

ОПТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И БАЗЫ ДАННЫХ  
ОПТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

УДК 629.735.33:551.511.6:621.371

## Метод измерений профиля атмосферной турбулентности по наблюдениям лазерных опорных звезд

В.В. Носов, В.П. Лукин, Е.В. Носов, А.В. Торгаев\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 11.04.2016 г.

Ранее авторами был предложен метод восстановления профиля атмосферной турбулентности в двух пересекающихся лазерных пучках, создающих лазерные опорные звезды. В настоящей статье приведены результаты дальнейшего развития этого метода. В частности, для колмогоровской турбулентности построено интегральное уравнение с острым ядром типа дельта-функции, которое позволяет восстанавливать высотный профиль проще и точнее, чем в первоначальном варианте метода. Данные численного эксперимента показывают хорошее восстановление профиля реальной турбулентности вплоть до высот 10 км.

*Ключевые слова:* турбулентность, высотный профиль турбулентности, лазерные опорные звезды; turbulence, high-altitude turbulence profile, laser guide stars.

### Введение

Необходимым этапом исследований в теории турбулентности является экспериментальная проверка основных выводов теории. Для этого нужно располагать средствами оперативного измерения параметров атмосферной турбулентности. На длинных атмосферных трассах традиционное определение параметров метеодатчиками становится малоинформативным, дорогостоящим и неудобным для практики. Поэтому возникает необходимость создания и применения оптических методов определения параметров атмосферной турбулентности путем измерений искажений световых полей в лазерных пучках.

Одним из основных оптических параметров турбулентной атмосферы является структурная характеристика флуктуаций показателя преломления  $C_n^2$ , характеризующая интенсивность атмосферной турбулентности. Эта величина влияет на большинство характеристик лазерного пучка, распространяющегося в атмосферной турбулентности. Особенный интерес представляет высотный профиль структурной характеристики  $C_n^2(h)$  ( $h$  – высота над подстилающей поверхностью).

В настоящее время накоплено много экспериментальных данных измерений высотных профилей  $C_n^2(h)$ . Для измерений использовались метеодатчики, установленные либо вблизи земной поверхности, либо на метеомачтах, самолетах, радиозондах и др. Данные таких многолетних измерений высотных профилей систематизированы в монографиях [1, 2]. Результаты определения параметров атмосферной турбулентности оптическими (как правило, лазерными

методами) приведены в [3]. Здесь же рассмотрены данные оптических измерений в горных районах.

В используемых оптических методах определения  $C_n^2(h)$  (в том числе, в астрономических методах) предусматриваются измерения, как правило, интегральной интенсивности атмосферной турбулентности (интеграла по всем высотам от профиля  $C_n^2(h)$ ) [2–5]. В некоторых случаях интегральная интенсивность вычисляется путем разбиения всего высотного диапазона на ряд слоев [6].

В большинстве задач атмосферной оптики, однако, наиболее интересными являются данные не для интегральной, а для локальной интенсивности турбулентности. Локальная интенсивность атмосферной турбулентности представляет собой высотный профиль структурной характеристики флуктуаций показателя преломления  $C_n^2(h)$ , т.е. данные для значений  $C_n^2$  на любой выбранной высоте  $h$ . Локальную интенсивность турбулентности можно также характеризовать высотными профилями структурной характеристики флуктуаций температуры  $C_T^2(h)$  (однако, так как  $C_T^2$  известным образом связано с  $C_n^2$  [1], обычно используется только  $C_n^2$ ).

Для измерений высотного профиля  $C_n^2(h)$  (значений  $C_n^2$  на любой выбранной высоте  $h$ ) в [2, 3, 5] приведен ряд интегральных уравнений (полученных в основном из теоретических соотношений для дисперсии дрожания оптических изображений). Эти интегральные уравнения обычно имеют плавное ядро. Восстановление высотного профиля  $C_n^2(h)$  из решений таких уравнений, как правило, требует регуляризации и сопровождается значительными ошибками.

Ясно, что вопросы измерений высотного профиля  $C_n^2(h)$  оптическими методами (включая лазерные методы) остаются актуальными, как и поиск

\* Виктор Викторович Носов (nosov@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru); Евгений Викторович Носов; Андрей Витальевич Торгаев.

новых надежных теоретических соотношений, позволяющих из оптических измерений восстанавливать профиль  $C_n^2(h)$  с высокой точностью.

В нашей работе [7] ранее был предложен метод восстановления высотного профиля интенсивности атмосферной турбулентности по измерениям турбулентных рефракционных смещений двух пересекающихся лазерных пучков. Явление рефракционных смещений пучков (включая и дрожание оптических изображений) хорошо изучено [1, 2]. Так как рефракционные смещения пучков и изображений обусловлены в первую очередь фазой оптической волны [1, 2], то метод [7] можно назвать фазовым методом.

В более поздних наших работах [8, 9] произведена модификация этого метода на случаи наблюдений изображений лазерных опорных звезд, созданных в атмосфере [8], и наблюдений внеатмосферных астрономических источников [9]. По сравнению с астрономическим методом метод с опорными звездами более гибок, так как имеет дополнительную степень свободы (длину оптической трассы).

Лазерные опорные звезды широко применяются в лидарных методах зондирования атмосферы. Они создаются стробированием оптического приемника (заданием временного интервала открытия приемника). Это позволяет принимать короткий световой импульс, отраженный от расположенного на заданной высоте некоторого небольшого объема среды. Лазерная опорная звезда обычно создается за счет рассеяния света на аэрозолях. При этом эффекты аэрозольного рассеяния и рассеяния на турбулентных неоднородностях среды, как установлено в [3], оказываются разделенными. Имеются также и другие способы создания опорных звезд.

В настоящей работе приведены результаты дальнейшего развития метода двух пересекающихся лазерных пучков, создающих лазерные опорные звезды. Из данных [7, 8] построено интегральное уравнение, которое позволяет восстанавливать высотный профиль интенсивности атмосферной турбулентности более просто и точнее, чем в [8]. Приведены данные численного эксперимента по восстановлению реального профиля турбулентности из наблюдений лазерных опорных звезд.

## 1. Первые модификации метода

Как показано в [2, 8, 10], для колмогоровской турбулентности пространственная корреляционная функция смещений оптических изображений двух разнесенных лазерных опорных звезд может быть представлена в виде

$$B(\mathbf{p}, \mathbf{R}) = \sigma^2 \int_0^1 d\xi \xi^{5/3} C_n^2(h(\xi x)) {}_1F_1(1/6, 1, -Z(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{R})), \quad (1)$$

$$Z(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{R}) = |\mathbf{p}(1 - \xi) + \mathbf{R}\xi|^2 / \xi^2.$$

Здесь  $\sigma^2 = 4,08 F_t^2 x a_t^{-1/3}$ ,  $x$  — длина атмосферной трассы (расстояние от опорной звезды до приемни-

ка),  $a_t$  и  $F_t$  — радиус и фокусное расстояние приемников соответственно;  $h(\xi x) = h_0 + (1 - \xi)x \cos \theta$  — текущая высота над земной поверхностью ( $\theta$  — зенитный угол центра интервала между опорными звездами,  $h_0$  — высота приемников над подстилающей поверхностью). Также в (1)  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{R}$  — векторы, соединяющие соответственно центры опорных звезд (источников) и центры одинаковых оптических приемников (каждый вектор нормирован на  $2^{1/2} a_t$ ). Вектор  $\mathbf{R}$  имеет две ортогональные компоненты  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\perp + \mathbf{R}_\parallel$  ( $\mathbf{R}_\perp \cdot \mathbf{R}_\parallel = 0$ ), одна из которых ( $\mathbf{R}_\parallel$ ) параллельна (либо антипараллельна) вектору  $\mathbf{p}$ , а вторая ( $\mathbf{R}_\perp$ ) — перпендикулярна ему. Величина  $\mathbf{R}_\perp$  (поперечный разнос приемников) характеризует отклонение от параллельности линии, соединяющей приемники, и линии, соединяющей источники. На практике такое отклонение характеризует погрешность установки приемников относительно заданного расположения лазерных звезд.

В выражении (1) предполагается, что некогерентные источники, которыми являются опорные звезды, имеют сравнительно малые поперечные размеры (близки к точечным источникам). Это означает, что угловой размер некогерентного источника, умноженный на толщину оптически активного турбулентного слоя атмосферы (3,2 км [1, 2]), должен быть значительно меньше диаметра приемника. На практике это условие обычно выполняется. Кроме того, в (1) не учитывается дополнительное слагаемое, связанное с высотным профилем внешнего масштаба турбулентности (размер внешнего масштаба считается существенно больше диаметра приемника). Как показано в [1, 2, 10], для вертикальных и наклонных трасс, не слишком близких к горизонтальным ( $\theta \lesssim 75^\circ$ ), это слагаемое можно не учитывать.

Формула (1) задает выражение для пространственной корреляционной функции смещений оптических изображений двух неподвижных источников. Такая ситуация имеет место при наблюдении, например, внеатмосферных астрономических источников [9]. В то же время опорные звезды, созданные в атмосфере двумя лазерными пучками, испытывают поперечные смещения как целое из-за турбулентной случайной рефракции лазерных пучков в атмосфере. На основании данных [1, 2, 10], применяя общепринятые теоретические положения, можно показать, что для движущихся из-за случайной рефракции лазерных пучков, создающих опорные звезды, пространственная корреляционная функция смещений двух оптических изображений звезд на наклонных трассах будет иметь вид

$$B(\mathbf{p}, \mathbf{R}) = \sigma^2 \int_0^1 d\xi \xi^2 \gamma(\xi)^{-1/6} \times \\ \times C_n^2(h(\xi x)) {}_1F_1(1/6, 1, -Z(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{R})), \quad (1a)$$

$$Z(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{R}) = |\mathbf{p}(1 - \xi) + \mathbf{R}\xi|^2 / \gamma(\xi),$$

$$\gamma(\xi) = \xi^2 + (1 - \xi)^2 (\sigma_c / a_t)^2 [1 - b_c(\mathbf{p}, \mathbf{R})].$$

Здесь  $\sigma_c^2$  – дисперсия смещений одного лазерного пучка на трассе длиной  $x$ ;  $b_c(\mathbf{p}, \mathbf{R}')$  – коэффициент пространственной корреляции смещений двух лазерных пучков (разнесенных в плоскости излучения на вектор  $\mathbf{R}'$ ), создающих опорные звезды (разнесенные в плоскости наблюдения на вектор  $\mathbf{p}$ ); остальные обозначения в (1а) те же, что и в (1). Как видно, (1а) получается из (1) заменой  $\xi^2$  на  $\chi(\xi)$ .

Выражение (1а) не учитывает корреляцию случайного поля показателя преломления в любой выбранной конкретной точке с вектором случайных координат центра тяжести лазерного пучка. Однако можно рассчитать эту корреляцию, используя формулу Фуруцу–Новикова и среднеинтенсивное приближение [1, 2]. Учет функциональной зависимости вектора координат центра тяжести от поля показателя преломления приводит к появлению добавочного слагаемого в (1а). Это слагаемое оказывается квадратичным по интенсивности турбулентности, в отличие от линейной по интенсивности турбулентности правой части выражения (1а). Указанное слагаемое будет существенным в области сильных флуктуаций интенсивности света. В противоположной области слабых флуктуаций оно вносит малые поправки к (1а). В то же время в интересующей нас ситуации наклонных трасс, включая астрономические ( $\theta \lesssim 75^\circ$ ), как известно [1, 2], реализуется область слабых флуктуаций интенсивности. Поэтому для наклонных трасс можно использовать выражение (1а).

Из сравнения выражений (1) и (1а) следует, что небольшие смещения лазерных пучков ( $\sigma_c \ll a_t$ ) не меняют вид корреляционной функции изображений (1). Как показывают данные многолетних наблюдений дрожания астрономических изображений [11–14], стандартное (среднеквадратическое) отклонение дрожаний редко превышает 3 угл. с (обычно 1–2 угл. с). Приблизительно такие же значения имеет на наклонных трассах и стандартное отклонение смещений лазерного пучка  $\sigma_c$  [1, 2]. Поэтому для типичных небольших приемников (диаметром 20–30 см) на трассе длиной 10 км  $\sigma_c/a_t \approx 1$  в (1а). Однако с ростом диаметра приемников и уменьшением длины трассы отношение  $\sigma_c/a_t$  быстро убывает [и от (1а) мы приходим к (1)].

Из выражения (1а) также видно, что коррелированные ( $b_c \approx 1$ ,  $|1 - b_c| \ll 1$ ) поперечные смещения как целое двух лазерных пучков (и, соответственно, опорных звезд) не меняют вид корреляционной функции изображений (1). В то же время отсутствие корреляции смещений двух лазерных пучков ( $b_c \approx 0$ ) для длинных трасс (более 10 км) и малых приемников (менее 20 см) может привести к изменению корреляции дрожания изображений.

Функция пространственной корреляции смещений двух лазерных пучков хорошо изучена [1, 2]. Как следует из [1, 2], на наклонных атмосферных трассах обычно наблюдается достаточно высокий уровень корреляции. Даже в наиболее неблагоприятном случае параллельных пучков при разносе пучков на несколько десятков их диаметров коэф-

фициент корреляции смещений оказывается более 1/е. Следовательно, при не очень больших расстояниях  $\mathbf{R}'$  между лазерными источниками (не более нескольких десятков их диаметров), формируемыми опорными звездами, рефракционные смещения этих опорных звезд не приведут к значительным ошибкам, и можно использовать выражение (1).

Возвратимся к формуле (1). Если оси визирования каждым приемником своей опорной звезды пересекаются, что соответствует условию

$$\mathbf{R}_{\parallel} = -m\mathbf{p},$$

где  $m$  – любое неотрицательное число ( $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\perp} + \mathbf{R}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{R}_{\perp} \cdot \mathbf{R}_{\parallel} = 0$ ), то ядро интегрального уравнения (1) имеет максимум внутри интервала интегрирования в точке  $\xi_m = 1/(1 + m)$ . При этом в (1)

$$Z(\xi, \mathbf{p}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}_{\perp}^2 + \rho^2(1 - \xi/\xi_m)^2/\xi^2.$$

На рис. 1–3 изображены ядра уравнения (1) (вырожденная гипергеометрическая функция  ${}_1F_1$ ) в зависимости от текущей длины трассы  $x'$  ( $0 \leq x' \leq x$ ,  $\xi = x'/x$ ) для различных расстояний между источниками  $\rho$  и приемниками  $m$  при разных значениях  $R_{\perp}$ . Кривым с номерами 1–10 на рис. 1–3 соответствуют значения  $m = 0,01; 0,1; 1/4; 1/3; 1/2; 1; 2; 10; 100; 500$  (последовательно).

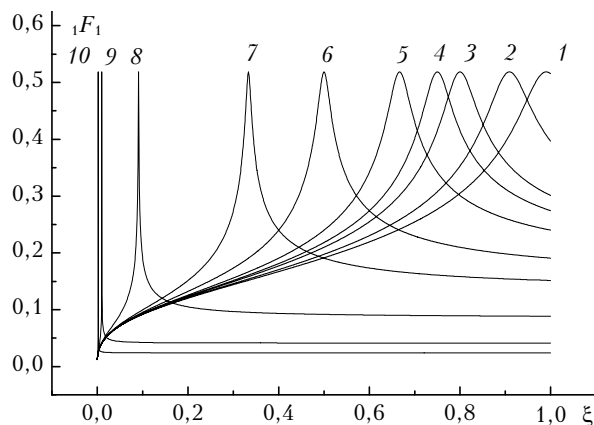


Рис. 1. Ядро уравнения (1) (функция  ${}_1F_1$ ) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_{\perp} = 5$

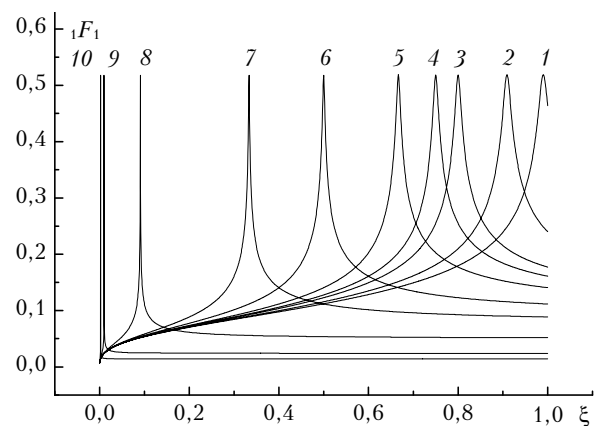


Рис. 2. Ядро уравнения (1) (функция  ${}_1F_1$ ) для  $\rho = 500$ ,  $\mathbf{R}_{\perp} = 5$

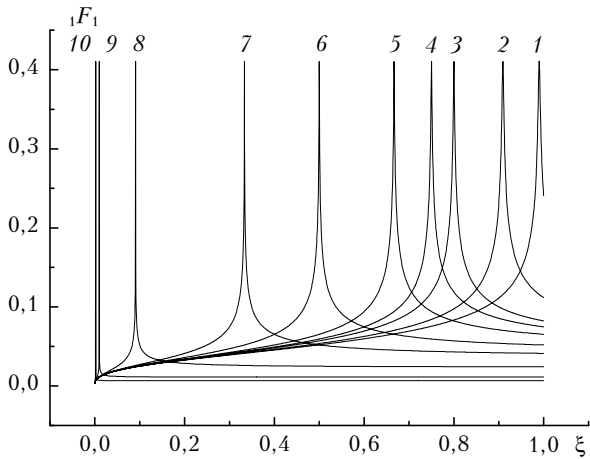


Рис. 3. Ядро уравнения (1) (функция  ${}_1F_1$ ) для  $\rho = 5000$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 10$

Как видно из рис. 1–3, максимумы ядра уравнения (1) являются достаточно резкими. При некоторых значениях постоянной  $m$  ядро близко к  $\delta$ -функции. Это позволяет надеяться на хорошее восстановление высотного профиля  $C_n^2(h)$  из решения интегрального уравнения (1).

В то же время видно, что для каждого  $m$  максимум наблюдается на фоне достаточно плавного «пьедестала». Ширина максимумов ядра  $\Delta\xi$  (по уровню  $1/e$ ) растет с уменьшением  $\rho$  и увеличением  $\xi_m$ . В общем случае

$$\Delta\xi = c_0 \xi_m^2 / (\rho z_\perp^{1/2}), \quad c_0 = \text{const} = 2 \cdot 6^{1/2} (1 - 1/e)^{1/2},$$

$$z_\perp = {}_1F_1(7/6, 2; -\mathbf{R}_\perp^2) / {}_1F_1(1/6, 1; \mathbf{R}_\perp^2).$$

При реализации метода в первую очередь следует выбрать поперечное расстояние между двумя лазерными пучками, формирующими опорные звезды. Тогда мы фиксируем поперечное расстояние  $\rho$  между лазерными опорными звездами. Выбор расстояния между приемниками задается величиной  $m$ . Для наилучшего восстановления высотного профиля  $C_n^2(h)$  наиболее подходящими значениями параметра  $m$  можно считать его значения из интервала  $0,4 \leq m \leq 1$ . Оси визирования каждым приемником своей опорной звезды пересекаются. Далее, путем последовательного увеличения длины трассы  $x$  производим пошаговые измерения корреляционной функции дрожания изображений лазерных звезд.

Для уменьшения влияния пьедестала восстановление профиля  $C_n^2(h)$  лучше начинать от подстилающей поверхности, учитывая на каждом шаге результаты восстановления на предыдущих шагах. В этом случае из (1) находим простое приближенное соотношение [8] для восстановления профиля при заданной длине трассы  $x$ :

$$C_n^2(h_0 + (1 - \xi_m)x \cos\theta) = [B(\rho, \mathbf{R}) - B_*(\rho, \mathbf{R})] / S(\xi_*), \quad (2)$$

$$B_*(\rho, \mathbf{R}) = \sigma^2 \int_0^1 d\xi \xi^{5/3} C_n^2(h(\xi x)) {}_1F_1(1/6, 1; -Z(\xi, \rho, \mathbf{R})),$$

$$S(\xi_*) = \sigma^2 \int_0^{\xi_*} d\xi \xi^{5/3} {}_1F_1(1/6, 1; -Z(\xi, \rho, \mathbf{R})).$$

Здесь  $\xi_* = x'/x$ , где  $x'$  – длина трассы (от поверхности), на которой восстановлено значение  $C_n^2(h_0 + (x - x')\cos\theta)$  на предыдущем шаге длиной  $x$ ;  $C_n^2$  – линейно интерполированный профиль, полученный из данных восстановления на всех предыдущих шагах. На рис. 4–6 показаны результаты (данные численного эксперимента) восстановления профиля турбулентности по формуле (2) (при  $h_0 = 2,5$  м,  $\theta = 0$ ). В качестве восстанавливаемых аналитических (теоретических) профилей выбраны модель [1, 2]:

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0)(h/h_0)^{-2/3} \exp(-[h - h_0]/h_*),$$

$$h_* = 3200 \text{ м},$$

и предельные аналитические зависимости теории подобия  $C_n^2(h) = C_n^2(h_0)(h/h_0)^{-\nu}$  (где  $\nu = 0, 2/3, 4/3$ ), характеризующие устойчивую, безразличную и неустойчивую температурные стратификации соответственно.

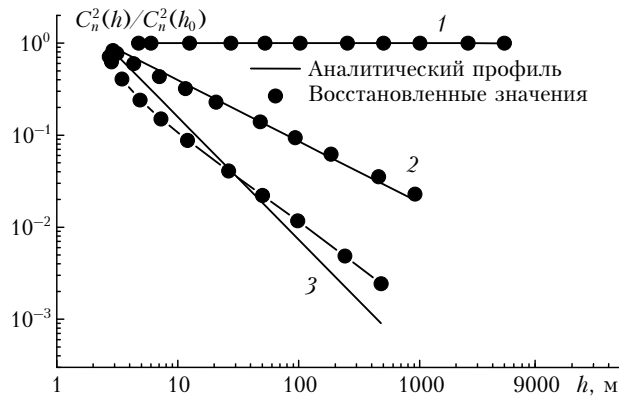


Рис. 4. Результаты восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (2) без учета пьедестала ( $\xi_* = 1$ ) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 5$ . 1 –  $\nu = 0$ ,  $m = 0,05-10$ ; 2 –  $\nu = 2/3$ ,  $m = 0,1$ ; 3 –  $\nu = 4/3$ ,  $m = 0,05$

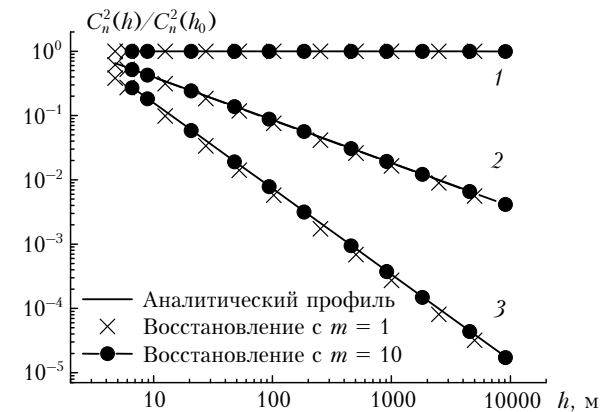


Рис. 5. Результаты восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (2) с учетом пьедестала ( $\xi_* \neq 1$ ) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 5$ .  $C_n^2 = C_n^2(h)$ . 1 –  $\nu = 0$ ; 2 –  $\nu = 2/3$ ; 3 –  $\nu = 4/3$

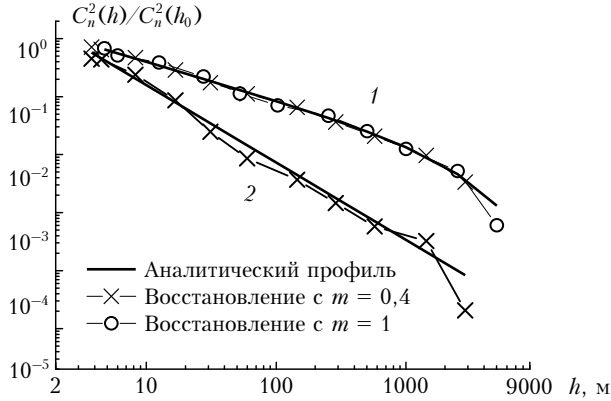


Рис. 6. Результаты восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (2) с учетом пьедестала ( $\xi_* \neq 1$ ) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 5$ . 1 –  $C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-2/3} \exp[-(h-h_0)/h_*]$ ,  $h_* = 3200$  м [1, 2]; 2 –  $\nu = 4/3$

Как видно, учет влияния пьедестала ядра ( $\xi_* \neq 1$ ) дает более качественное восстановление (рис. 5, 6). Причем формирование линейно интерполированного профиля  $C_n^2(h)$  из известных аналитических данных [1, 2] для профиля на начальном приземном участке приводит к практически идеальному восстановлению (рис. 5). Неплохое восстановление наблюдается также, если линейно интерполированный профиль  $C_n^2$  получать из реальных данных восстановления на всех предыдущих шагах (рис. 6).

Точность восстановления высотного профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (2) из реальных данных восстановления на всех предыдущих шагах (рис. 5, 6) увеличивается с уменьшением длины шага (с уменьшением расстояния между длинами оптических трасс двух последовательных соседних измерений профиля). Использование линейной интерполяции между двумя восстановленными значениями профиля (вместо ступенчатой функции) также увеличивает точность восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (2).

## 2. Дальнейшее развитие метода

Приведенный выше алгоритм восстановления профиля предполагает пошаговые измерения корреляционной функции дрожания изображений лазерных звезд, последовательно увеличивая длину трассы  $x$ . Ниже приведем результаты дальнейшего развития этого метода. На основании данных [7, 8] построим интегральное уравнение, которое позволяет восстанавливать высотный профиль интенсивности атмосферной турбулентности более просто (без использования данных на всех предыдущих шагах) и в целом точнее, чем в [8].

Преобразуем исходное интегральное уравнение (1) заменой переменной  $\xi$  на  $1 - \xi'$ . В этом случае нормированная продольная переменная  $\xi'$  будет изменяться от приемника, а не от источника, как  $\xi$  в (1); и в (1)  $h(\xi x)$  заменится на  $h'(\xi') = h_0 + \xi' x \cos \theta$ :

$$B(\rho, \mathbf{R}) = \sigma^2 \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} \times \\ \times C_n^2(h'(\xi')) {}_1F_1(1/6, 1; -Z'(\xi', \rho, \mathbf{R})), \quad (3)$$

$$Z'(\xi', \rho, \mathbf{R}) = |\rho(\xi') + \mathbf{R}(1 - \xi')|^2 / (1 - \xi')^2 = \\ = \mathbf{R}_\perp^2 + \rho^2 m^2 (1 - \xi' / \xi'_m) / (1 - \xi')^2 = \\ = \mathbf{R}_\perp^2 + \mathbf{R}_\parallel^2 (1 - \xi' / \xi'_m) / (1 - \xi')^2, \\ \xi'_m = m / (1 + m).$$

Ядро нового интегрального уравнения (3) имеет максимум внутри интервала интегрирования в точке  $\xi'_m = 1 - \xi_m = m / (1 + m)$ . При этом так же, как и в (1),

$$\mathbf{R}_\parallel = -m\rho \quad (\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}_\perp^2 + \mathbf{R}_\parallel^2, \mathbf{R}_\perp \cdot \mathbf{R}_\parallel = 0).$$

В правой части (3) вычтем и добавим функцию  $P$ , моделирующую пьедестал. Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$B(\rho, \mathbf{R}) / \sigma^2 = \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} C_n^2(h'(\xi')) K(\xi', \rho, \mathbf{R}) + \\ + \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} C_n^2(h'(\xi')) P(\xi', \rho, \mathbf{R}), \quad (4)$$

$$K(\xi', \rho, \mathbf{R}) = {}_1F_1(1/6, 1; -Z'(\xi', \rho, \mathbf{R})) - P(\xi', \rho, \mathbf{R}). \quad (5)$$

В качестве пьедестала  $P(\xi', \rho, \mathbf{R})$  естественно выбрать следующую функцию:

$$P(\xi', \rho, \mathbf{R}) = {}_1F_1(1/6, 1; -Z'(0, \rho, \mathbf{R})), \quad \xi' \leq \xi'_p, \quad (6)$$

$$P(\xi', \rho, \mathbf{R}) = {}_1F_1(1/6, 1; -Z'(\xi', \rho, \mathbf{R})), \quad \xi' \leq \xi'_p,$$

где

$$\xi'_p = 2 / (1 + 1/\xi'_m) = 2m / (1 + 2m)$$

– второй корень уравнения  $Z'(\xi', \rho, \mathbf{R}) = Z'(0, \rho, \mathbf{R})$ . Ядро уравнения (3) (функция  ${}_1F_1$ ), а также функции  $K(\xi', \rho, \mathbf{R})$  и  $P(\xi', \rho, \mathbf{R})$  изображены на рис. 7–9. Кривым с номерами 1–9 на рис. 7–9 соответствуют значения  $m = 0,01; 0,1; 1/4; 1/3; 1/2; 1; 2; 10; 100$  (последовательно).

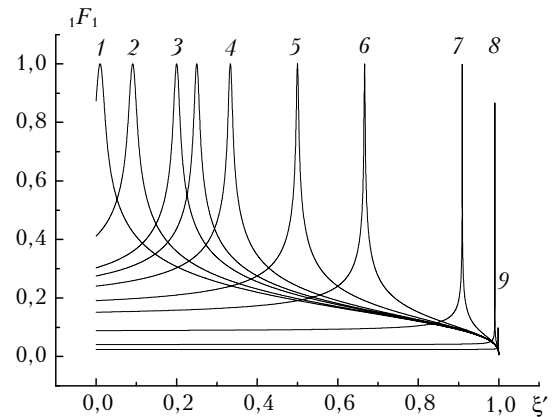


Рис. 7. Ядро уравнения (3) (функция  ${}_1F_1$ ) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 0$

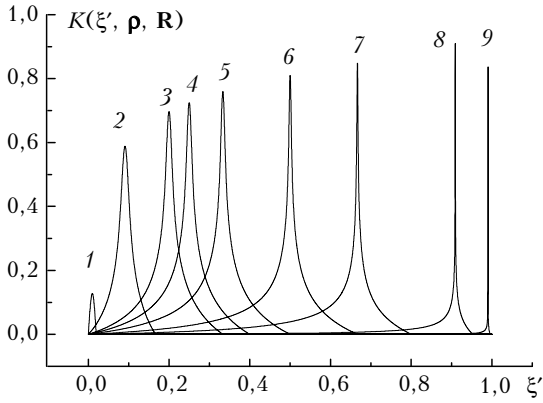


Рис. 8. Функция  $K$  (5) (ядро уравнения (4)) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 0$

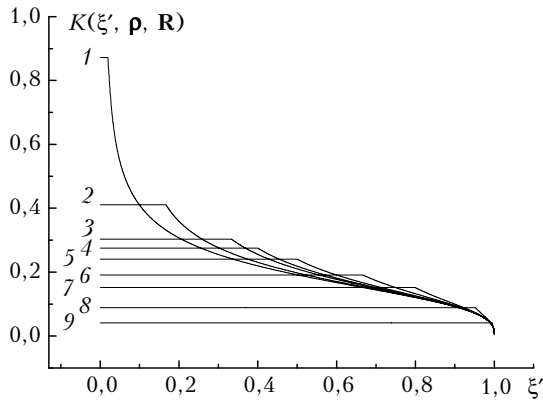


Рис. 9. Функция  $P$  (6) (пьедестал) для  $\rho = 100$ ,  $\mathbf{R}_\perp = 0$

Как видно из рис. 8, максимумы ядра  $K(\xi', \rho, \mathbf{R})$  являются достаточно резкими («острое» ядро типа  $\delta$ -функции), в то же время это ядро не имеет пьедестала. Острота максимумов ядра  $K(\xi', \rho, \mathbf{R})$  (рис. 8) и свойства пьедестала  $P(\xi', \rho, \mathbf{R})$  (рис. 9) позволяют существенно упростить интегральное уравнение (4).

Второе слагаемое в правой части уравнения (4) можно выразить через значение корреляционной функции в нуле  $B(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ :

$$B(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \sigma^2 \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} \times \\ \times C_n^2(h'(\xi')) {}_1F_1(1/6, 1; -Z'(\xi', \mathbf{0}, \mathbf{0})) = \\ = \sigma^2 \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} C_n^2(h'(\xi')),$$

где учтено, что  $Z'(\xi', \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$  и  ${}_1F_1(1/6, 1; 0) = 1$ . Функция  $B(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  является дисперсией случайного процесса дрожания изображения (в любом приемнике), вместе с функцией  $B(\rho, \mathbf{R})$  она измеряется в эксперименте.

Так как фильтрующая функция  $(1 - \xi')^{5/3}$  в (4) при  $1/2 \leq \xi' \leq 1$  существенно убывает, то убывание пьедестала  $P(\xi', \rho, \mathbf{R})$  (6) на отрезке  $\xi'_p \leq \xi' \leq 1$  можно не учитывать (принимая во внимание также,

что  $\xi'_p \geq 1/2$  при обычно используемых значениях  $m$ ,  $m \geq 1/2$ ). Учет дополнительного (к существенно убывающей фильтрующей функции) убывания пьедестала  $P(\xi', \rho, \mathbf{R})$  на отрезке  $\xi'_p \leq \xi' \leq 1$  не скажется на значении интеграла во втором слагаемом в правой части уравнения (4). Тогда, применяя во втором слагаемом в (4) теорему о среднем, получаем

$$\int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} C_n^2(h'(\xi')) P(\xi', \rho, \mathbf{R}) = \\ = \beta \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} C_n^2(h'(\xi')) = \beta [B(\mathbf{0}, \mathbf{0}) / \sigma^2], \quad (7)$$

$$\beta = {}_1F_1(1/6, 1; -Z'(0, \rho, \mathbf{R})) = {}_1F_1(1/6, 1; -\mathbf{R}^2)$$

$$(\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}_\perp^2 + \mathbf{R}_\parallel^2, \mathbf{R}_\perp \cdot \mathbf{R}_\parallel = 0, \mathbf{R}_\parallel = -m\rho).$$

Здесь  $\beta$  – постоянное значение функции  $P(\xi', \rho, \mathbf{R})$  на отрезке  $0 \leq \xi' \leq \xi'_p$ . Как видно из (7), величина  $\beta$  зависит простым способом от расстояния между приемниками (от модуля вектора  $\mathbf{R}$ ). Величина  $\beta$  показана на рис. 10, она имеет простые асимптотики:

$$\beta = 1 - R^2/6, \quad R \ll 1,$$

$$\beta = R^{-1/3} / \Gamma(5/6), \quad R \gg 1.$$

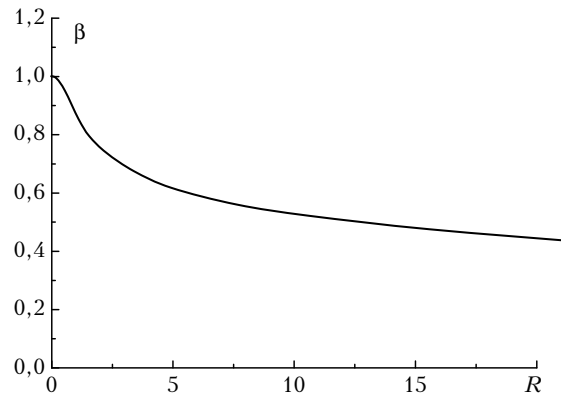


Рис. 10. Зависимость функции  $\beta$  (7) от модуля вектора  $\mathbf{R}$

В первом же слагаемом в правой части уравнения (4) используем свойство близости ядра  $K(\xi', \rho, \mathbf{R})$  к  $\delta$ -функции:

$$\int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} C_n^2(h'(\xi')) K(\xi', \rho, \mathbf{R}) = \alpha C_n^2(h'(\xi'_m)), \quad (8)$$

$$\alpha = \int_0^1 d\xi' (1 - \xi')^{5/3} K(\xi', \rho, \mathbf{R}).$$

Зависимость функции  $\alpha$  (8) от числа  $m$  для различных  $\rho$  при  $\mathbf{R}_\perp = 0$  показана на рис. 11, зависимость  $\alpha$  от  $\mathbf{R}_\parallel$  для различных  $m$  при  $\mathbf{R}_\perp = 0$  – на рис. 12.

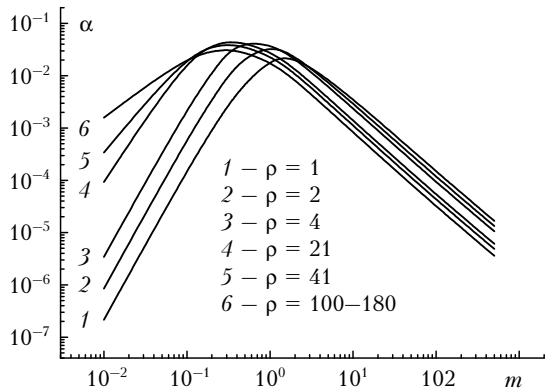


Рис. 11. Зависимость функции  $\alpha$  (8) от числа  $m$  для различных  $\rho$  при  $R_{\perp} = 0$

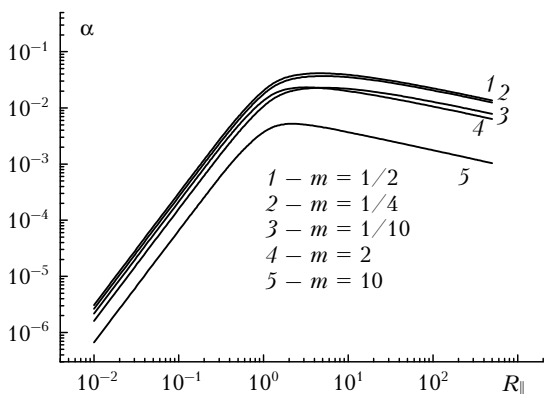


Рис. 12. Зависимость функции  $\alpha$  (8) от  $R_{\parallel}$  для различных  $m$  при  $R_{\perp} = 0$

В итоге из соотношений (4), (7), (8) имеем простое равенство

$$C_n^2(h_0 + \xi_m x \cos \theta) = [B(\mathbf{p}, \mathbf{R}) - \beta B(\mathbf{0}, \mathbf{0})] / (\alpha \sigma^2). \quad (9)$$

Равенство (9) позволяет восстанавливать высотный профиль интенсивности атмосферной турбулентности более просто (без использования данных на всех предыдущих шагах) и в целом точнее, чем по формуле (2). Самый простой вариант восстановления высотного профиля по формуле (9) можно реализовать изменением длины оптической трассы  $x$  (без использования данных на предыдущих шагах) при фиксированном значении числа  $m$ .

На рис. 13, 14 показаны результаты восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (9) для  $R_{\parallel} = 100$ ,  $R_{\perp} = 0$ ,  $m = 1/2$  при  $h_0 = 6$  м,  $\theta = 0$ . Значение числа  $m$ , как видно, фиксировано, изменяется только длина оптической трассы  $x$ .

В качестве восстанавливаемых теоретических моделей выбраны те же модели, что и на рис. 4–6. Как показывают данные численного эксперимента рис. 13, 14, наблюдается хорошее восстановление высотного профиля реальной турбулентности вплоть до высот 10 км.

Сравнивая результаты восстановления высотных профилей, приведенные на рис. 4–6 и на рис. 13, 14, можно видеть, что восстановление

профиля по формуле (9) происходит более качественно (точнее) и для больших высот, чем по формуле (2). Этому следовало ожидать, так как по сравнению с (2) формула (9) практически полностью учитывает влияние пьедестала в ядре интегрального уравнения (1).

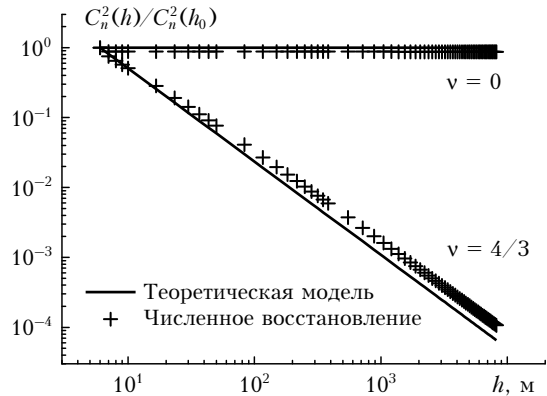


Рис. 13. Результаты восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (9) при  $m = 1/2$  для  $v = 0$  и  $v = 4/3$

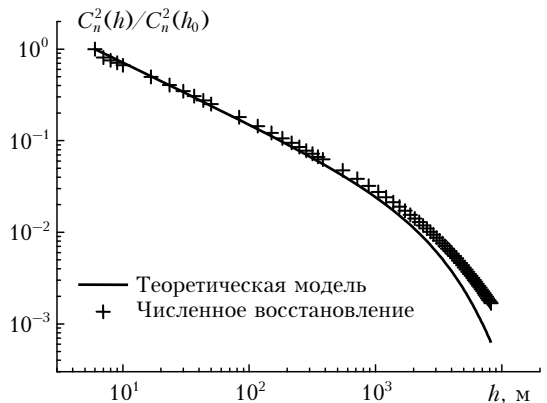


Рис. 14. Результаты восстановления профиля  $C_n^2(h)$  по формуле (9) при  $m = 1/2$  для модели [1, 2]

Отметим, что реализация метода в натуральных измерениях позволит установить степень отличия высотных профилей когерентной и колмогоровской турбулентности. Этот вопрос представляет значительный интерес [11–14].

## Заключение

Таким образом, развит метод измерений высотного профиля интенсивности атмосферной турбулентности по наблюдениям лазерных опорных звезд. Построено интегральное уравнение с острым ядром типа  $\delta$ -функции, которое позволяет восстанавливать высотный профиль более просто и точнее, чем в первоначальном варианте метода. Данные численного эксперимента показывают хорошее восстановление профиля реальной турбулентности вплоть до высот 10 км.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-05-05404.

1. *Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
2. *Миронов В.Л.* Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. 246 с.
3. *Беленький М.С., Бороноев В.В., Гомбоев Н.Ц., Миронов В.Л.* Оптическое зондирование атмосферной турбулентности. Новосибирск: Наука, 1986. 92 с.
4. *Колчинский И.Г.* Оптическая нестабильность земной атмосферы по наблюдениям звезд. Киев: Наукова думка, 1967. 184 с.
5. *Беленький М.С., Бороноев В.В., Гомбоев Н.Ц., Миронов В.Л.* Измерение структурной характеристики атмосферной турбулентности с помощью пространственно ограниченного лазерного пучка // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22, № 10. С. 1230–1235.
6. *Tokovinin A.* Where is the surface-layer turbulence? // Proc. SPIE. 2010. V. 7733. P. 77331N.
7. *Носов В.В., Торгаев А.В.* Lidar phase method for measuring altitude profiles of turbulence intensity and wind velocity // 15 th Int. Laser Radar Conf. Abstracts of papers. Pt. I. Tomsk, USSR. Publ. Institute of Atmospheric Optics. July 23–27 1990. P. 260–261.
8. *Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Возможности фазового метода измерения профиля атмосферной турбулентности по наблюдениям лазерных опорных звезд // Изв. вузов. Физ. 2013. Т. 56, № 8/3. С. 374–376.
9. *Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Возможности фазового метода измерения профиля атмосферной турбулентности по астрономическим наблюдениям // Изв. вузов. Физ. 2013. Т. 56, № 8/3. С. 372–373.
10. *Миронов В.Л., Носов В.В., Чен Б.Н.* Дрожание оптических изображений лазерных источников в турбулентной атмосфере // Изв. вузов. Радиофиз. 1981. Т. 23, № 4. С. 461–470.
11. *Носов В.В., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Торгаев А.В.* Атмосферная когерентная турбулентность // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 9. С. 753–759.
12. *Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Флуктуации астрономических изображений в когерентной турбулентности // Изв. вузов. Физ. 2012. Т. 55, № 9/2. С. 223–225.
13. *Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Проблема когерентной турбулентности // Вестник МГТУ «Станкин». 2013. Т. 24, № 1. С. 103–107.
14. *Носов В.В., Лукин В.П., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Носов Е.В., Торгаев А.В.* Оптические свойства когерентной турбулентности в горном пограничном слое. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015. 154 с.

*Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V.* **The atmospheric turbulence profile measurement method from observations of laser guide stars.**

Earlier, a method of restoration of a profile of atmospheric turbulence has been proposed by the authors in two intersecting laser beams, creating laser guide stars. Results of further development of this method are given in the present article. In particular, for Kolmogorov turbulence, the integral equation with a sharp kernel like delta function, which allows restoring a high-altitude profile more simply and more exactly, than in the initial version of a method, is constructed. Data of numerical experiment shows a good restoration of a profile of real turbulence up to heights of 10 km.