \end{aligned} \quad (8)$$

Тензор Гука, как известно, в общем случае имеет 21 независимую компоненту. Теперь он может быть восстановлен по неприводимым тензорам: \bar{c}_{ijkl} (9 независимых компонент), \bar{a}_{ij} и \bar{b}_{ij} (по 5 компонент), скалярам a и b (еще по 1 компоненте, итого $9 + 5 + 5 + 1 + 1 = 21$ компонента).

Дальнейшее преобразование связано с переходом от тензорной записи $t_{i_1 \dots i_l}$ к нотации «момента импульса» $t_m^{(l)}$, где $m = -l, \dots, l$ нумерует независимые компоненты (всего $2l + 1$ компонента для l -индексного неприводимого тензора). Для этого сначала переходим к спинорному представлению, т. е. сопоставляем неприводимому тензору $t_{i_1 \dots i_l}$ неприводимый спинор $t_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_l \nu_l}$ (также симметричный по всем индексам и дающий нуль при свертывании, только индексы теперь пробегают значения 1 и 2, см. [Ландау, Лифшиц, 1989, параграф 57]).

$$t_{\mu_1\nu_1\dots\mu_l\nu_l} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^l (g\sigma_i)_{\mu_1\nu_1} \dots (g\sigma_i)_{\mu_l\nu_l} t_{i\dots i}. \quad (9)$$

В эту формулу входят метрика g в спинорном представлении и матрицы Паули

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Обращение формулы (9) дает

$$t_{i\dots i} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^l (\sigma_i g)^{\mu_1\nu_1} \dots (\sigma_i g)^{\mu_l\nu_l} t_{\mu_1\nu_1\dots\mu_l\nu_l}. \quad (11)$$

Теперь спинорному представлению сопоставляется нотация «момента импульса»

$$t_m^{(l)} = \sqrt{\frac{(2l)!}{(l+m)!(l-m)!}} t_{\overset{l}{l+m} \dots \overset{l}{l-m}}. \quad (12)$$

После осуществления всех преобразований тензор Гука оказывается представлен величинами $\bar{c}_m^{(4)}$, $\bar{a}_m^{(2)}$, $\bar{b}_m^{(2)}$, a и b . Явные выражения (в правой части используется двухиндексная нотация, $c_{ijkl} \rightarrow c_{(i,j)(k,l)}$, где $(i,i) = i$, $(1,2) = 6$, $(2,3) = 4$, $(3,1) = 5$),

$$\begin{aligned} \bar{c}_0^{(4)} &= \frac{1}{2\sqrt{70}} (3c_{11} + 3c_{22} + 8c_{33} + 2c_{12} - 8c_{13} - 8c_{23} - 16c_{44} - 16c_{55} + 4c_{66}), \\ \bar{c}_{\pm 1}^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{14}} (\pm (3c_{15} + c_{25} - 4c_{35} + 2c_{46}) + i(c_{14} + 3c_{24} - 4c_{34} + 2c_{56})), \\ \bar{c}_{\pm 2}^{(4)} &= \frac{1}{2\sqrt{7}} (-c_{11} + c_{22} + 2c_{13} - 2c_{23} - 4c_{44} + 4c_{55} \mp 2i(c_{16} + c_{26} - 2c_{36} - 4c_{45})), \\ \bar{c}_{\pm 3}^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp (c_{15} - c_{25} - 2c_{46}) - i(c_{14} - c_{24} + 2c_{56})), \\ \bar{c}_{\pm 4}^{(4)} &= \frac{1}{4} (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66}) \pm i(c_{16} - c_{26}), \\ \bar{a}_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (c_{11} + c_{22} - 2c_{33} + 2c_{12} - c_{13} - c_{23}), \\ \bar{a}_{\pm 1}^{(2)} &= \pm (c_{15} + c_{25} + c_{35}) + i(c_{14} + c_{24} + c_{34}), \\ \bar{a}_{\pm 2}^{(2)} &= -\frac{1}{2} (c_{11} - c_{22} + c_{13} - c_{23}) \mp i(c_{16} + c_{26} + c_{36}), \\ \bar{b}_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (c_{11} + c_{22} - 2c_{33} - c_{44} - c_{55} + 2c_{66}), \\ \bar{b}_{\pm 1}^{(2)} &= \pm (c_{15} + c_{35} + c_{46}) + i(c_{24} + c_{34} + c_{56}), \\ \bar{b}_{\pm 2}^{(2)} &= -\frac{1}{2} (c_{11} - c_{22} - c_{44} + c_{55}) \mp i(c_{16} + c_{26} + c_{45}), \\ a &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23}, \\ b &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{44} + 2c_{55} + 2c_{66}. \end{aligned} \quad (13)$$

Мы будем символически писать $c = (\bar{c}_m^{(4)}, \bar{a}_m^{(2)}, \bar{b}_m^{(2)}, a, b)$, имея в виду, что набор величин

$\bar{c}_m^{(4)}, \bar{a}_m^{(2)}, \bar{b}_m^{(2)}, a, b$ эквивалентен тензору Гука c_{ijkl} .

Смысл перехода к новой нотации не только в том, что теперь независимые компоненты выделены явно. Более важно, как они преобразуются при поворотах системы координат. Если исходные компоненты тензора Гука преобразовывались по закону

$$c'_{ijkl} = u_{ip}u_{jq}u_{kr}u_{ls}c_{pqrs}, \quad (14)$$

где ортогональные 3×3 матрицы поворота u выражаются известным образом через углы Эйлера ϕ, θ, ψ , то новые компоненты $t_m^{(l)}$ преобразуются по закону (см. [Виленкин, 1991], глава III).

$$t_m^{(l)'} = D_{mn}^{(l)}(\psi, \theta, \phi)t_n^{(l)}, \quad (15)$$

где D — обобщенные шаровые функции

$$D_{mn}^{(l)}(\psi, \theta, \phi) = e^{-i(m\psi+n\phi)}P_{mn}^l(\cos\theta), \quad (16)$$

а $P_{mn}^l(z)$ — функции Лежандра (в частном случае $m = 0, n = 0$ — полиномы Лежандра, при $m = 0, n \neq 0$ — присоединенные функции Лежандра).

D -функции обладают двумя важными свойствами. Во-первых, матрица $D_{mn}^{(l)}$ при фиксированном l является унитарной,

$$D_{mn}^{(l)}(u)D_{mk}^{(l)}(u) = \delta_{nk}, \quad (17)$$

а потому обратное к (15) преобразование (выражающее тензор в неподвижных лабораторных осях через тензор в повернутых кристаллографических) имеет вид

$$t_m^{(l)} = D_{nm}^{(l)}(\psi, \theta, \phi)t_n^{(l)'}. \quad (18)$$

Во-вторых, D -функции образуют полную ортогональную систему функций на группе вращений

$$\int D_{mn}^{(l)}(u)D_{m'n'}^{(l')}(u)du = \frac{1}{2l+1}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{nn'}. \quad (19)$$

Для усреднения по Фойгту остается только разложить функцию распределения f по D -функциям

$$f(\psi, \theta, \phi) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m,n=-l}^l (2l+1)f_{nm}^{(l)}D_{nm}^{(l)}(\psi, \theta, \phi) \quad (20)$$

(первый член разложения равен единице в силу условия нормировки функции распределения f), где

$$f_{nm}^{(l)} = \int D_{nm}^{(l)}(u)f(u)du, \quad (21)$$

и воспользоваться ортогональностью D -функций. Мы получим, что

$$c = \left(\bar{c}_m^{(4)}, \bar{a}_m^{(2)}, \bar{b}_m^{(2)}, a, b \right) \quad (22)$$

при усреднении переходит в

$$c^a = \left(f_{mn}^{(4)}\bar{c}_n^{(4)}, f_{mn}^{(2)}\bar{a}_n^{(2)}, f_{mn}^{(2)}\bar{b}_n^{(2)}, a, b \right). \quad (23)$$

Для практического вычисления упругих модулей усредненной среды нужно: а) перейти от кристаллографических компонент к новой нотации по формулам (13), б) усреднить по формулам (23), в) пересчитать обратно в кристаллографические компоненты по формулам (13).

Таким образом, компоненты усредненного тензора Гука зависят только от 81 величины $f_{mn}^{(4)}$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ и 25 величин $f_{mn}^{(2)}$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2$, всего от $81 + 25 = 106$ величин, прочие же характеристики функции распределения для усреднения несут незначительный вклад.

Следует отметить, что разложения функции распределения по полному ортогональному набору функций использовались и ранее, однако, насколько нам известно, аналогичное разложение тензора Гука предлагается впервые.

**УПРОЩЕНИЯ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ, ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОЙ
И ОРТОРОМБИЧЕСКОЙ СРЕД**

В частных случаях орторомбической, поперечно-изотропной и изотропной сред формулы (13) упрощаются. Для орторомбической пропадают нечетные компоненты, а четные становятся вещественными

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_0^{(4)} &= \frac{1}{2\sqrt{70}}(3c_{11} + 3c_{22} + 8c_{33} + 2c_{12} - 8c_{13} - 8c_{23} - 16c_{44} - 16c_{55} + 4c_{66}), \\
 \bar{c}_{\pm 1}^{(4)} &= 0, \quad \bar{c}_{\pm 2}^{(4)} = \frac{1}{2\sqrt{7}}(-c_{11} + c_{22} + 2c_{13} - 2c_{23} - 4c_{44} + 4c_{55}), \\
 \bar{c}_{\pm 3}^{(4)} &= 0, \quad \bar{c}_{\pm 4}^{(4)} = \frac{1}{4}(c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66}), \\
 \bar{a}_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(c_{11} + c_{22} - 2c_{33} + 2c_{12} - c_{13} - c_{23}), \\
 \bar{a}_{\pm 1}^{(2)} &= 0, \quad \bar{a}_{\pm 2}^{(2)} = -\frac{1}{2}(c_{11} - c_{22} + c_{13} - c_{23}), \\
 \bar{b}_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(c_{11} + c_{22} - 2c_{33} - c_{44} - c_{55} + 2c_{66}), \\
 \bar{b}_{\pm 1}^{(2)} &= 0, \quad \bar{b}_{\pm 2}^{(2)} = -\frac{1}{2}(c_{11} - c_{22} - c_{44} + c_{55}), \\
 a &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23}, \\
 b &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{44} + 2c_{55} + 2c_{66}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Для поперечно-изотропной остаются только компоненты с $m = 0$ — они единственные не меняются при поворотах вокруг оси z

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_0^{(4)} &= \frac{4}{\sqrt{70}}(c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44}), \\
 \bar{a}_0^{(2)} &= \frac{2}{\sqrt{6}}(c_{11} - c_{33} + c_{12} - c_{13}), \quad \bar{b}_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3c_{11} - 2c_{33} - c_{12} - 2c_{44}), \\
 a &= 2c_{11} + c_{33} + 2c_{12} + 4c_{13}, \quad b = 3c_{11} + c_{33} - c_{12} + 4c_{44}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Для изотропной остаются только скалярные компоненты

$$a = 3c_{11} + 6c_{12}, \quad b = 6c_{11} - 3c_{12}. \tag{26}$$

Обратные формулы для изотропной и поперечно-изотропной сред имеют вид

$$\begin{aligned}
 \lambda = c_{12} &= \frac{2}{15}a - \frac{1}{15}b, \\
 \mu &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = -\frac{1}{30}a + \frac{1}{10}b, \\
 \lambda + 2\mu &= c_{11} = \frac{1}{15}a + \frac{2}{15}b
 \end{aligned} \tag{27}$$

и

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{1}{15}a + \frac{2}{15}b + \frac{\sqrt{6}}{21}(\bar{a}_0^{(2)} + 2\bar{b}_0^{(2)}) + \frac{3}{2\sqrt{70}}\bar{c}_0^{(4)}, \\
 c_{33} &= \frac{1}{15}a + \frac{2}{15}b - \frac{2\sqrt{6}}{21}(\bar{a}_0^{(2)} + 2\bar{b}_0^{(2)}) + \frac{4}{\sqrt{70}}\bar{c}_0^{(4)},
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= \frac{2}{15}a - \frac{1}{15}b + \frac{\sqrt{6}}{21} \left(5\bar{a}_0^{(2)} - 4\bar{b}_0^{(2)} \right) + \frac{1}{2\sqrt{70}} \bar{c}_0^{(4)}, \\
c_{13} &= \frac{2}{15}a - \frac{1}{15}b - \frac{\sqrt{6}}{42} \left(5\bar{a}_0^{(2)} - 4\bar{b}_0^{(2)} \right) - \frac{2}{\sqrt{70}} \bar{c}_0^{(4)}, \\
c_{44} &= -\frac{1}{30}a + \frac{1}{10}b + \frac{\sqrt{6}}{42} \left(2\bar{a}_0^{(2)} - 3\bar{b}_0^{(2)} \right) - \frac{2}{\sqrt{70}} \bar{c}_0^{(4)}.
\end{aligned}$$

Мы будем рассматривать простейшие варианты усреднения по Фойгту, когда усредненная среда является изотропной или поперечно-изотропной. Если функция распределения вовсе не зависит от углов, то отличной от нуля оказывается только компонента $f_{00}^{(0)} = 1$. В усредненном по Фойгту тензоре Гука выживают только параметры a и b , среда оказывается изотропной. Для модулей упругости усредненной по Фойгту среды получаются формулы, совпадающие с формулами (1.3)—(1.6) из главы 3 монографии [Шермергор, 1977].

Если функция распределения не зависит от угла ϕ , то отличными от нуля оказываются только компоненты $f_{0n}^{(l)}$ и, как следствие, только компоненты с $m = 0$ усредненного тензора Гука. Тензор не меняется при вращении вокруг оси z , усредненная по Фойгту среда в этом случае оказывается поперечно-изотропной.

Если исходная среда поперечно-изотропна, то наиболее общая функция распределения, очевидно, зависит лишь от угла θ . В этом случае тензор Гука усредненной по Фойгту среды зависит всего от двух коэффициентов $f_{00}^{(2)}$ и $f_{00}^{(4)}$. В дальнейшем для упрощения обозначений будем называть их просто f_2 и f_4 . Разумеется, функцию распределения, зависящую лишь от угла θ , можно рассматривать в случае произвольной исходной среды, вывод о зависимости тензора Гука усредненной по Фойгту среды всего от двух параметров полностью сохраняется.

Если исходная среда орторомбическая, то важна зависимость функции распределения и от θ , и от ψ . Параметры усредненной по Фойгту среды, в силу вещественности и равенства компонент тензора Гука $\bar{c}_m^{(4)} = \bar{c}_{-m}^{(4)}$, $\bar{a}_m^{(2)} = \bar{a}_{-m}^{(2)}$, $\bar{b}_m^{(2)} = \bar{b}_{-m}^{(2)}$ орторомбической среды, зависят от пяти параметров $f_{00}^{(4)}$, $f_{02}^{(4)} + f_{0,-2}^{(4)}$, $f_{04}^{(4)} + f_{0,-4}^{(4)}$, $f_{00}^{(2)}$, $f_{02}^{(2)} + f_{0,-2}^{(2)}$.

Общие формулы усреднения (23) в этих частных случаях упрощаются. Для усреднения по Фойгту поперечно-изотропной среды

$$\left(\bar{c}^a \right)_0^{(4)} = f_4 \bar{c}_0^{(4)}, \quad \left(\bar{a}^a \right)_0^{(2)} = f_2 \bar{a}_0^{(2)}, \quad \left(\bar{b}^a \right)_0^{(2)} = f_2 \bar{b}_0^{(2)}. \quad (29)$$

для усреднения орторомбической

$$\begin{aligned}
\left(\bar{c}^a \right)_0^{(4)} &= f_{00}^{(4)} \bar{c}_0^{(4)} + \left(f_{02}^{(4)} + f_{0,-2}^{(4)} \right) \bar{c}_2^{(4)} + \left(f_{04}^{(4)} + f_{0,-4}^{(4)} \right) \bar{c}_4^{(4)}, \\
\left(\bar{a}^a \right)_0^{(2)} &= f_{00}^{(2)} \bar{a}_0^{(2)} + \left(f_{02}^{(2)} + f_{0,-2}^{(2)} \right) \bar{a}_2^{(2)}, \\
\left(\bar{b}^a \right)_0^{(2)} &= f_{00}^{(2)} \bar{b}_0^{(2)} + \left(f_{02}^{(2)} + f_{0,-2}^{(2)} \right) \bar{b}_2^{(2)}.
\end{aligned} \quad (30)$$

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ УСРЕДНЕННЫХ ПО ФОЙГТУ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ

Поскольку о функции распределения вероятностей различных ориентаций кристаллических осей известно мало, представляют интерес априорные оценки на усредненные по Фойгту упругие модули. Эти оценки не используют конкретного вида функции распределения, а только тот факт, что подобная функция распределения существует.

В настоящей работе мы ограничимся случаем функции распределения, зависящей только от угла θ . В этом случае функция распределения сводится к

$$f(\theta) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) f_{00}^{(l)} P_l(\cos\theta), \quad (31)$$

где $P_l(x)$ — многочлены Лежандра, а усреднение по группе — к

$$\int g \, du = \frac{1}{2} \int_0^\pi g(\theta) \sin\theta \, d\theta. \quad (32)$$

Второй и четвертый многочлены Лежандра имеют вид

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad (33)$$

делая замену $\cos\theta = x$, получаем функцию распределения и усреднение

$$f(x) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) f_{00}^{(l)} P_l(x), \quad \int g \, du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x) \, dx. \quad (34)$$

Интересующие нас коэффициенты $f_{2,4}$ выражаются через второй и четвертый моменты функции распределения

$$f_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_2(x) \, dx = \frac{1}{2} (3\overline{x^2} - 1), \quad (35)$$

$$f_4 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_4(x) \, dx = \frac{1}{8} (35\overline{x^4} - 30\overline{x^2} + 3).$$

Поэтому задача определения допустимых значений параметров f_2 и f_4 представляет собой усеченную проблему моментов: пусть даны M_2 и M_4 , существует ли функция распределения на отрезке $-1 < x < 1$, для которой эти величины являются вторым и четвертым моментами?

Если такая функция распределения существует, то выполняются очевидные неравенства

$$M_2^2 < M_4 < M_2 < 1. \quad (36)$$

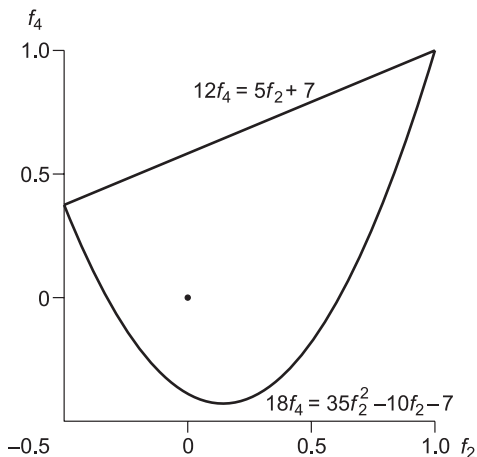
Оказывается, верно и обратное: если эти неравенства выполняются, то функция распределения существует. Проще всего в качестве доказательства привести такую функцию [Крейн, Нудельман, 1973]

$$\frac{1}{2} f(x) = \left(1 - \frac{M_2^2}{M_4}\right) \delta(x) + \frac{M_2^2}{M_4} \delta\left(x - \sqrt{\frac{M_4}{M_2}}\right). \quad (37)$$

Еще раз подчеркнем: мы не утверждаем, что функция распределения (37) является единственно возможной, наоборот, это всего лишь простейший представитель класса эквивалентных функций.

На языке параметров $f_{2,4}$ указанные неравенства (36) принимают вид

$$12f_4 < 5f_2 + 7, \quad 18f_4 > 35f_2^2 - 10f_2 - 7 \quad (38)$$



и имеют простой геометрический смысл: на плоскости (f_2, f_4) область допустимых значений снизу ограничена параболой, а сверху — прямой (рис. 2). Каждой точке этого параболического сегмента соответствует какая-то из возможных функции распределения (точнее, целый класс эквивалентных функций).

Лежащие на параболе функции распределения соответствуют равенству $M_2^2 = M_4$ и могут быть названы «бездисперсионными», поскольку выражаются через одну дельта-функцию

Рис. 2. Допустимая область изменения параметров (f_2, f_4) .

Точкой показано распределение $(0, 0)$, эквивалентное изотропному.

Рис. 3. Любая функция распределения эквивалентна сумме двух дельта-функций.

$$\frac{1}{2} f(x) = \delta(x - \sqrt{M_2}). \quad (39)$$

Отметим, что функции распределения такого вида предлагались ранее, в частности, в книге [Чесноков, 1977, формула (2.32) и далее], однако не было понимания их роли как границы возможных распределений, а также не было понимания, что, добавив еще одну дельта-функцию, можно получить все возможные функции распределения (точнее, представителей во всех классах эквивалентных функций).

Лежащие на прямой функции распределения соответствуют равенству $M_2 = M_4$ и являются «максимально дисперсионными», поскольку выражаются через максимально отстоящие дельта-функции

$$\frac{1}{2} f(x) = (1 - M_2)\delta(x) + M_2\delta(x - 1). \quad (40)$$

Изотропному распределению (точка на рис. 2) соответствует

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{4}{9}\delta(x) + \frac{5}{9}\delta(x - \sqrt{3/5}). \quad (41)$$

Несмотря на то, что эта функция совсем не похожа на $f(x) = 1$, которую обычно ассоциируют с изотропным распределением, она ей эквивалентна, так как приводит к тем же значениям усредненных по Фойгту модулей упругости (рис. 3).

Зная допустимую область изменения параметров $f_{2,4}$, можно получить априорные границы, в которых лежат компоненты тензора Гука усредненной по Фойгту среды.

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ УСРЕДНЕННЫХ ПО ФОЙГТУ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ СМЕСИ ОЛИВИНА С ИЗОТРОПНЫМ МАТЕРИАЛОМ

В качестве иллюстрации приведенных выше формул рассмотрим различные возможные варианты усреднения по Фойгту для рассмотренной в работе [Vinnik et al., 2014] среды, состоящей из смеси оливина с некоторым изотропным материалом. В работе [Vinnik et al., 2014] полагалось, что плотность (г/см^3) и компоненты тензора Гука (10^{11} Па) оливина в кристаллографических осях равны [Clark, 1966, с. 145]

$$\begin{aligned} \rho &= 3.324, & c_{11} &= 3.24, & c_{22} &= 1.98, & c_{33} &= 2.49, & c_{44} &= 0.667, \\ c_{55} &= 0.810, & c_{66} &= 0.793, & c_{12} &= 0.59, & c_{13} &= 0.79, & c_{23} &= 0.78, \end{aligned} \quad (42)$$

доля оливина в смеси составляет $\alpha = 0.2$ (20%), плотность изотропного материала совпадает с плотностью оливина, а скорости продольных и поперечных волн в нем равны 8.1 и 4.5 км/с. Предполагалось, что тензор Гука смеси выражается через тензоры Гука компонентов согласно

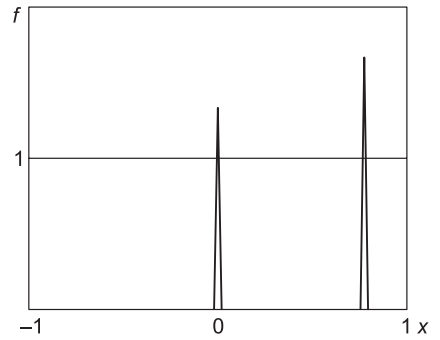
$$c^{mix} = (1 - \alpha)c^{isotropic} + \alpha c^{olivine}. \quad (43)$$

Если функция распределения не зависит от углов, то скорости волн в усредненном по Фойгту оливине получаются равными 8.56 и 4.98 км/с, а в смеси соответственно 8.19 и 4.60 км/с.

В работе [Vinnik et al., 2014] рассматривалась функция распределения, зависящая от одного угла θ , считалось, что это угол между осью симметрии усредненной среды и кристаллографической осью 1. Функция распределения имела вид

$$\frac{1}{2} f(\theta) = \frac{\Theta(\theta_0 - \theta)}{1 - \cos\theta_0}, \quad (44)$$

с $\theta = 30^\circ$, $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, т. е. считалось, что кристаллографическая ось 1 равномерно распределена в конусе раствором 30° . Параметры f_2 и f_4 для такого распределения равны 0.81 и 0.45.



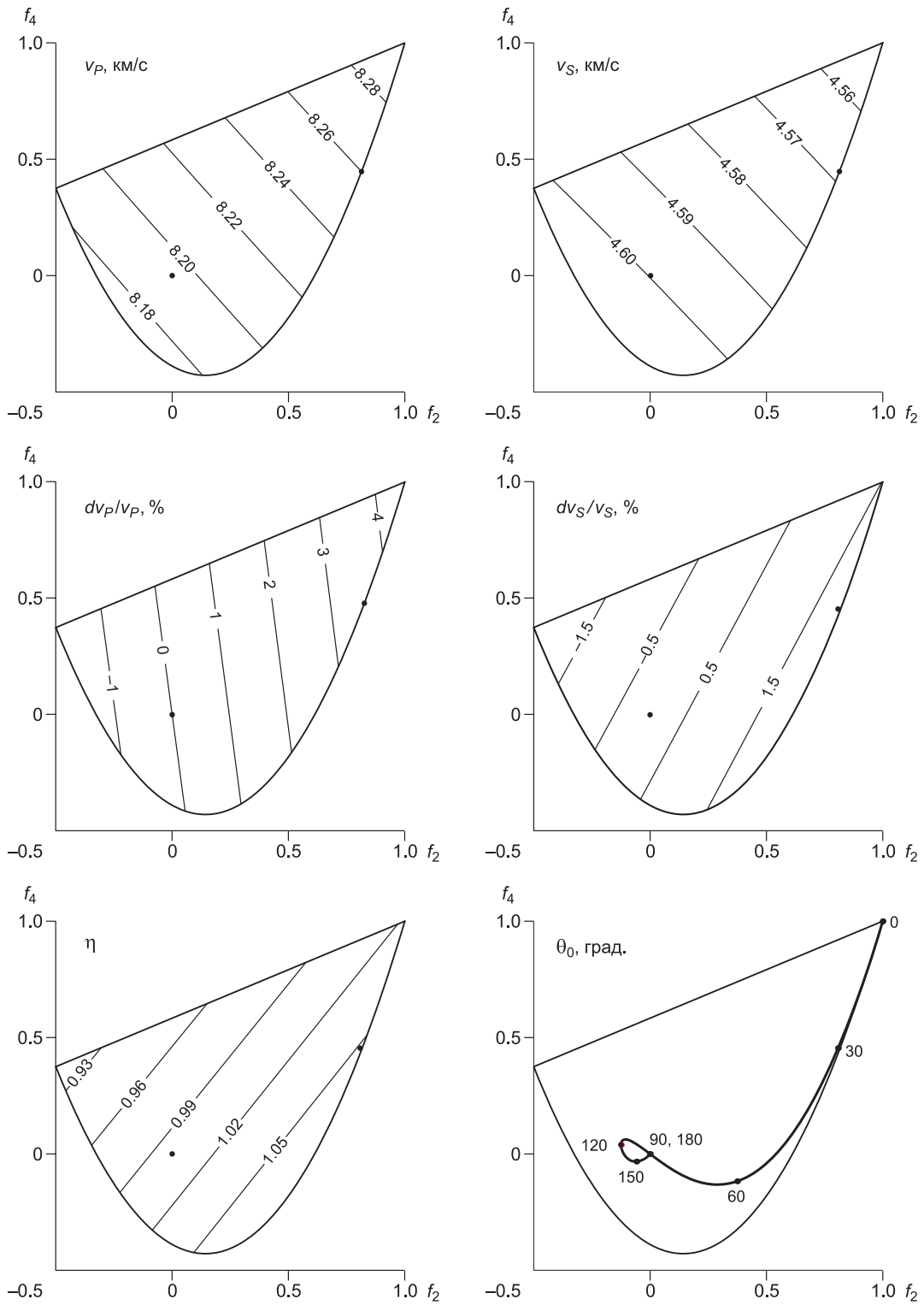


Рис. 4. Изолинии v_p , v_s , dv_p/v_p , dv_s/v_s , η .

Точками обозначены изотропное усреднение (0, 0) и усреднение (0.81, 0.45), использованное в работе [Vinnik et al., 2014]. На последнем графике показано множество усреднений, описываемых формулой (44).

Для наглядности в сейсмологии принято указывать не сами компоненты тензора Гука поперечно-изотропной среды, а некоторые их комбинации: средние скорости квазипродольных и квазипоперечных волн, вариации (в процентах) этих скоростей и параметр η , управляющий формой индикатрисы скоростей

$$\begin{aligned} v_P &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{c_{33}/\rho} + \sqrt{c_{11}/\rho} \right), & v_S &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{c_{44}/\rho} + \sqrt{c_{66}/\rho} \right), \\ dv_P &= \sqrt{c_{33}/\rho} - \sqrt{c_{11}/\rho}, & dv_S &= \sqrt{c_{44}/\rho} - \sqrt{c_{66}/\rho}, & \eta &= \frac{c_{13}}{c_{11} - 2c_{44}}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$. Для рассмотренной в работе [Vinnik et al., 2014] функции распределения были получены следующие значения этих параметров: $v_P = 8.26$ км/с, $v_S = 4.57$ км/с, $dv_P/v_P = 3.5\%$, $dv_S/v_S = 1.8\%$, $\eta = 10.5$.

На рисунке 4 изображено, что получится в той же модели при произвольной функции распределения, зависящей от одного угла. Обращает на себя внимание зависимость v_P и v_S . Действительно, с хорошей точностью выполняется $v_P + 2.085 v_S - 17.784 = 0$.

Изолинии dv_P/v_P , dv_S/v_S и η — прямые. Для η это очевидно сразу из формул (45), а для вариаций скоростей следует из

$$\frac{dv_{P,S}}{2v_{P,S}} = \frac{1 - \sqrt{c_{11,66}/c_{33,44}}}{1 + \sqrt{c_{11,66}/c_{33,44}}} \quad (46)$$

и того факта, что $c_{11,33,44,66}$ линейно зависят от f_2 и f_4 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранее предполагалось, что процедура усреднения по Фойгту (при неизвестной функции распределения по ориентациям) предоставляет широкие возможности для манипулирования параметрами усредненной среды. Настоящая работа показывает, что это далеко не так. Для характеристик среды, которые описываются тензорами конечных рангов, существенной является не вся функция распределения, используемая при усреднении, а лишь конечное число ее низших моментов. Для физически интересных случаев это число совсем небольшое, имеющие значение моменты можно, что называется, пересчитать по пальцам. Тем самым открывается принципиально новая возможность: вместо того, чтобы гадать, какова функция распределения, можно обозреть (казавшиеся ранее необозримыми) *все* мыслимые случаи.

Низшие моменты функции распределения удовлетворяют вытекающим из теории вероятностей неравенствам и могут меняться лишь в ограниченной области. Границы этой области устанавливают пределы изменения усредненных по Фойгту параметров среды.

Если число моментов, от которых зависят усредненные по Фойгту параметры, меньше числа самих параметров (как, например, в случае поперечно-изотропной среды из поперечно-изотропных компонентов), то не только каждый параметр принимает значения в определенных пределах — далеко не все комбинации значений параметров могут реализоваться. Усредненные по Фойгту параметры оказываются зависимыми: если фиксировать часть из них, то остальные уже не могут быть произвольными, а принимают вполне определенные значения.

Подытоживая, можно сказать, что полученные в работе результаты позволяют значительно сузить неопределенность, проистекающую из неполноты информации о распределении составляющих микро-неоднородной среды по ориентации кристаллографических осей.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Л.П. Виннику, инициировавшему эту работу, участнику дискуссионного интернет-форума e-science.ru под ником Ian, пожелавшему остаться анонимным и Г.Л. Косареву за интерес к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ГЦ РАН, утвержденного Министерством науки и высшего образования РФ.

ЛИТЕРАТУРА

- Виленкин Н.Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М., Наука, 1991, 576 с.
Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., Наука, 1973, 552 с.
Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., Наука, 1989, 768 с.

- Чесноков Е.М.** Сейсмическая анизотропия верхней мантии Земли. М., Наука, 1977, 144 с.
- Шермергор Т.Д.** Теория упругости микронеоднородных сред. М., Наука, 1977, 400 с.
- Handbook of physical constants** / Ed. S.P. Clark. New York, Geol. Soc. Amer., Mem. 97, 1966, 587 p.
- Helbig K.** Foundations of anisotropy for exploration seismics. Oxford, Elsevier Science Ltd, 1994, 486 p.
- Jakobsen M., Hudson J.A., Johansen T.A.** *T*-matrix approach to shale acoustics // *Geophys. J. Int.*, 2003, v. 154, p. 533–558.
- Morris P.R.** Averaging fourth-rank tensors with weight functions // *J. Appl. Phys.*, 1969, v. 40, № 2, p. 447–448.
- Reuss A.** Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // *Z. angew. Math. Mech.*, 1929, v. 9, p. 49–58.
- Roe R.J.** Description of crystallite orientation in polycrystalline materials. III. General solution to pole figure inversion // *J. Appl. Phys.*, 1965, v. 36, № 6, p. 2024–2031.
- Sayers C. M.** The elastic anisotropy of shales // *J. Geophys. Res.*, 1994, v. 99, № B1, p. 767–774.
- Sayers C. M.** Seismic anisotropy of shales // *Geophys. Prosp.*, 2005, v. 53, p. 667–676.
- Sayers C.M.** The effect of anisotropy on the Young's moduli and Poisson's ratios of shales // *Geophys. Prosp.*, 2013, v. 61, p. 416–426.
- Schoenberg M., Muir F.** A calculus for finely layered anisotropic media // *Geophysics*, 1989, v. 54, № 5, p. 581–589.
- Vinnik L., Oreshin S., Makeyeva L., Peregoudov D., Kozlovskaya E., Pedersen H., Plomerova J., Achauer U., Kissling E., Sanina I., Jamsen T., Silvennoinen H., Pequegnat C., Hurskainen R., Guiguet R., Hausmann H., Jedlicka P., Aleshin I., Bourova E., Bodvarsson R., Bruckl E., Eken T., Heikkinen P., Houseman G., Johnsen H., Kremenetskaya E., Komminaho K., Munzarova H., Roberts R., Ruzek B., Shomali H., Schweitzer J., Shaumyan A., Vecsey L., Volosov S.** Anisotropic lithosphere under the Fennoscandian Shield from *P* receiver functions and SKS waveforms of the POLENET/LAPNET array // *Tectonophysics*, 2014, v. 628, p. 45–54.
- Voigt W.** Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // *Ann. Phys.*, 1889, v. 274, p. 573–587.
- Zuo L., Xu J., Liang Z.** Averaging fourth-rank elastic tensors for textured polycrystalline aggregates without physical symmetry // *J. Appl. Phys.*, 1989, v. 66, № 6, p. 2338–2341.

*Рекомендована к печати 21 марта 2019 г.
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию 5 апреля 2018 г.,
после доработки — 24 декабря 2018 г.*