

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ ЛАГЕРРА

**А.Ф. Мاستрюков**

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090, Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6, Россия*

Предлагается спектральный метод моделирования высокочастотных электромагнитных волн в аксиально-симметричной геометрии. Метод основан на разложении решения уравнений Максвелла по функциям Лагерра во временной области.

Спектральный метод применяется при решении уравнений Максвелла как для двумерной среды, так и для слоистой среды. В случае слоистой среды используется разложение Фурье—Бесселя по радиальной переменной. Приводятся результаты сравнения эффективности спектрального и конечно-разностного методов. Рассматриваются «гармонические» решения и «уединенные» решения в методе Лагерра, исследуется динамика монохроматического и широкополосного электромагнитных импульсов.

*Уравнения Максвелла, электромагнитные волны, проводимость, диэлектрическая проницаемость, широкополосный импульс, метод Лагерра, конечно-разностный метод.*

### MODELING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN AXISYMMETRIC GEOMETRY USING THE LAGUERRE SPECTRAL METHOD

**A.F. Mastryukov**

A spectral method for modeling high-frequency electromagnetic waves in axisymmetric geometry is proposed. The method is based on the expansion of the solutions of Maxwell's equations in Laguerre functions in the time region.

The spectral method is used to solve Maxwell's equations for both 2D media and stratified media. In the case of stratified media, a Fourier–Bessel expansion in the radial variable is used. The effectiveness of the spectral and finite-difference methods is compared. Harmonic solutions and solitary solutions by the Laguerre method are considered, and the dynamics of monochromatic and broadband electromagnetic pulses are examined.

*Maxwell's equations, electromagnetic waves, conductivity, dielectric permittivity, broadband pulse, Laguerre method, finite-difference method*

## ВВЕДЕНИЕ

При электромагнитных исследованиях используются [Электроразведка, 1980] волны как низких, так и высоких частот. Высокочастотные электромагнитные волны применяются для получения информации о свойствах и структуре среды вблизи скважины. Электромагнитные волны в диапазоне 100 МГц—1 ГГц применяются для определения диэлектрической проницаемости среды [Эпов и др., 2008]. Электромагнитные волны такого диапазона применяются для зондирования ионосферы, исследования верхних слоев поверхности Земли, в системах космического мониторинга поверхности Земли, в системах экологического контроля окружающей среды [Кашкин, Сухинин, 2001]. Низкочастотные волны от 0.1 Гц до 100 кГц применяются для анализа проводимости [Wang, Signorelli, 2004] среды. Электромагнитные волны этого диапазона частот используются и для мониторинга движения жидкости в стальных трубах, и для исследования свойств сред вблизи труб [Wu, Nabashy, 1994; Lee et al., 2005]. В этих случаях для описания распространения волн применяются уравнения Максвелла в аксиально-симметричной геометрии. Уравнения Максвелла в аксиально-симметричной геометрии описывают явления, возникающие в других [Ландау, Лифшиц, 1982] областях физики. В частности, такими уравнениями описывается распространение электромагнитных волн в оптических приборах.

В низкочастотном диапазоне уравнения Максвелла рассматриваются в квазистационарном приближении, распространение поля носит характер диффузии, поэтому понятие волны здесь достаточно условно.

Существуют среды, для которых необходим учет инерционности диэлектрической проницаемости и проводимости с частот порядка 1 Гц. Но для частот выше 100 кГц существенны инерционные свойства большинства [Физические свойства..., 1984] природных минералов.

Обычно инерционные свойства среды обусловлены несколькими различными физическими процессами. Таких процессов может быть несколько десятков. Для описания каждого такого процесса вводятся дополнительные переменные, которые описываются дифференциальными или интегральными уравнениями [Turner, Siggins, 1994]. Таких переменных может быть несколько десятков, и поэтому системы уравнений, учитывающие инерцию параметров среды, могут быть большого размера.

В задачах изучения электромагнитных свойств сред в скважинах достаточно рассматривать решение на коротких пространственных и временных промежутках. Обычно это в пределах 5—10 длин волн. Здесь используются как монохроматические импульсы с амплитудной модуляцией, так и сверхширокополосные [Эпов и др., 2009] электромагнитные импульсы.

При выборе численного метода решения необходимо учитывать приведенные выше особенности таких задач, что может позволить использовать более эффективные и точные алгоритмы.

Спектральный и конечно-разностный методы наиболее часто используются при численном решении уравнений Максвелла. Конечно-разностный метод решения такой системы уравнений имеет ряд ограничений [Bergmann et al., 1999]. В первую очередь это ограничение на величину шага разностной сетки по времени. При диффузионном характере распространения поля и для сред с сильно изменяющимися в пространстве электромагнитными параметрами, каким является проводимость, это ведет к большим вычислительным затратам. Часто инерционные свойства среды описываются интегральными выражениями, тогда уравнения Максвелла превращаются в интегродифференциальные уравнения. Конечно-разностные методы решения таких уравнений неэффективны.

В некоторых случаях вместо конечно-разностного метода решения удобнее и эффективнее использовать спектральный метод [Конюх, Михайленко, 1998], основанный на разложении решения по полиномам Лагерра во временной области. Спектральный метод Лагерра имеет ряд существенных преимуществ и во многих случаях [Мастрюков, Михайленко, 2003, 2006] оказывается в несколько раз эффективнее спектрального метода Фурье. Эффективность метода обусловлена использованием свойств самого преобразования Лагерра. Меняя внутренние параметры этого преобразования, можно повышать эффективность численного алгоритма.

В настоящей работе метод, основанный на разложении Лагерра, используется для решения двумерных уравнений Максвелла в аксиально-симметричной геометрии. По времени проводится преобразование Лагерра, пространственные производные аппроксимируются конечными разностями высокого порядка точности. Уравнения Максвелла сводятся к системе линейных алгебраических уравнений для гармоник Лагерра, которая решается численно.

Спектральный метод применяется при решении уравнений Максвелла как для двумерной среды, так и для слоистой среды. В случае слоистой среды используется разложение Фурье—Бесселя по радиальной переменной. Как для слоистой среды, так и для двумерной среды решение спектральным методом сравнивается с решением, полученным явным конечно-разностным методом.

Рассматриваются «гармонические» решения и «уединенные» решения в методе Лагерра, исследуется динамика монохроматического и широкополосного электромагнитных импульсов.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид [Ландау, Лифшиц, 1982]

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_s, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\mathbf{D}$  — электрическая индукция,  $\mathbf{J}$  — ток проводимости,  $\mathbf{J}_s$  — ток внешнего источника,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  — магнитная индукция.

Будем полагать, что магнитная проницаемость  $\mu$  изотропна и постоянна во времени, а релаксационные свойства среды задаются зависимостью от времени диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и проводимости  $\sigma$ . Связь электрической индукции и тока проводимости с напряженностью электрического поля выражается соотношениями [Bergmann et al., 1998; Bergmann et al., 1999]

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{\partial \epsilon}{\partial t} * \mathbf{E}, \\ \mathbf{J} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} * \mathbf{E},\end{aligned}\tag{2}$$

где знак \* означает свертку.

Обычно инерционные свойства реальных сред обуславливают одновременно разные физические процессы. Поэтому зависимость от времени диэлектрической проницаемости задается в виде суммы релаксационных функций, каждая из которых соответствует одному такому процессу

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s \left( 1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left( 1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) \right) H(t), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_s$  — статическое значение диэлектрической проницаемости,  $\tau_{El}$  — время релаксации напряженности электрического поля,  $\tau_{Dl}$  — время релаксации электрической индукции,  $L$  — число механизмов релаксации. Здесь каждый механизм характеризуется двумя временами релаксации  $\tau_{Dl}, \tau_{El}$ .

Зависимость от времени проводимости среды бралась в виде

$$\sigma(t) = \sigma_s (H(t) + \tau_\sigma \delta(t)), \quad (4)$$

где  $\sigma_s$  — статическое значение проводимости,  $\tau_\sigma$  — время релаксации проводимости, характеризующее сдвиг проводимости по фазе,  $H(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $\delta(t)$  — дельта-функция.

Физически формулы (3), (4) отражают инерцию возникновения поляризации среды и тока проводимости в среде. Математические модели (3), (4) для электромагнитных параметров вводятся по аналогии с акустикой [Bergmann et al., 1998]. Подобные модели используются в акустике для представления поглощения волн. Тело с моделью (3) называется стандартным линейным телом, тело с моделью (4) — телом Кельвина—Фойгта.

Для решения с использованием разложения Лагерра вид зависимости от времени  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  не важен. В этом случае выражения (2) для свертки двух функций сводятся к простой сумме произведений гармоник Лагерра от этих функций [Мастрюков, Михайленко, 2003]. При решении конечно-разностным методом необходим подбор вида функций  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$ , аппроксимирующих механизмы релаксации, для построения эффективного численного алгоритма.

Введя обозначения для эффективных значений диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^e$  и проводимости  $\sigma^e$

$$\varepsilon^e = \varepsilon_s \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) + \sigma_s \tau_\sigma, \quad \sigma^e = \sigma_s + \varepsilon_s \left( \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{Dl}} \left( 1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \right)$$

и введя переменную

$$\mathbf{m}_l = -\frac{1}{L} \left( \frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left( 1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) H(t) \right) * \mathbf{E},$$

легко получить систему уравнений, учитывающую релаксацию [Мастрюков, Михайленко, 2003] параметров среды.

В аксиально-симметричной геометрии уравнения для поперечного магнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t}, \\ -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} &= \varepsilon^e \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma^e E_r + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L m_{lr}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r H_\phi}{\partial r} &= \varepsilon^e \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma^e E_z + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L m_{lz} + J_z, \\ \frac{\partial \mathbf{m}_l}{\partial t} &= -\left( \frac{\mathbf{m}_l}{\tau_{Dl}} + \frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left( 1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \right) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $J_z$  — источник тока.

В дальнейшем, для простоты, будем полагать, что есть только один механизм релаксации,  $L = 1$ , и потому будем опускать индекс  $l$  в уравнениях.

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАГЕРРА

Преобразование Лагерра имеет вид [Конюх, Михайленко, 1998]

$$\phi_n = \int_0^\infty \phi(t) (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (6)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n I_n^{\alpha}(ht) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n u_n^{\alpha}(ht), \quad (7)$$

где  $I_n^{\alpha}(ht)$  — ортогональная функция Лагерра степени  $n$ ,  $\alpha$  — целая константа,  $h$  — параметр преобразования Лагерра.

Преобразование Лагерра (6), (7) имеет два внутренних параметра:  $\alpha$ ,  $h$ . Параметр  $\alpha$  входит явно в формулу преобразования Лагерра и от этого параметра зависит вид самих функций Лагерра. Из вида преобразования следует, что при  $\alpha > 0$  задача может рассматриваться только для нулевых начальных условий, при  $\alpha = 0$  задача может рассматриваться и для ненулевых начальных условий.

Функция  $I_n^{\alpha}(x)$  определена [Справочник..., 1979] на промежутке  $[0, \infty]$ . Она является конечной величиной только на промежутке от 0 до  $x_k \approx 2(2n + \alpha + 1)$ . Вне этого промежутка ортогональные функции Лагерра экспоненциально малы и имеют при  $x > x_k$  вид

$$I_n^{\alpha}(x) = a_n^{\alpha} x^{\frac{1}{2}} \exp(-x/2), \quad a_n^{\alpha} = \text{const}. \quad (8)$$

Поскольку функции Лагерра конечны только на некотором промежутке, то функции  $u_n^{\alpha}(x) = (x)^{\alpha/2} I_n^{\alpha}(x)$  в разложении (7) имеют вид уединенных функций, уединенных волн. Соответственно и ряд Лагерра представляет сумму уединенных волн. Вид функций  $I_n^{\alpha}(x)$  существенно отличает разложение (6) от разложения Фурье, где функции синус и косинус — бесконечные периодические функции. В отличие от метода Фурье, «гармонический» источник в методе Лагерра — это уединенный импульс. На рис. 1 приведен вид нескольких функций  $u_n^{\alpha}(x)$  ряда (7) при различных значениях  $n$  и  $\alpha$ .

На рис. 1, а показана функция  $u_n^{\alpha}(x)$  с  $n = 4$  и  $\alpha = 0$ , которая при  $x = 0$  равна 1. На рис. 1, б показана функция с  $n = 9$  и  $\alpha = 1$ , на рис. 1, в показана сумма двух функций  $n = 13$  и  $n = 14$  при  $\alpha = 4$ . Для сравнения, на нижнем графике (г) приведен вид, часто используемый в расчетах в качестве формы импульса внешнего источника тока

$$f(x) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(x-x_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(x-x_0)), \quad (9)$$

где  $f_0$  — несущая частота источника,  $x_0$  — момент центра импульса источника. Это монохроматический импульс с модуляцией амплитуды. Расстояние между нулями этой функции постоянно на промежутке.

Поскольку нули функции  $u_n^{\alpha}(x)$  совпадают с нулями функции  $I_n^{\alpha}(x)$ , то она, как и  $I_n^{\alpha}(x)$ , имеет  $n+1$  нулей. Расстояние между двумя нулями  $\delta x_m$  функции с номером  $n$  ряда (7) растет линейно с ростом  $x$

$$\delta x_m \approx m/(n + 0.5(\alpha + 1)), \quad (10)$$

где  $m$  — номер нуля от начала координат и  $1 \leq m \leq n$ . Если рассматривать спектр Фурье функции с номером  $n$  ряда (7), то в ней существенны гармоники с частотами, отличающимися в  $n$  раз. Так в импульсе, показанном на рис. 1, б, существенны гармоники Фурье с частотами, отличающимися в 10 раз. Практически все функции ряда Лагерра, за исключением первых двух-трех, имеют широкий спектр Фурье.

В инерционной среде импульс, имеющий вид функции  $u_n^{\alpha}(x)$ , должен сильно деформироваться по причине зависимости параметров среды от частоты Фурье. Зависимость величины поглощения от частоты будет также искажать форму такого импульса.

Имеющиеся источники электромагнитных волн могут производить сигнал различной формы во времени. Если используется гармонический источник, работающий на одной частоте Фурье, то такую задачу естественно решать методом Фурье. Если источник не является периодическим или имеет вид уединенного импульса, то он точнее аппроксимируется рядом Лагерра, чем рядом Фурье при одинаковом числе гармоник. Широкополосный импульс точнее аппроксимируется «широкополосными» функциями ряда Лагерра. Точнее аппроксимируется рядом Лагерра мгновенное включение или выключение постоянного тока.

Аналогично методу Фурье можно рассматривать источник, имеющий форму функций ряда Лагерра (7). В этом случае естественно задачу решать методом Лагерра.

При решении дифференциальных уравнений гармоники Лагерра связаны между собой, независимой является только первая ненулевая гармоника. Спектр Лагерра решения задачи будет зависеть от величины интервала решения. Если функция  $\phi(x)$  ненулевая только в промежутке  $[x_a, x_b]$ , то номера гармоник спектра Лагерра этой функции удовлетворяют условию

$$\left(\frac{x_a}{2} - \alpha - 1\right)/2 < n < \left(\frac{x_b}{2} - \alpha - 1\right)/2. \quad (11)$$

Если в это выражение подставить  $x_a = ht_a$ ,  $x_b = ht_b$ , то видно, что спектр сдвигается в сторону больших  $n$  при больших  $t$  и больших  $h$ .

Для гармоник Лагерра формально выполняются соотношения, аналогичные соотношениям для гармоник Фурье. Так, в рамках волнового уравнения для гармоник Лагерра при больших  $h$ , как и для высокочастотных гармоник Фурье, можно получить [Мастрюков, Михайленко, 2006] аналог и параболического приближения, и лучевого приближения.

При пренебрежимо малой проводимости уравнения Максвелла можно свести к волновому уравнению. Если в волновом уравнении решение для гармоник Лагерра  $E_n$  представить в виде  $E_n = V_n \exp(h\psi/2)$  и собрать члены с одинаковыми степенями  $h$ , получим уравнение эйконала

$$(\nabla\psi)^2 = \mu\varepsilon. \quad (12)$$

Когда током смещения можно пренебречь, распространение поля носит диффузионный характер, и уравнения Максвелла сводятся к уравнению диффузии. Если в таком уравнении заменить

$E_n = V_n \exp\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\psi\right)$ , то из последнего уравнения при больших  $\sqrt{\frac{h}{2}}$  также следует уравнение эйконала,

где в правой части вместо диэлектрической проницаемости стоит проводимость

$$(\nabla\psi)^2 = \mu\sigma. \quad (13)$$

Решение уравнения эйконала в однородной среде имеет вид  $\psi = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$ . Представим поле  $E$  в виде ряда (7), используя это выражение для  $\psi$ , и формулу (8) для асимптотики функции  $L_n^\alpha(x)$ . Для значения параметра  $\alpha = 1$  получим соотношение, аналогичное выражению для гармоник Фурье в приближении геометрической оптики

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} V_n a_n^\alpha \exp\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \frac{h}{2}t\right). \quad (14)$$

Здесь поле представляет сумму бегущих гармоник Лагерра, движущихся с одинаковой фазовой

скоростью, равной  $\frac{1}{|q|}\sqrt{\frac{h}{2}}$  независимо от номера гармоники.

### ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ

Применим преобразование (6) к системе уравнений (5). В результате получим следующую систему уравнений для  $n$ -й гармоники электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{nr}}{\partial z} - \frac{\partial E_{nz}}{\partial r} &= -\mu \left( \frac{h}{2} H_{n\varphi} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{k\varphi} \right), \\ -\frac{\partial H_{n\varphi}}{\partial z} &= \varepsilon^e \left( \frac{h}{2} E_{nr} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kr} \right) + \sigma^e E_{nr} + \varepsilon_s m_{nr}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r H_{n\varphi}}{\partial r} &= \varepsilon^e \left( \frac{h}{2} E_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kz} \right) + \sigma^e E_{nz} + \varepsilon_s m_{nz} + J_{nz}, \\ \mathbf{m}_n &= -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left( h \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{m}_k + \frac{1}{\tau_D^2} \left( 1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \mathbf{E}_n \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Эта система уравнений содержит только действительные переменные. Это одно из преимуществ разложения Лагерра в сравнении с разложением Фурье. Аналогичная система уравнений при использовании метода Фурье содержит комплексные переменные. Это значительно увеличивает число арифметических операций в методе Фурье в сравнении с методом Лагерра.

При численном решении система дифференциальных уравнений (15) сводится к системе алгебраических уравнений вида  $A\mathbf{v}_n = \mathbf{b}_n$ , где  $A$  является матрицей, а  $\mathbf{v}_n$  есть вектор, компонентами которого являются значения решения в точках разностной сетки. При этом младшие гармоники будут входить только в правую часть, а матрица не будет зависеть от номера гармоники  $n$ . В пространственно одномер-

ных задачах размер матрицы  $A$  невелик, и чтобы решить задачу, достаточно вычислить обратную матрицу  $A^{-1}$  один раз для определения всех гармоник. Однократное вычисление обратной матрицы и ее действительность — основные преимущества метода Лагерра, они сокращают в несколько раз число арифметических операций в сравнении с методом Фурье.

В таких многомерных задачах, как (15), размер матрицы  $A$  обычно большой, вычислять обратную матрицу неэкономично, и ее хранение требует очень больших объемов оперативной памяти компьютеров. Для решения алгебраических уравнений здесь используют итерационные методы решения.

При итерационном методе решения уравнения (15) будем использовать параметр преобразования  $h$ . Большие значения  $h$  способствуют понижению числа обусловленности матрицы  $A$  и, соответственно, повышению эффективности численного [Paige, Saunders, 1982] алгоритма.

Значение параметра  $h$  подбирается очень просто. В волновой области распространения поля, где ток проводимости мал в сравнении с током смещения, его достаточно выбрать больше обратной величины пространственного шага разностной сетки  $1/h$ . В диффузионной области, где, наоборот, мал ток смещения, параметр  $h$  должен быть больше квадрата обратной величины пространственного шага сетки. Здесь относительно шага сетки большой величиной должна быть величина  $\sqrt{h}$ , где формально выполняется лучевое приближение (13).

Для слоистой среды уравнения (15) сводились к одномерным уравнениям, применяя преобразование Фурье—Бесселя [Снеддон, 1955] по радиальной переменной. В этом случае получаем уравнения для гармоник Фурье—Бесселя

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{nr}}{\partial z} + sE_{nz} &= -\mu \left( \frac{h}{2} H_{n\phi} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{k\phi} \right), \\ \frac{\partial H_{n\phi}}{\partial z} &= \varepsilon^e \left( \frac{h}{2} E_{nr} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kr} \right) + \sigma^e E_{nr} + \varepsilon_s m_{nr}, \\ sH_{n\phi} &= \varepsilon^e \left( \frac{h}{2} E_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kz} \right) + \sigma^e E_{nz} + \varepsilon_s m_{nz} + J_{nz}, \\ \mathbf{m}_n &= -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left( h \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{m}_k + \frac{1}{\tau_D^2} \left( 1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \mathbf{E}_n \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Записав эту систему в конечно-разностном виде, получим систему линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей. Ширина ленты невелика, и потому эту систему уравнений будем решать прямым методом, вычисляя обратную матрицу системы алгебраических уравнений.

Решение, полученное с помощью разложения Лагерра, как для двумерной (15) среды, так и для слоистой среды (16) будем сравнивать с решением, полученным конечно-разностным методом. В этом случае система уравнений (5) заменой переменных сводилась к системе уравнений волнового типа

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}}{dt} &= f(t, \mathbf{v}), \quad \mathbf{w} = (H_\phi, m_r \exp(t/\tau_D), m_z \exp(t/\tau_D)), \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= g(t, \mathbf{w}), \quad \mathbf{v} = (E_r \exp(\sigma^e t / \varepsilon^e), E_z \exp(\sigma^e t / \varepsilon^e)). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь пространственные производные находятся в правых частях, и уравнения записаны в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Запись уравнений в таком виде [Ghrist et al., 2000] позволяет строить разностные схемы высокого порядка точности по времени, как обычно это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие конечно-разностные методы относятся к числу наиболее точных и наиболее эффективных, и универсальных. Универсальность заключается в том, что эти алгоритмы для разной точности аппроксимации производных уравнений в программном отношении подобны. Изменение точности аппроксимации приводит лишь к незначительным изменениям в программных реализациях этих алгоритмов. Поскольку численные решения при разной точности аппроксимаций производных должны стремиться к одному точному решению, то такие методы будем использовать для поиска «точного» решения уравнений и анализа точности спектрального алгоритма Лагерра.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численные расчеты проводились для источника в виде вертикального линейного тока, расположенного на оси системы координат, длиной  $L$  с центром в точке  $z_s$

$$J_z = f(t) \frac{1}{r} \delta(r), \quad z_s - L/2 < z < z_s + L/2, \quad (18)$$

$$J_z = 0, \quad z < z_s - L/2, \quad z > z_s + L/2.$$

Использовались три вида зависимости формы импульса тока от времени. Они приведены на трех нижних графиках рис. 1. Численные расчеты проводились для частот электромагнитного поля от 20 МГц до 1 ГГц.

В конечно-разностном алгоритме (17) для аппроксимации пространственных и временных производных использовались конечные разности 4-го порядка точности. Использование разностей 2-го порядка приводило к большим погрешностям. Использование разностей 6-го порядка и выше не давало более высокой точности решения уравнений [Fornberg, Ghrist, 1999]. На длину электромагнитной волны приходилось 10—12 шагов пространственной разностной сетки.

Для того чтобы оценить точность алгоритма, определялось «точное» решение уравнений. Здесь «точное» численное решение — это одно общее решение, к которому стремится как конечно-разностный метод (17), при уменьшении шагов разностной схемы, так и спектральные методы (15) и (16), при увеличении числа гармоник.

Степень совпадения двух решений оценивалась по величине относительного отклонения  $D(t, r)$ , которая определялась выражением вида

$$D(r, t) = \frac{\int_0^\infty |H_{1\varphi}(r, z, t) - H_{2\varphi}(r, z, t)| dz}{\int_0^\infty |H_{2\varphi}(r, z, t)| dz}. \quad (19)$$

На рис. 2 показано распространение волны ( $H_\varphi$  — компоненты поля) в однородной среде для двух разных форм импульса тока  $f(t)$ . На рис. 2, *a* показано поле, когда импульс тока имеет вид одной функции  $u_n^\alpha$  ряда Лагерра (7). Это широкополосный импульс, он изображен на рис. 1, *б*. На рис. 2, *б* показано поле, создаваемое монохроматическим импульсом тока, он показан на рис. 1, *г*. В обоих случаях поле показано в два момента времени, поле после пробега волной расстояния от оси примерно 5 и 6 длин волн.

Видно, что динамика волн в двух случаях существенно различна. Широкополосный импульс (см. рис. 2, *a*) сильно деформируется. Это связано, как отмечалось выше, с дисперсией параметров среды и сильным затуханием коротких волн. В случае монохроматической волны (см. рис. 2, *б*) доминирует основная частота волны, поле повторяет форму импульса тока.

В этих расчетах основная частота монохроматической волны выбрана равной минимальной частоте широкополосного импульса. Эта частота составляла 50 МГц, а параметры преобразования Лагерра  $\alpha = 1$ ,  $h = 100$ . Среда имеет следующие параметры:  $\epsilon_s = 15\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma_s = 0.001$  См/м,  $\tau_D = 0.163$  нс,  $\tau_E = 0.155$  нс,  $\tau_\sigma = 0$ ,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — значения диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости вакуума соответственно. Эти параметры близки к параметрам песка.

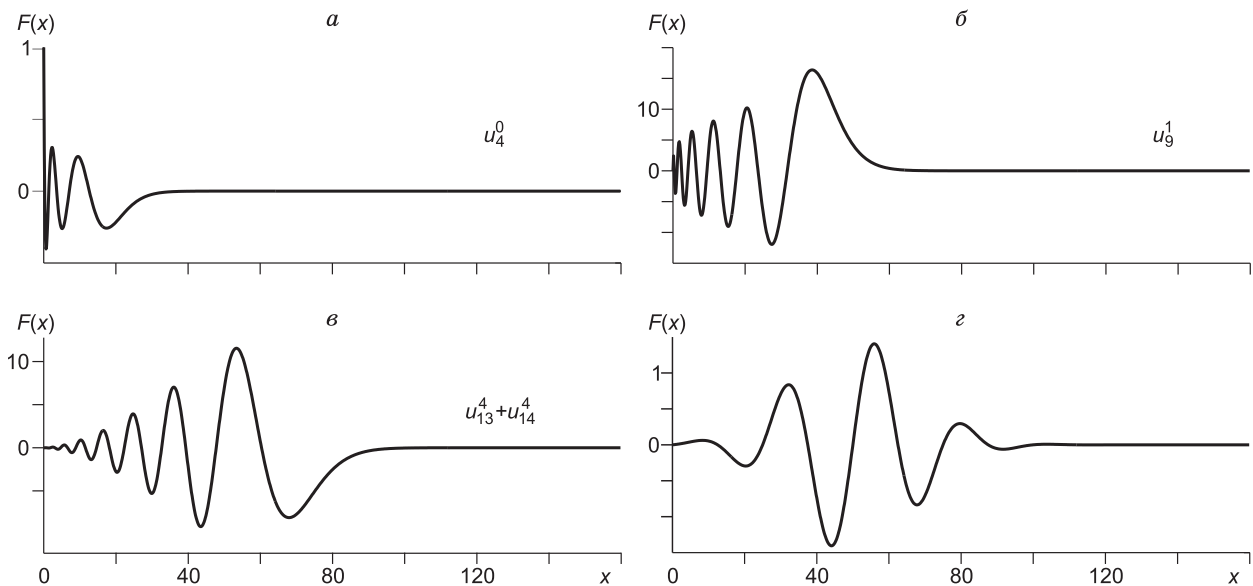
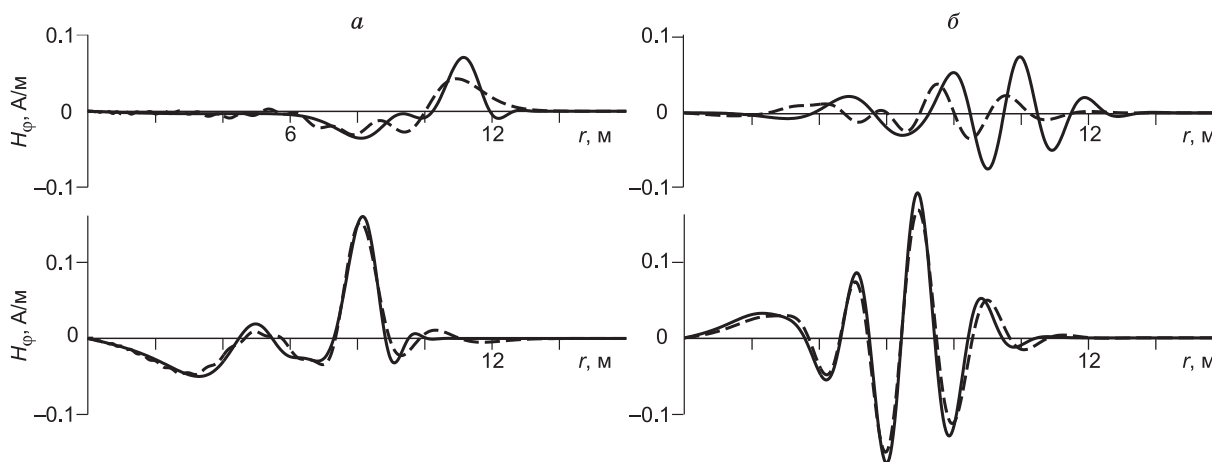


Рис. 1. Вид функций  $u_n^\alpha(x)$  ряда Лагерра (*a*, *б*, *в*) и монохроматического импульса (*г*).



**Рис. 2. Распространение импульса в однородной среде.**

Сплошная линия — точное решение, штриховая линия — решение методом Лагерра. (а) — динамика широкополосного импульса, (б) — динамика монохроматического импульса.

Расчеты проведены тремя различными методами: спектральным методом Лагерра (15), спектральным методом Лагерра, использующим разложение Фурье—Бесселя по радиальной переменной (16), конечно-разностным методом (17). Сплошная линия соответствует «точному» решению.

Решения на графиках всеми тремя алгоритмами совпадают с хорошей точностью при использовании 100 гармоник Лагерра в алгоритмах (15) и (16). Величина отклонения между ними не превосходит  $D = 0.02$ .

При этом спектральный алгоритм (15) работал примерно в 2 раза быстрее конечно-разностного алгоритма, а спектральный алгоритм (16) работал в 4—5 раз быстрее конечно-разностного. В приведенных в работе решениях расчеты проводились в пределах 15 длин волн.

Штриховая линия на рис. 2, а получена с использованием разложения Фурье—Бесселя (16) и при 50 гармониках Лагерра, она существенно отличается от «точной». Штриховая линия на рис. 2, б получена алгоритмом (15) также при использовании 50 гармоник Лагерра. Погрешность этого решения приближается к  $D = 1$ .

На рис. 3 приведены электрограммы поля, создаваемые источником тока, расположенным на оси скважины. Расчеты проведены спектральным алгоритмом (15). Форма импульса тока взята в виде суммы двух элементов ряда Лагерра, изображенных на рис. 1, в. Этот импульс имеет широкий спектр Фурье. Перепад частот Фурье этого импульса составляет 12—13 раз. Минимальная частота равна 200 МГц.

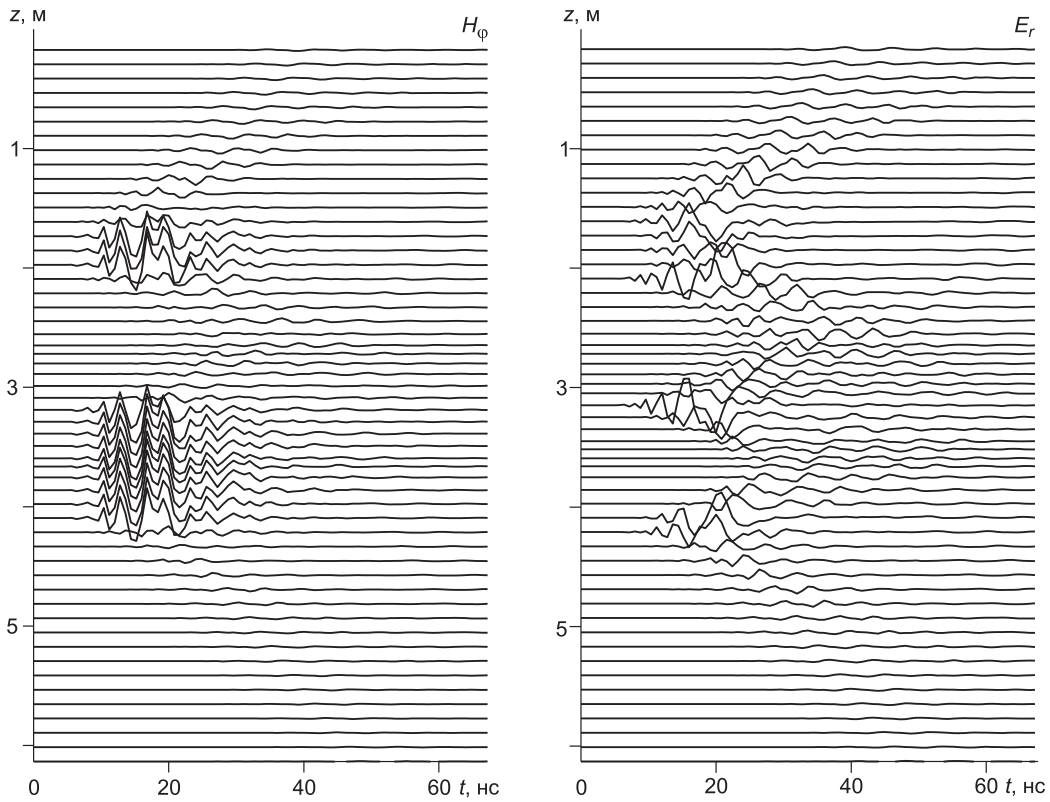
Пространственная структура среды показана на рис. 4. Скважина пересекает два слоя глины толщиной около 1 м каждый с параметрами  $\epsilon_s = 8\epsilon_0$ ,  $\sigma_s = 0.3$  См/м,  $\tau_D = 0.160$  нс,  $\tau_E = 0.158$  нс,  $\tau_\sigma = 0$ . Верхний слой имеет конечные размеры по радиальной координате. Вмещающая среда — песок с параметрами  $\epsilon_s = 15\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma_s = 0.001$  См/м,  $\tau_D = 0.163$  нс,  $\tau_E = 0.155$  нс,  $\tau_\sigma = 0$ . Скважина имеет радиус 12 см и заполнена раствором с параметрами  $\epsilon_s = 79.77\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma_s = 0.1$  См/м,  $\tau_D = 0$  нс,  $\tau_E = 0$  нс,  $\tau_\sigma = 0$ . Поле измеряется на расстоянии 10 см от оси.

Отметим, что такие параметры выбраны с учетом наличия значений времен релаксации для сред в литературе. Для демонстрации возможностей численного алгоритма важно наличие сильноконтрастных сред с большим перепадом значений электромагнитных параметров.

Поскольку амплитуда отраженной волны значительно меньше амплитуды падающей волны, здесь изображена разность электрограмм в случае, когда скважина расположена в однородной среде и электрограммы в случае, когда скважина расположена в среде с двумя указанными включениями. Это электрограммы поля, отраженного от включений.

На рис 3, а приведены графики магнитного поля  $H_\phi$ , на рис. 3, б приведены графики электрического поля  $E_r$ . Вид графиков  $H_\phi$  и  $E_r$  существенно различается. По вертикали, максимум отраженного магнитного поля  $H_\phi$  находится на уровне расположения включений. Максимум отраженного электрического поля  $E_r$  находится на уровне горизонтальных границ включений. Графики  $E_z$  здесь не приведены, они подобны графикам  $H_\phi$ .





**Рис. 3.** Электрограммы поля  $H_\phi$ ,  $E_r$  для модели среды, показанной на рис. 4.

Отраженное поле от двух включений глины.

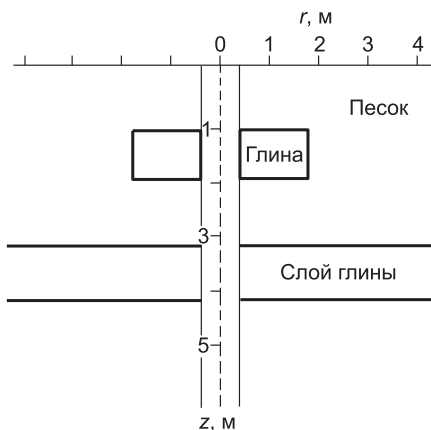
На графиках четко выражены горизонтальные границы слоев. Амплитуда отраженной волны составляла порядка 0.1 от амплитуды падающей волны. Отражение от правой вертикальной границы верхнего включения слабы и составляли  $10^{-3}$ — $10^{-4}$  от амплитуды падающей волны.

Если импульс тока имел форму монохроматического импульса (9), то качественно картина поля не менялась. Частота монохроматического импульса бралась равной минимальной частоте широкополосного импульса, длительности и амплитуды импульсов брались равными.

Отличия выражались в увеличении длительности отраженной волны широкополосного импульса в сравнении с монохроматическим импульсом. Дисперсия параметров среды должна приводить к большему расплыванию широкополосного импульса. С другой стороны, поскольку короткие волны, как это видно на рис. 1, представлены в передней части широкополосного импульса, то большее поглощение переднего фронта широкополосного импульса должно приводить к его сжатию.

В случае монохроматического импульса отражение всегда существенно меньше, чем в случае широкополосного импульса. Так, разница амплитуд электромагнитного поля, отраженного от вертикальной границы верхнего включения этих двух случаев, составляла 3—5 раз. Величина отражения от неоднородностей среды в широкополосном случае всегда выше. В этом случае больше и глубина исследований.

При расчете динамики и широкополосного, и монохроматического импульсов, показанных на рис. 3, время счета методом Лагерра было сравнимо со временем счета конечно-разностным методом. Если использовать для приведенных выше расчетов спектральный метод Фурье, то он оказывается во всех случаях в несколько раз медленнее спектрального метода Лагерра.



**Рис. 4.** Модель среды.

Скважина и два включения глины в песке.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для слоистой среды спектральный метод Лагерра в 4—5 раз эффективнее конечно-разностного метода решения уравнений Максвелла в аксиально-симметричной геометрии. Для двумерной структуры среды эффективность спектрального метода сравнима с эффективностью конечно-разностного метода.

Когда импульс тока имеет вид гармоника Лагерра, его динамика отличается от динамики монохроматического импульса. Это связано с дисперсией электромагнитных параметров среды и сильным затуханием высоких частот. Гармоники Лагерра имеют широкий спектр Фурье, поэтому они являются хорошей аппроксимацией широкополосных электромагнитных импульсов.

## ЛИТЕРАТУРА

**Кашкин В.Б., Сухинин Ф.И.** Дистанционное зондирование Земли из космоса. М., Логос, 2001, 264 с.

**Конюх Г.В., Михайленко Б.Г.** Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмологии // Математическое моделирование в геофизике, 1998, № 5, с. 107—112 (Тр. ИВМиМГ).

**Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 620 с.

**Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2003, т. 44 (10), с. 1060—1069.

**Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.** Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2006, т. 47 (3), с. 397—407.

**Справочник по специальным функциям** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., Наука, 1979, 832 с.

**Снеддон И.** Преобразование Фурье. М., Иностран. лит., 1955, 667 с.

**Физические свойства горных пород.** Справочник геофизика / Ред. Н.Б. Дортман. М., Недра, 1984, 455 с.

**Электроразведка.** Справочник геофизика / Ред. А.Г. Тархов. М., Недра, 1980, 137 с.

**Эпов М.И., Миронов В.Л., Комаров С.А., Музалевский К.В.** Электромагнитное зондирование флюидонасыщенного слоистого коллектора наносекундными импульсами // Геология и геофизика, 2007, т. 48 (12), с. 1357—1365.

**Эпов М.И., Миронов В.Л., Комаров С.А., Музалевский К.В.** Распространение сверхширокополосного электромагнитного импульса в нефтенасыщенной среде коллектора в присутствии водонефтяного контакта // Геология и геофизика, 2009, т. 50 (1), с. 58—66.

**Bergmann Tim, Robertsson Johan O.A., Holliger Klaus.** Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics, 1998, v. 63, p. 856—867.

**Bergmann Tim, Blanch Joakim O., Robertsson Johan O.A., Holliger Klaus.** A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // Geophysics, 1999, v. 64, p. 1369—1377.

**Fornberg B., Grist M.** Spatial finite difference approximation for wave-type equations // SIAM J. Numer. Anal., 1999, v. 37, p. 105—130.

**Grist M., Fornberg B., Driscoll T.A.** Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal., 2000, v. 38, p. 718—741.

**Lee K.H., Kim H.J., Uchida T.** Electromagnetic fields in a steel-cased borehole // Geophys. Prosp., 2005, v. 53, p. 13—21.

**Paige C.C., Saunders M.A.** LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Transaction on Mathematical Software, 1982, v. 8, p. 43—71.

**Turner G., Siggins A.F.** Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // Geophysics, 1994, v. 59, p. 1192—1200.

**Wang T., Signorelli J.** Finite-difference modeling of electromagnetic tool response for logging while drilling // Geophysics, 2004, v. 69, p. 152—160.

**Wu X., Habashy T.M.** Influence of steel casings on electromagnetic signals // Geophysics, 1994, v. 59, p. 378—390.